«Оптика атмосферы и океана», **14,** № 6–7 (2001)

УДК 535.34

Е.В. Чуканова, Л.Е. Парамонов

Разложение индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра

Красноярский государственный технический университет

Поступила в редакцию 19.03.2001 г.

Использованием элементов теории углового момента в приближении Рэлея – Ганса – Дебая (РГД) получено разложение индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра для одиночной сферической частицы, полидисперсных сферических и хаотически ориентированных сфероидальных частиц. Проводится сравнение с результатами строгой теории – метода Т-матриц.

Введение

Разложение элементов матрицы рассеяния по обобщенным сферическим функциям является эффективным подходом при решении задач однократного и многократного рассеяния [1, 2]. Если коэффициенты разложения известны, то элементы матриц рассеяния могут быть оценены для большой выборки углов рассеяния [3], потоки рассеянного излучения оцениваются для большой выборки произвольных конических телесных углов [4] при различной поляризационной структуре падающего излучения с минимальными вычислительными затратами.

В настоящее время оценка отмеченных коэффициентов ограничена возможностями строгой теории для несферических частиц даже регулярной формы [5]. Это ограничение относится к размеру и параметрам формы частиц.

Цель настоящей работы – восполнить этот пробел для оптически «мягких» частиц, чьи свойства удовлетворяют предпосылкам теории Рэлея – Ганса – Дебая (РГД) [6], и получить коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния для ансамблей сферических и хаотически ориентированных сфероидальных частиц.

1. Приближение Рэлея – Ганса –Дебая. Форм-фактор

Решение интегрального волнового уравнения позволяет представить амплитуду рассеянной волны в дальней зоне ($kR \gg 1$) в виде [7]:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ikR}}{kR}\,\mathbf{A}(\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_i); \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_i) = \frac{k^3}{4\pi} \int\limits_V \{\mathbf{n}_s \times [\mathbf{n}_s \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')]\}\, [(m_r^2(\mathbf{r}') - 1]\, e^{-ik\mathbf{n}_s\mathbf{r}'}\, dV, \tag{2}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число окружающей среды; m_r – относительный показатель преломления вещества частицы; λ – длина волны падающего излучения; R – расстояние до точки наблюдения; $\mathbf{n}_i = (\theta_i, \varphi_i)$, $\mathbf{n}_s = (\theta_s, \varphi_s)$ – единичные векторы направлений распространения падающего и рассеянного излучений соответственно; $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ – независимый от времени вектор напряженности электрического поля внутри частицы; множитель $e^{i\omega t}$ опускается. Данное выражение является точным интегральным выражением для $\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$ через поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ внутри частицы.

Выбор аппроксимации внутреннего поля частицы определяет приближение. Одно из таких приближений – теория Рэлея – Ганса – Дебая, где внутреннее поле аппроксимируется падающим: $\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathrm{e}_i\, e^{ik\mathbf{n}_i\mathbf{r}'}$ ($\mathbf{e}_i$ – единичный вектор поляризации падающей плоской волны). В этом случае упрощается выражение (2):

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_i) = \frac{k^3}{4\pi}\, \{\mathbf{n}_s \times [\mathbf{n}_s \times \mathrm{e}_i]\} \int\limits_V [m_r^2(\mathbf{r}') - 1]\, e^{-i\mathbf{k}_s\mathbf{r}'}\, dV, \tag{3}$$

где $\mathbf{k}_s = k(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_s)$.

Условия применимости приближения РГД [6]:

$$|m_r - 1|\ \mathrm{n1}, \quad 2kr\, |m_r - 1|\ \mathrm{n1}, \tag{4}$$

r – размер частицы.

Для описания рассеяния плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z, однородной сферической частицей используем правую систему координат с началом внутри рассеивателя.

Выражение (3) в матричной форме определяет амплитудную матрицу рассеяния [6]:

$$\begin{bmatrix} E_1^s \\ E_2^s \end{bmatrix} = -\frac{e^{ikR}}{kR} \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^i \\ E_2^i \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $S_{11}(\theta_s) = (m_r^2 - 1)\, f(\theta_s)$, $S_{22}(\theta_s) = (m_r^2 - 1)\, f(\theta_s) \cos(\theta_s)$ (θ_s – угол рассеяния); E_1, E_2 – координаты векторов напряженности в базисе с ортами: параллельным и перпендикулярным плоскости рассеяния;

$$f(\theta_s) = \frac{k^3}{4\pi} \int\limits_V e^{i\mathbf{k}_s\mathbf{r}}\, dV. \tag{6}$$

Форм-факторы (6) для некоторых форм однородных частиц известны, имеют явный вид и приведены в [8].

Для решения поставленной задачи использовалось отличное от общепринятого выражение для форм-фактора однородной сферической частицы. Опуская промежуточные выкладки, основанные на представлении плоской волны через функции Вигнера и использовании теоремы сложения [9], после интегрирования (6) получим следующее выражение с разделяющимися переменными:

$$f(\theta_s) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(kr)\, d_{00}^{n}(\theta_s); \tag{7}$$

$$R_n(kr) = \frac{k^3 r^3}{2}(2n+1)\{j_n^2(kr) - j_{n-1}(kr)\, j_{n+1}(kr)\}, \tag{8}$$

где $j_n(kr)$ – сферические функции Бесселя. Функции Вигнера и полиномы Лежандра связаны соотношением

$$P_n(\cos\theta) = d_{00}^n(\theta).$$

2. Коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра

Среди элементов матрицы рассеяния в приближении РГД независимым является только один элемент – интенсивность рассеянного излучения при неполяризованном падающем излучении единичной интенсивности:

$$Z_{11}(\theta_s) = 1/2\, |m_r^2 - 1|^2\, |f(\theta_s)|^2\, [1 + \cos^2(\theta_s)], \tag{9}$$

соответственно индикатриса рассеяния

$$F_{11}(\theta_s) = \frac{4\pi}{C_{\text{scat}}} Z_{11}(\theta_s), \tag{10}$$

где C_{scat} – коэффициент (сечение) рассеяния.

Опуская выкладки, приведем следующие формулы для коэффициентов разложения:

$$Z_{11}(\theta_s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta_s); \tag{11}$$

$$a_n = \frac{4}{3}\alpha_n + \frac{2}{3}\sum_{n'=|n-2|}^{n+2}\left[C_{n020}^{n'0}\right]^2 \alpha_{n'}, \tag{12}$$

$$\alpha_m = |m_r^2 - 1|^2 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=|n-m|}^{n+m} R_n(kr)\, R_{n'}(kr)\left[C_{n0n'0}^{m0}\right]^2, \; m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Отметим некоторые полезные свойства коэффициентов разложения [1]:

$$a_0 = \frac{C_{\text{scat}}}{4\pi}, \quad \frac{a_1}{3} = \langle\cos\theta_s\rangle. \tag{14}$$

Нормировка коэффициентов a_n на a_0 позволяет получить коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния (10).

3. Полидисперсные сферические и хаотично ориентированные сфероидальные частицы

Формулы коэффициентов разложения для полидисперсных сферических частиц аналогичны (12), (13) с той лишь разницей, что величины $R_n(kr)R_{n'}(kr)$ подлежат усреднению по ансамблю частиц.

В приближении РГД хаотично ориентированные вытянутые и сжатые сфероидальные частицы оптически эквивалентны полидисперсным сферическим частицам с соответствующей весовой функцией [10]:

$$\rho(a, b, r) = \begin{cases} \dfrac{a^4 b}{e}\dfrac{1}{r^5\sqrt{r^2 - a^2}}, & a \le r \le b, \\[2ex] \dfrac{a^3 b^2}{e}\dfrac{1}{r^5\sqrt{a^2 - r^2}}, & b \le r \le a, \end{cases} \tag{15}$$

где b – размер вертикальной полуоси сфероида, a – горизонтальной; $e = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}/\varepsilon$, ε – параметр формы, который определяется как отношение большей полуоси к меньшей. Таким образом, задача нахождения коэффициентов разложения для хаотично ориентированных сфероидов сводится к аналогичной задаче для полидисперсных сферических частиц. В случае полидисперсных хаотично ориентированных сфероидов с функцией плотности распределения по размерам $f(a, b)$ весовая функция эквивалентного ансамбля сферических частиц имеет вид свертки [11] $f(a, b)*\rho(a, b, r)$.

4. Результаты расчетов

О корректности применения полученных результатов в области (4) свидетельствуют результаты сравнения с расчетами на основе метода Т-матриц [12]. На рис. 1 приведены результаты расчетов индикатрисы рассеяния хаотично ориентированных сфероидов. Эффект влияния формы для эквиобъемных ($kr = 10$) частиц представлен на рис. 2.

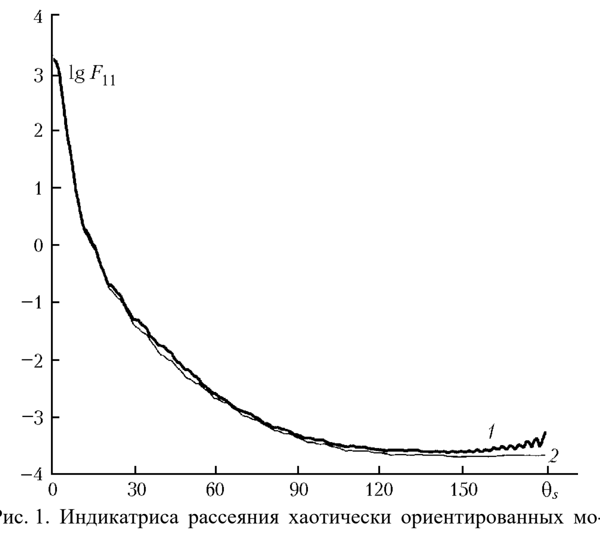

Рис. 1. Индикатриса рассеяния хаотически ориентированных монодисперсных сжатых сфероидов: $ka = 60$; $a/b = 3$; $m_r = 1{,}01$; кривая *1* – метод Т-матриц; *2* – РГД

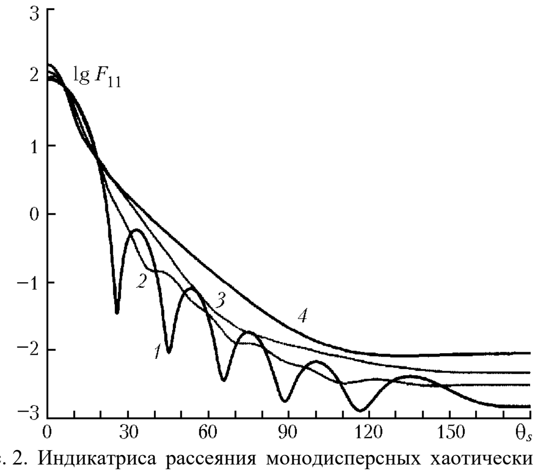

Рис. 2. Индикатриса рассеяния монодисперсных хаотически ориентированных эквиобъемных ($kr = 10$) сжатых сфероидов: $\varepsilon = 1{,}1$ (кривая *1*), 2 (*2*), 5 (*3*), 10 (*4*)

Итак, в области применения теории РГД полученные результаты позволяют оценить коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния отмеченных ансамблей частиц без ограничений на размер и параметры формы.

Авторы благодарны М. Мищенко (Институт Годдарда, НАСА) за предоставленные результаты расчета индикатрисы на основе метода Т-матриц.

1. *Kuscer I., Ribaric M.* Matrix formalism in the theory of diffusion of light // Opt. Acta. 1959. V. 6. P. 42–51.
2. *Hovenier J.W., van der Mee C.V.M.* Fundamental relationships relevant to the transfer of polarized light in a scattering atmosphere // Astron. and Astrophys. 1983. V. 128. P. 1–16.
3. *Mishchenko M.I.* Light scattering by randomly oriented axially symmetric particles // J. Opt. Soc. Amer. A. 1990. V. 8. P. 871–882.
4. *Paramonov L.E.* Light scattering by randomly oriented particles into solid angles // J. Opt. Soc. Amer. A. 1994. V. 11. № 4. P. 1360–1369.
5. *Mishchenko M.I., Travis L.D.* Capabilities and limitations of current fortran implementation of the T-matrix method for randomly oriented rotationally symmetric scatterers // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1998. V. 60. № 3. P. 309–324.
6. *Ван де Хюлст Г.* Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 536 с.
7. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
8. *Kerker M.* The scattering of light and other electromagnetic radiation. N.Y.: Acad. Press, 1969. 666 p.
9. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
10. *Парамонов Л.Е.* Малопараметрические модели оценки сечений ослабления, рассеяния и поглощения атмосферных аэрозолей // Оптика атмосф. и океана. 1994. Т. 7. № 8. С. 1139–1148.
11. *Владимиров В.С.* Уравнение математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
12. *Waterman P.C.* Symmetry, unitarity and geometry in electromagnetic scattering // Phys. Rev. D. 1971. V. 3. № 4. P. 825–839.

E.V. Chukanova, L.E. Paramonov. **Expansion of the scattering phase function on Legendre polynomials.**

The angular momentum theory is used in Rayleigh – Gans – Debye (RGD) approximation to derive expansion coefficients of the scattering phase function in Legendre polynomials for a single spherical particle and polydisperse spherical and randomly oriented spheroidal particles. Numerical results are presented and compared with the results of the T-matrix method.