«Оптика атмосферы и океана», **11**, № 6 (1998)

УДК 551.510.42

А.В. Аргучинцева

О ВЕРОЯТНОСТНОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛЯМ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО РАЙОНИРОВАНИЯ И РАЦИОНАЛЬНОГО ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ

Рассматривается более общий подход к стохастическому моделированию распределения загрязняющих веществ. Основа модели базируется на прямом (втором) уравнении Колмогорова для переходных вероятностей, записанном в фазовых координатах. Последовательные замыкания этого уравнения дают возможность для концентрации загрязняющих веществ построить законы распределения в виде функции плотностей вероятностей.

Любые явления (например, метеорологические, гидрологические) в процессе развития во времени включают в себя регулярную и случайную составляющие. Случайная составляющая выступает как помеха, влияние которой на результаты хозяйственной деятельности необходимо минимизировать [1]. А для этого необходима информация не только о величине этих помех, но и о вероятности их реализации. Трудности решения названной проблемы часто связаны с полным отсутствием данных измерений, их неполнотой или нерепрезентативностью. Поэтому при прогнозе возможных последствий хозяйственной деятельности весьма эффективным является математическое моделирование, позволяющее проигрывать самые разнообразные ситуации.

Трудности, связанные с неэргодичностью природных явлений (неоднородностью процессов во времени), можно преодолеть путем усреднения не по времени, а по реализациям, в качестве которых, например, могут быть взяты многолетние значения гидрометеовеличин, относящиеся к стандартным срокам наблюдений. Поскольку реализации принадлежат разным годам, то их с достаточным основанием можно считать статистически независимыми. Необходимо отметить, что наблюдения на гидрометеопостах представляют собой дискретное множество состояний природной системы. В каждый момент времени система находится в одном из этих состояний и с течением времени переходит из одного состояния в другое. Последовательность таких случайных состояний можно рассматривать как марковский процесс без последействия (цепь Маркова).

Плотность вероятности перехода для цепи Маркова удовлетворяет интегральному уравнению Смолуховского [2, 3], решение которого при определенных предположениях относительно вероятностей перехода приводит к решению второго (прямого) уравнения Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial [A(t, x)p]}{\partial x} = \frac{\partial^2 [B(t, x)p]}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где $p = p(t_0, x_0; t, x)$ – плотность вероятности перехода системы из состояния x_0 в состояние x за время от t_0 до t. Естественно, что по всей области изменения ω

$$\int_{\omega} p(t_0, x_0; t, x)\, dx = 1, \text{ где } p \geq 0.$$

В одномерном случае, когда состояние системы определено одним параметром x, коэффициент $A(t, x)$ представляет собой среднюю скорость систематического изменения координаты x; коэффициент $B(t, x)$ – интенсивность случайных колебаний около этой средней.

В данной статье построение вероятностных моделей экологического районирования рассмотрим на примере распространения субстанций в газовых и жидких средах.

Перейдем в уравнении (1) к фазовой координате s, где s – концентрация загрязняющей примеси:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial s}[A(t, s)p] + \frac{\partial^2}{\partial s^2}[B(t, s)p], \qquad (2)$$

где $p = p(t, s)$; $A = \dfrac{\partial \overline{s}}{\partial t}$ – скорость изменения средней концентрации в интервале $t \in [0, T]$;

$$B = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial \overline{s}}{\partial t}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial s'}{\partial t}\right)^2}.$$

Здесь черта сверху означает усреднение, штрих – отклонение мгновенных величин от средних.

Рассмотрим возможность замыкания уравнения (2). Для этого запишем уравнение переноса и турбулентной диффузии загрязняющей субстанции s в дивергентном виде:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u_j s}{\partial x_j} + \alpha s = Q + \nu_{jk}\frac{\partial^2 s}{\partial x_j \partial x_k}, \qquad (3)$$

где $j, k = \overline{1, 3}$ – номер координаты; t – время; u_j – компонента скорости по соответствующей координате x_j; α – коэффициент неконсервативности примеси; $Q = Q(x_j, t)$ – функция, описывающая источники рассматриваемой субстанции; ν_{jk} – коэффициенты турбулентной диффузии. Уравнение (3) записано в тензорной форме, поэтому суммирование производится по повторяющимся индексам.

Усредним уравнение (3), используя соотношения $u_j = \overline{u_j} + u_j'$; $s = \overline{s} + s'$; $Q = \overline{Q} + Q'$ и свойства усреднения.

Пусть для простоты $\alpha = \text{const}$,

$$\frac{\partial \overline{s}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_j \overline{s}}{\partial x_j} + \alpha \overline{s} = \overline{Q} + \nu_{jk} \frac{\partial^2 \overline{s}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial \overline{u_j' s'}}{\partial x_j}. \quad (4)$$

Вычитая из (3) уравнение (4), имеем

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j s - \overline{u}_j s)) + \alpha s' = Q' + \nu_{jk} \frac{\partial^2 s'}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_j' s'}}{\partial x_j}. \quad (5)$$

Преобразуем выражение

$$u_j s - \overline{u}_j \overline{s} = (\overline{u}_j + u_j')(\overline{s} + s') - \overline{u}_j \overline{s} = u_j s' + \overline{s}\, u_j'$$

и подставим в (5):

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = -u_j \frac{\partial s'}{\partial x_j} - u_j' \frac{\partial \overline{s}}{\partial x_j} - \left(s' \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \overline{s} \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right) - \alpha s' + Q' +$$

$$+ \nu_{jk} \frac{\partial^2 s'}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_j' s'}}{\partial x_j}. \quad (6)$$

В (6) каждое из слагаемых в круглой скобке представляет собой дивергенцию соответственно для скорости и ее флуктуации. Для несжимаемой жидкости эти слагаемые обращаются в нуль.

Следуя работам [4, 5], в линейном приближении влиянием примеси на поле скорости среды можно пренебречь, т.е. считать турбулентное поле скорости среды независимым от концентрации примеси. Введем обозначение

$$q_i = \overline{u_i' s'}. \quad (7)$$

Здесь s' – неизвестная величина, $i = \overline{1, 3}$.

Проведем усреднение по времени $T \gg \tau$ (τ – эйлеров масштаб). Исправляя замеченные неточности в [4, 5], проинтегрируем (6) по времени от t до $t + \tau$:

$$s'(t+\tau) = s'(t) + \int_t^{t+\tau} \left[-u_j \frac{\partial s'}{\partial x_j} - u_j' \frac{\partial \overline{s}}{\partial x_j} - \alpha s' + Q' + \right.$$

$$\left. + \nu_{jk} \frac{\partial^2 s'}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_j' s'}}{\partial x_j} \right] dt.$$

Для выполнения (7) умножим обе части последнего уравнения на $u_i'(t+\tau)$ и проведем операцию усреднения на интервале $T - \tau$:

$$q_i = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau)\, s'(t+\tau)\, dt = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau)\, s'(t)\, dt -$$

$$- \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau) \int_t^{t+\tau} u_j(t_1) \frac{\partial s'}{\partial x_j} dt_1\, dt - \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau) \times$$

$$\times \int_t^{t+\tau} u_j'(t_1) \frac{\partial \overline{s}}{\partial x_j} dt_1\, dt - \frac{\alpha}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau) \int_t^{t+\tau} s' dt_1\, dt +$$

$$+ \frac{\nu_{jk}}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau) \int_t^{t+\tau} \frac{\partial^2 s'}{\partial x_j \partial x_k} dt_1\, dt + \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau) \times$$

$$\times \int_t^{t+\tau} Q' dt_1\, dt + \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau) \int_t^{t+\tau} \frac{\partial \overline{u_j' s'}}{\partial x_j} dt_1\, dt. \quad (8)$$

В уравнении (8) первое слагаемое в правой части обращается в нуль из-за некоррелированности подынтегральных функций $u_i'(t+\tau)$ и $s'(t)$, последнее слагаемое обращается в нуль из-за $T \gg \tau$.

Из (8) согласно [4, 5] получим первое приближение для (7):

$$\overline{u_i' s'^{(1)}} = -K_{ij}^{(1)} \frac{\partial \overline{s}}{\partial x_j} + Q_i'^{(1)}, \quad (9)$$

где

$$K_{ij}^{(1)} = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau) \int_t^{t+\tau} u_j'(t_1) \frac{\partial \overline{s}}{\partial x_j} dt_1\, dt;$$

$$Q_i^{(1)} = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u_i'(t+\tau) \int_t^{t+\tau} Q' dt_1\, dt.$$

Подставляя (9) в (4), мы замыкаем уравнение для $\overline{S}$:

$$\frac{\partial \overline{s}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u}_j \overline{s}}{\partial x_j} - \alpha \overline{s} + \overline{Q} + \nu_{jk} \frac{\partial^2 \overline{s}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} K_{ij}^{(1)} \frac{\partial \overline{s}}{\partial x_j} - Q_i'^{(1)}, \quad (10)$$

левая часть которого обозначена коэффициентом A в уравнении (2).

Начальные условия для (10): $\overline{s} = s_0$ при $t = 0$. Граничные условия на горизонтальных границах области интегрирования $D\{-X \le x \le X,\ -Y \le y \le Y\}$ и на верхней границе при $z = Z$ ставятся следующим образом. В тех точках границ, где вектор скорости направлен внутрь области определения решения, $\overline{s} = s_{\Phi}$. Там, где вектор скорости направлен вне этой области, значения концентраций экстраполируются на границу по приграничным значениям со вторым порядком аппроксимации. На нижней границе при $z = \Delta$ ставится граничное условие третьего рода, учитывающее поглощение и отражение примеси. Здесь s_0 и s_{Φ} – заданные значения. Уравнение (10) решается численным интегрированием в декартовой прямоугольной системе координат с применением метода фиктивных областей [6]. Конечно-разностные аппроксимации производных по пространственным переменным построены на основе интегроинтерполяционного метода [6]. Аппроксимация задачи по времени построена с помощью двуциклического полного расщепления. Используемая схема покомпонентного расщепления дает решение для некоммутативных операторов со вторым порядком аппроксимации по времени и координатам. Для численной реализации конечно-разностных уравнений использована немонотонная прогонка.

Решение уравнения (10) представляет и самостоятельный интерес, так как позволяет рассчитать как поле средних концентраций, так и накопление примеси на подстилающей поверхности.

Для определения коэффициента B уравнения (2) воспользуемся уравнением (6), подставляя в него формулу рекурсивного вложения (9). После этого необходимо уравнение (6) возвести в квадрат и усреднить. Определив коэффициенты A и B, уравнение (2) проинтегрируем тем же численным методом, что и (10). Полученное решение позволяет полностью с вероятностной точки зрения описать поведение концентрации примеси.

Изложенные идеи были реализованы в различных частных задачах автора [7].

Вместо концентрации s можно рассматривать и другие характеристики среды, например температуру, влажность. В общем случае в уравнении Колмогорова функция плотности вероятности может рассматриваться как функция многих переменных.

1. *Аргучинцев В.К., Аргучинцева А.В., Галкин Л.М.* // Картография и экология Сибири. Иркутск: ИГ РАН, 1989. С. 111–119.
2. *Колмогоров А.Н.* // УМН. 1938. Вып. 5. С. 5–41.
3. *Леонтович М.А.* Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983. 416 с.
4. *Галкин Л.М.* // Самоочищение и диффузия внутренних водоемов. Новосибирск: Наука, 1980. С. 27–31.
5. *Галкин Л.М., Корнейчук А.И.* // Динамика эколого-экономических систем. Новосибирск: Наука, 1981. С. 18–31.
6. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 534 с.
7. *Аргучинцева А.В.* // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 8. С. 1101–1105; 1996. Т. 9. № 6. С. 800–803; 1997. Т. 10. № 6. С. 605–609.

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию
4 февраля 1998 г.

A.V. Arguchintseva. **On a Probabilistic Approach to Models of Ecological Regionalization and Rational Nature Management.**

A more general approach to stochastic simulation of pollutants distribution is discussed. The model is based on the second Kolmogorov equation for transitional probabilities. The model provides a way for constructing of functions of the probability density for pollutants concentration.