«Оптика атмосферы и океана», **15**, № 2 (2002)

УДК 535.36

А.Б. Гаврилович

Новый способ учета рефракции в уравнении переноса излучения для сферической модели атмосферы

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, г. Минск

Поступила в редакцию 24.04.2001 г.

Предложен новый способ учета рефракции в уравнении переноса излучения в атмосфере, основанный на деформировании системы сферических координат соответственно пространственному распределению показателя преломления света. Показано, что в деформированной таким образом системе координат дифференциальный оператор уравнения переноса при учете рефракции принимает более простую форму, не содержащую рефракционных членов и соответствующую прямолинейному распространению света.

Полученный результат упрощает формулировку задач теории переноса излучения в сферической атмосфере при учете рефракции.

Введение

Для исследования рассеянного солнечного излучения в атмосферной оптике обычно принимается модель планетной атмосферы в виде плоского слоя, освещенного потоком параллельных лучей и ограниченного снизу отражающей свет поверхностью. Однако во многих задачах в реальных условиях возникает необходимость рассматривать рассеяние света в атмосфере с учетом ее сферичности и эффекта искривления световых лучей вследствие рефракции. При строгом учете рефракции в сферической атмосфере вычисления могут значительно отличаться от полученных при условии прямолинейного распространения света [1].

В основе теории рефракции [2] лежит дифференциальное уравнение рефракции, описывающее изменение направления луча при распространении в среде с переменным показателем преломления. Учет его при изучении рассеяния света в сферической атмосфере [1] приводит к изменениям уравнения переноса излучения (УПИ), осложняющим его решение. Поэтому возникает естественный вопрос о возможности сведения УПИ к более простой форме, соответствующей прямолинейному ходу лучей. В данной статье на этот вопрос дан утвердительный ответ и приведено обоснование такой возможности.

Анализ структуры УПИ при учете рефракции в сферической атмосфере

В сферической системе координат с осью $0Z$ в направлении локального зенита при учете рефракции уравнение переноса излучения выражается в виде [1]:

$$\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{I}{n^2}\right)+\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{I}{n^2}\right)-$$

$$-\frac{\sin\vartheta}{r}\left(1-\frac{r}{r_c}\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{I}{n^2}\right)-\frac{\sin\vartheta\sin\varphi\ \mathrm{ctg}\psi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{I}{n^2}\right)=$$

$$=\varepsilon\left(\frac{B}{n^2}-\frac{I}{n^2}\right). \qquad (1)$$

Оно отличается от соответствующего уравнения в предположении о прямолинейном распространении света [3] рефракционным множителем $(1 - r/r_c)$, функцией B/n^2 и функцией I/n^2, выражающей изменение интенсивности I вдоль луча в среде с переменным показателем преломления $n = n(\mathbf{r})$. Величина I/n^2 вытекает из закона сохранения потока для светового луча как лучевой трубки [4]. В однородной среде, при $n = \mathrm{const}$, инвариант I/n^2 переходит в I. При солнечном освещении в условиях осевой симметрии интенсивность $I(r, \psi, \vartheta, \varphi)$ является функцией координат точки $\mathbf{r}(r, \psi)$ и направления $\mathbf{s}(\vartheta, \varphi)$, где r и ψ – соответственно радиус и полярный угол, определяющие пространственное положение точки; ϑ и φ – полярный и азимутальный углы вектора направления луча. В формуле (1) B – функция источников; ε – показатель ослабления света в среде; рефракционная кривизна луча $1/r_c$ (r_c – радиус кривизны) выражается логарифмической производной по r от вертикального профиля показателя преломления:

$$\frac{1}{r_c}=-\frac{\partial}{\partial r}\ln n\ . \qquad (2)$$

Отклонение множителя $(1 - r/r_c)$ от единицы характеризует эффект рефракции. В приземном слое атмосферы рефракционный эффект выражен заметно, $(1 - r/r_c) = 0{,}77$ [1].

Получим выражение дифференциального оператора УПИ (1), проведем анализ его внутренней структуры и выясним, какими непосредственно параметрами определяется каждая из его компонент.

Дифференциальный оператор УПИ, как известно, записывается в бескоординатной форме в виде скалярного произведения $(\mathbf{s}, \nabla I)$ вектора направления луча и градиента интенсивности. Для задания положения точки $P(\mathbf{r})$ в сферической атмосфере используется сферическая система координат (r, ψ, ϕ) с началом в центре планеты, где ϕ – азимутальный угол. Сферическая система координат рассматривается как частный случай криволинейной координатной системы $\{u_k, k = 1, 2, 3\}$: $u_1 = r$, $u_2 = \psi$, $u_3 = \phi$. Вектор направления $\mathbf{s}$ задается сферическими координатами $(\rho, \vartheta, \varphi)$. На первом этапе преобразований будем принимать, что длина вектора $\rho \neq 1$.

Градиент ∇I поля интенсивности $I = I(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = I(r, \psi, \phi, \vartheta, \varphi, \rho)$ в (обобщенном) шестимерном фазовом объеме записывается в виде [5]:

$$\nabla I = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\left(\frac{\partial I}{\partial u_k} + \frac{\partial I}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial u_k} + \frac{\partial I}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \frac{\partial I}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial u_k}\right), \tag{3}$$

где H_k – коэффициенты Ламе, определяющие кривизну координатных линий u_k; $\mathbf{e}_k$ – базис ортогональных единичных векторов. Коэффициенты Ламе для сферической системы координат равны [6]:

$$H_r = 1,\ H_\psi = r,\ H_\phi = r\sin\psi. \tag{4}$$

Особенность сферической координатной системы, осложняющей расчеты, состоит в том, что, в отличие от декартовой, ориентация базиса ее единичных векторов $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_\phi\}$ зависит от положения точки P в пространстве. Покажем, что в каждой точке P переход $\{\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z\} \to \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_\phi\}$ от базиса единичных векторов декартовой системы координат к базису, соответствующему сферическим координатам с локальным зенитом, осуществляется в результате преобразования $\hat{A} = \hat{M}\,\hat{G}$. Матрица $\hat{M}$ выражается через коэффициенты Ламе H_r, H_ψ, H_ϕ и частные производные от декартовых координат $X = r\sin\psi\cos\phi$, $Y = r\sin\psi\sin\phi$, $Z = r\cos\psi$ в виде

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_r}\frac{\partial X}{\partial r} & \frac{1}{H_r}\frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{1}{H_r}\frac{\partial Z}{\partial r} \\ \frac{1}{H_\psi}\frac{\partial X}{\partial \psi} & \frac{1}{H_\psi}\frac{\partial Y}{\partial \psi} & \frac{1}{H_\psi}\frac{\partial Z}{\partial \psi} \\ \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial X}{\partial \phi} & \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial Y}{\partial \phi} & \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial Z}{\partial \phi} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\phi & \cos\psi \\ \cos\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\phi & -\sin\psi \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Матрица $\hat{G}$ описывает ортогональное преобразование $\hat{G}(\phi, \psi) = \hat{T}_Z(\phi)\,\hat{T}_Y(\psi)$, соответствующее вращениям вокруг осей $0Z$ и $0Y$ на углы ϕ и ψ [7]:

$$\hat{G}(\phi, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi & -\sin\phi & \sin\psi\cos\phi \\ \cos\psi\sin\phi & \cos\phi & \sin\psi\sin\phi \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}. \tag{6}$$

В результате непосредственного вычисления получим ортогональную матрицу

$$\hat{A} = \hat{M}\,\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

позволяющую найти координаты a_k вектора направления $\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{e}_k$ в базисе $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_\phi\}$ сферических координат. Действительно, сферические координаты a_k линейно связаны с декартовыми координатами $x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\vartheta\cos\varphi$, $z = \rho\cos\vartheta$ через матрицу преобразования $\hat{A}$ (7):

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ \rho\cos\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \rho\sin\vartheta\sin\varphi \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Умножив скалярно вектор $\mathbf{s}$ (8) на вектор ∇I (3), найдем выражение дифференциального оператора УПИ в криволинейных координатах:

$$(\mathbf{s}, \nabla I) = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{1}{H_k}\frac{\partial I}{\partial u_k} + \left(\sum_{k=1}^{3} a_k \frac{1}{H_k}\frac{\partial \vartheta}{\partial u_k}\right)\frac{\partial I}{\partial \vartheta} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{3} a_k \frac{1}{H_k}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\right)\frac{\partial I}{\partial \varphi} + \left(\sum_{k=1}^{3} a_k \frac{1}{H_k}\frac{\partial \rho}{\partial u_k}\right)\frac{\partial I}{\partial \rho}. \tag{9}$$

Формула (9) содержит неизвестные частные производные $\frac{\partial \vartheta}{\partial u_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}, \frac{\partial \rho}{\partial u_k}$ вектора направления по криволинейным координатам.

Проведем анализ структуры полей, образованных частными производными. Для их нахождения воспользуемся результатами [5]. Учтем, что в криволинейных координатах оператор дифференцирования действует не только на компоненты a_i вектора, но и на орты $\mathbf{e}_i$. Именно:

$$\mathbf{\Pi}_k = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial a_i}{\partial u_k}\mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u_k}a_i\right), \quad i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Подстановка в (10) известного выражения [5]:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u_k} = (1 - \delta_{ik})\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}\mathbf{e}_k -$$

$$- \delta_{ik}\sum_{s=1}^{3}(1 - \delta_{sk})\frac{1}{H_s}\frac{\partial H_k}{\partial u_s}\mathbf{e}_s, \quad i = 1, 2, 3, \tag{11}$$

и вычисление скалярных произведений $(\mathbf{\Pi}_k, \mathbf{e}_j)$, $j = 1, 2, 3$, с учетом ортонормированности базиса $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера, приводят к формуле

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u_k} = \hat{Q}_k\,\mathbf{a} + \mathbf{f}_k = \hat{Q}_k\,\hat{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{f}_k. \qquad (12)$$

Здесь обозначено: $\hat{Q}_k$ – кососимметричные матрицы; $\mathbf{a} = \hat{A}\,\mathbf{x}$; $\mathbf{a} = (a_r, a_\psi, a_\phi)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{f}_k = (\mathbf{\Pi}_k\mathbf{e}_1, \mathbf{\Pi}_k\mathbf{e}_2, \mathbf{\Pi}_k\mathbf{e}_3)^{\mathrm{T}}$ – алгебраические векторы, Т – символ транспонирования.

Вводя обозначения

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \rho} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} \equiv \mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial r} & \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \psi} & \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \psi} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial r} & \dfrac{\partial \rho}{\partial \psi} & \dfrac{\partial \rho}{\partial \phi} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3\ , \qquad (13)$$

удовлетворяющие очевидному равенству

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} = \hat{C}\,\mathbf{b}_k, \qquad (14)$$

при учете (14) из (8) получим

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u_k} = \hat{A}\,\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} = \hat{A}\,\hat{C}\,\mathbf{b}_k. \qquad (15)$$

Приравняв правые части (12) и (15) и умножив полученное равенство сначала на $\hat{A}^{-1}$, а затем на $\hat{C}^{-1}$, найдем выражение для вычисления искомых частных производных b_{ik}:

$$\mathbf{b}_k = \hat{C}^{-1}\,\hat{W}_k\,\mathbf{x} + \mathbf{F}_k. \qquad (16)$$

Здесь введены обозначения:

$$\hat{W}_k = \hat{A}^{-1}\,\hat{Q}_k\,\hat{A}; \quad \mathbf{F}_k = \hat{C}^{-1}\,\hat{A}^{-1}\,\mathbf{f}_k. \qquad (17)$$

Матрицы $\hat{C}^{-1}$, $\hat{W}_k$, $k \in \{r, \psi, \phi\}$ вычисляются по формулам:

$$\hat{C}^{-1} = \frac{[A_{ik}]^{\mathrm{T}}}{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\rho}\cos\vartheta\cos\varphi & \dfrac{1}{\rho}\cos\vartheta\sin\varphi & -\dfrac{1}{\rho}\sin\vartheta \\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} & 0 \\ \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \end{bmatrix}; \qquad (18)$$

$$\hat{W}_r = 0,$$

$$\hat{W}_\psi = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{H_\phi}\dfrac{\partial H_\psi}{\partial \phi} & -\dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_\psi}{\partial r} \\ \dfrac{1}{H_\phi}\dfrac{\partial H_\psi}{\partial \phi} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_\psi}{\partial r} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

$$\hat{W}_\phi = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{H_\psi}\dfrac{\partial H_\phi}{\partial \psi} & 0 \\ -\dfrac{1}{H_\psi}\dfrac{\partial H_\phi}{\partial \psi} & 0 & -\dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_\phi}{\partial r} \\ 0 & \dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_\phi}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi & 0 \\ -\cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & 0 \end{bmatrix}, \qquad (20)$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента c_{ik}; $D = \rho^2\sin\vartheta$ – определитель матрицы $\hat{C}$. Подстановка (18) – (20) в (16) дает явные выражения элементов b_{ik} матрицы $\hat{B}$:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi \\ 0 & \mathrm{ctg}\vartheta\sin\varphi & -\cos\psi - \mathrm{ctg}\vartheta\cos\varphi\sin\psi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

При выводе (21) рефракция не учитывалась, так как полагалось, что в (16) вектор $\mathbf{F}_k = 0$. Кроме того, было принято, что $\rho = 1$.

Подставляя значения (4), (8) и (21) в (9), раскроем его внутреннюю структуру и вычислим явные выражения слагаемых дифференциального оператора УПИ в сферических координатах:

$$(\mathbf{s}, \nabla I)\big|_r = a_r\,\frac{1}{H_r}\frac{\partial I}{\partial r} = \cos\vartheta\,\frac{\partial I}{\partial r}, \qquad (22)$$

$$(\mathbf{s}, \nabla I)\big|_\psi = a_\psi\,\frac{1}{H_\psi}\frac{\partial I}{\partial \psi} = \frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{r}\frac{\partial I}{\partial \psi}, \qquad (23)$$

$$(\mathbf{s}, \nabla I)\big|_\phi = a_\phi\,\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial I}{\partial \phi} = \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{r\sin\psi}\frac{\partial I}{\partial \phi}, \qquad (24)$$

$$(\mathbf{s}, \nabla I)\big|_\vartheta = \left(a_r\,\frac{1}{H_r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + a_\psi\,\frac{1}{H_\psi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} + a_\phi\,\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \phi}\right)\times$$
$$\times\frac{\partial I}{\partial \vartheta} = -\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial I}{\partial \vartheta}, \qquad (25)$$

$$(\mathbf{s}, \nabla I)\big|_\varphi = \left(a_r\,\frac{1}{H_r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + a_\psi\,\frac{1}{H_\psi}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + a_\phi\,\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\right)\times$$
$$\times\frac{\partial I}{\partial \varphi} = -\frac{\sin\vartheta\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\psi}{r}\frac{\partial I}{\partial \varphi}, \qquad (26)$$

$$(\mathbf{s}, \nabla I)\big|_\rho = \left(a_r\,\frac{1}{H_r}\frac{\partial \rho}{\partial r} + a_\psi\,\frac{1}{H_\psi}\frac{\partial \rho}{\partial \psi} + a_\phi\,\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial \rho}{\partial \phi}\right)\frac{\partial I}{\partial \rho} = 0. \qquad (27)$$

Итак, сумма отличных от нуля компонент (22) – (26) дает выражение дифференциального оператора УПИ для пятимерного фазового объема:

$$(\mathbf{s}, \nabla I) = \sum_{n=1}^{5} (\mathbf{s}, \nabla I)\big|_n, \quad n \in \{r, \psi, \phi, \vartheta, \varphi\}. \qquad (28)$$

В условиях осевой симметрии при солнечном освещении, когда $\frac{\partial I}{\partial \phi} = 0$, в формуле (28) слагаемое $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\phi} = 0$. В случае центральной симметрии $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\psi} = 0$, $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\phi} = 0$, $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\varphi} = 0$. Для плоской модели атмосферы, когда $r = \infty$, элементы $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\psi} = 0$, $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\phi} = 0$, $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\vartheta} = 0$, $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\varphi} = 0$, а дифференциальный оператор содержит только один член $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{r} \neq 0$.

Видим, что слагаемое $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\vartheta}$ (25) определяется элементами $b_{12} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi}$ и $b_{13} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi}$ матрицы $\hat{B}$ (21), а слагаемое $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\varphi}$ (26), соответственно, элементами $b_{22} = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}$ и $b_{23} = \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$. Очевидно, что эти отличные от нуля элементы матрицы $\hat{B}$ выражают геометрические свойства используемой сферической системы координат.

Рассмотрим, к каким изменением элементов b_{ik} матрицы $\hat{B}$ приведет отказ от условия $\mathbf{F}_k = 0$ прямолинейного распространения света в формуле (16). В реальных условиях при учете атмосферной рефракции вектор $\mathbf{F}_k \neq 0$. Прямые вычисления компонент алгебраического вектора

$$\mathbf{F}_k = \hat{C}^{-1}\, \hat{A}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u_k}, \mathbf{e}_j\right), \quad j = 1, 2, 3, \qquad (29)$$

в предположении сферически-симметричного распределения показателя преломления света в пространстве и подстановка полученных значений в (16) приводят к отличному от нуля дополнительному элементу матрицы $\hat{B}$

$$b_{11} = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = -\operatorname{tg} \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \ln n = \operatorname{tg} \vartheta \frac{1}{r_c}, \qquad (30)$$

содержащему параметр $\frac{1}{r_c}$ рефракционной кривизны светового луча. Нетрудно убедиться в том, что слагаемое $(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\vartheta}$ (25) при подстановке (30) приобретает вид

$$(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\vartheta} = -\frac{\sin\vartheta}{r}\left(1 - \frac{r}{r_c}\right)\frac{\partial I}{\partial \vartheta}, \qquad (31)$$

соответствующий компоненте УПИ (1), ответственной за рефракцию. Таким образом, в результате проведенного анализа видим, что элемент b_{11} матрицы $\hat{B}$ непосредственно отражает учет рефракции света как физического эффекта. Этот вывод является существенным для дальнейшего рассмотрения.

Новый способ учета рефракции в УПИ

При обосновании нового способа учета рефракции будем оставаться в рамках условия $b_{11} = 0$, определяющего прямолинейную траекторию лучей. Покажем, что учет рефракции при этом можно достичь путем некоторого изменения элементов b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23}, определяющих геометрические свойства используемой координатной системы, образно говоря, путем ее деформации. С этой целью в каждой точке P пространства изменим кривизну координатных линий соответственно значениям показателя преломления света. Кроме геометрического радиуса r ниже будем использовать также понятие оптического радиуса $r^{o} = nr$ (индекс «о» – оптический). Коэффициенты Ламе, выражающие кривизну новых координатных линий, представим в виде

$$H_r^{o} = n, \quad H_{\psi}^{o} = nr, \quad H_{\phi}^{o} = nr \sin\psi. \qquad (32)$$

При учете (32) ненулевые кососимметричные матрицы $\hat{W}_{\psi}^{o}$ и $\hat{W}_{\phi}^{o}$, определяющие значения новых элементов b_{ik}^{o} (16), принимают вид:

$$\hat{W}_{\psi}^{o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\left(1-\frac{r}{r_c}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(1-\frac{r}{r_c}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{W}_{\phi}^{o} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi & 0 \\ -\cos\psi & 0 & -\sin\psi\left(1-\frac{r}{r_c}\right) \\ 0 & \sin\psi\left(1-\frac{r}{r_c}\right) & 0 \end{bmatrix}, \qquad (33)$$

отличающийся от (19), (20) множителями $\left(1 - \frac{r}{r_c}\right)$. При последующих математических вычислениях согласно (16) эти множители переходят в выражения для элементов матрицы $\hat{B}^{o}$:

$$\hat{B}^{o} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\varphi\left(1-\frac{r}{r_c}\right) & -\sin\varphi\sin\psi\left(1-\frac{r}{r_c}\right) \\ 0 & \operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\left(1-\frac{r}{r_c}\right) & -\cos\psi - \operatorname{ctg}\vartheta\cos\varphi\sin\psi\left(1-\frac{r}{r_c}\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (34)$$

Из (34) видим, что рефракционные множители оказываются скрытыми в элементах b_{ik}^{o}, характеризующих именно геометрические свойства новой деформированной системы координат. Подставим элементы матрицы (34) в (25) и (26)

$$(\mathbf{s}, \nabla I)|_{\vartheta}^{o} = \left[0 - \sin\vartheta\cos^2\varphi\frac{1}{r}\left(1-\frac{r}{r_c}\right) - \sin\vartheta\sin^2\varphi\frac{1}{r}\left(1-\frac{r}{r_c}\right)\right]\frac{\partial I}{\partial \vartheta} =$$

$$= -\frac{\sin\vartheta}{r}\left(1-\frac{r}{r_c}\right)\frac{\partial I}{\partial\vartheta}, \quad (35)$$

$$(\mathbf{s},\nabla I)\,|_{\varphi}^{o} = \left[0+\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\frac{1}{r}\left(1-\frac{r}{r_c}\right)-\right.$$

$$\left.-\sin\vartheta\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\psi\frac{1}{r}-\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\frac{1}{r}\left(1-\frac{r}{r_c}\right)\right]\frac{\partial I}{\partial\varphi}=$$

$$= -\frac{\sin\vartheta\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\psi}{r}\frac{\partial I}{\partial\varphi} \quad (36)$$

и непосредственным вычислением убедимся, что выражения (35) и (36), полученные в деформированных сферических координатах при условии прямолинейного распространения света, совпадают с соответствующими компонентами дифференциального оператора УПИ (1), учитывающими искривление лучей вследствие рефракции. Заменой функции I в сферической системе координат $\{r, \psi, \vartheta, \varphi\}$ на функцию $I^{o} = I/n^2$ в деформированной системе координат $\{r^{o}, \psi, \vartheta, \varphi\}$ с коэффициентами Ламе (32) осуществляется преобразование УПИ (1) к форме [3]:

$$\cos\vartheta\frac{\partial I^{o}}{\partial r^{o}}+\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{r^{o}}\frac{\partial I^{0}}{\partial\psi}-\frac{\sin\vartheta}{r^{o}}\frac{\partial I^{o}}{\partial\vartheta}-$$
$$-\frac{\sin\vartheta\sin\varphi\, ctg\psi}{r^{o}}\frac{\partial I^{o}}{\partial\varphi}=\varepsilon\left(B^{o}-I^{o}\right), \quad (37)$$

свободной от рефракции. Уравнение переноса излучения в сферических координатах при учете рефракции (1) эквивалентно уравнению переноса в деформированной системе координат (37), явно не содержащему рефракционных членов.

Заключение

В работе дан вывод выражения дифференциального оператора уравнения переноса излучения в сферических координатах с локальным зенитом для пятимерного фазового объема сферической модели атмосферы при учете рефракции, который позволяет выявить внутреннюю структуру слагаемых УПИ с позиций теории поля в криволинейных координатах.

В результате векторного анализа поля направлений луча в среде с переменным показателем преломления показано, какими именно элементами матрицы частных производных определяются, с одной стороны, геометрические характеристики используемой координатной системы, а с другой, − параметры реальной рефракционной кривизны светового луча.

Дано обоснование нового способа учета рефракции в уравнении переноса излучения для сферической модели атмосферы, основанного на деформировании координатной системы в каждой точке соответственно пространственному распределению показателя преломления света в среде. Показано, что в деформированной таким образом системе координат дифференциальный оператор УПИ при учете рефракции сохраняет значение, характерное для системы обычных сферических координат, но принимает более простую форму, явно не содержащую рефракционных членов и соответствующую прямолинейной траектории световых лучей.

Из полученных результатов следует, что при постановке задач теории переноса излучения в сферической атмосфере с учетом рефракции отпадает необходимость формально описывать реальную рефракционную кривизну световых лучей, поскольку она может быть учтена в УПИ посредством соответствующей деформации системы координат.

1. *Минин И.Н.* Теория переноса излучения в атмосферах планет. М.: Наука, 1988. 264 с.
2. *Яценко А.Ю.* Теория рефракции. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. 130 с.
3. *Смоктий О.И.* Моделирование полей излучения в задачах космической спектрофотометрии. Л.: Наука, 1988. 352 с.
4. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1 / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 280 с.
5. *Смелов В.В.* Лекции по теории переноса нейтронов. 2-е изд. М.: Атомиздат, 1978. 216 с.
6. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. 9-е изд. М.: Наука, 1965. 426 с.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 831 с.

A.B. Gavrilovich. **New method of accounting for the refraction in the radiative transfer equation for spherical model of the atmosphere.**

A new method of treating the refraction in the radiative transfer equation for the atmosphere, which is based on deformation of the spherical coordinate system in accordance with the spatial distribution of the light refractive index, is suggested. It is shown that in the deformed coordinate system the differential operator of the transfer equation, accounting for the refraction, takes a more simple form corresponding to the rectilinear propagation of light and does not contain refraction members.

The obtained result simplifies the formulation of problems of the radiative transfer theory in the refractive spherical atmosphere.