

ОПТИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 520.1:535.31; 532.5; 551.5; 551.55

Доказательство гипотезы Хопфа о структуре турбулентности (памяти Татарского)

В.В. Носов^{✉1}, В.П. Лукин¹, П.Г. Коваadlo², Е.В. Носов¹, А.В. Торгаев^{1*}

¹Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

²Институт солнечно-земной физики СО РАН
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 126а

Поступила в редакцию 22.09.2022 г.;

после доработки 17.10.2022 г.;

принята к печати 6.12.2022 г.

Статья посвящена памяти Валерьяна Ильича Татарского (1929–2020 гг.), однако не является персональной. Приведен краткий обзор научных работ авторов, посвященных решению одной из проблем теории турбулентности – доказательству гипотезы Э. Хопфа (1948 г.) о структуре турбулентности как пространственно-временного хаоса конечного числа взаимодействующих когерентных структур. Именно теория турбулентности является тем направлением, которое авторы выбрали под научным влиянием Валерьяна Ильича.

Ключевые слова: Хопф, Татарский, хаос, турбулентность, когерентные структуры; Hopf, Tatarsky, chaos, turbulence, coherent structures.

Введение

Настоящая работа – дань памяти Валерьяна Ильича Татарского (1929–2020 гг.), однако не является персональной. В статье дан краткий обзор наших научных работ, посвященных решению одной из проблем теории турбулентности – доказательству гипотезы Э. Хопфа (1948 г.) о структуре турбулентности как пространственно-временном хаосе конечного числа взаимодействующих когерентных структур. Теория турбулентности – то направление исследований, которое авторы выбрали под научным влиянием Валерьяна Ильича.

Валерьян Ильич Татарский внес большой вклад в решение проблемы распространения волн в случайно-неоднородных турбулентных средах и в развитие теории турбулентности. Этот вклад признан многими исследователями, работающими в указанных научных направлениях. Так, часто высказываются предложения рекомендовать опубликованную в 1967 г. монографию В.И. Татарского [1] в качестве хорошего учебного пособия для молодых ученых, только начинающих свои исследования.

Спектр научных интересов В.И. Татарского был достаточно широк. Нам бы хотелось выделить два наиболее значимых его достижения: 1) обоснование

марковского приближения в задачах распространения коротких волн в случайно-неоднородных турбулентных средах (совместно с В.И. Кляцкиным [2]), 2) формулировка ([1], глава 1) теории подобия турбулентности Монина–Обухова [3, 4] в наиболее простом и кратком виде.

Введенное В.И. Татарским в 1970–1973 гг. марковское приближение позволило записать замкнутые уравнения для статистических моментов поля волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде. Решения этих уравнений, полученные в 1970-х и 1980-х гг. различными коллективами исследователей, выявили целый ряд новых закономерностей распространения оптических волн в турбулентной атмосфере. Последующие экспериментальные подтверждения этих закономерностей показали высокую работоспособность и надежность марковского приближения. Поэтому марковское приближение можно рассматривать как большой вклад В.И. Татарского в мировую науку.

Валерьян Ильич также много исследовал (теоретически и экспериментально) различные аспекты теории турбулентности. Об этом свидетельствуют результаты, представленные как в его монографии [1], так и в работах А.С. Монина и А.М. Яглома [3, 4]. Можно сказать, что теория турбулентности вызвала повышенный интерес у В.И. Татарского, так как, занимаясь вопросами распространения волн в турбулентных средах, было логично более подробно изучить свойства самой турбулентности. Тем более что практически любое аналитическое соотношение в теории распространения волн, содержа-

* Виктор Викторович Носов (nosov@iao.ru); Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru); Павел Гаврилович Коваadlo (kovadlo2006@gambler.ru); Евгений Викторович Носов (nev@iao.ru); Андрей Витальевич Торгаев (torgaev@iao.ru).

шее характеристики среды, может служить формулировкой соответствующей обратной задачи (восстановление характеристик среды из регистрируемых параметров распространяющихся волн).

Следуя за В.И. Татарским, таким же путем пришли к теории турбулентности и авторы настоящей статьи. Решая различные задачи распространения оптических волн в турбулентной атмосфере, мы параллельно проводили и проводим исследования свойств самой турбулентности. Эти исследования ведутся уже два десятка лет начиная с 2002 г. [5–14] как экспериментально (с использованием ультразвуковых метеосистем [14]), так и теоретически (численные решения различных краевых задач для уравнений Навье–Стокса [10, 11]). За эти годы нами опубликовано шесть монографий по теории турбулентности. Одним из результатов наших исследований является доказательство гипотезы Э. Хопфа ([15], 1948 г.) о структуре турбулентности. Краткое описание доказательств гипотезы (экспериментальных и теоретических) приведено ниже.

1. Доказательство гипотезы Хопфа о структуре турбулентности

Турбулентность (в разных видах и формах) присутствует и проявляется в большом числе физических процессов. Обычно она выступает в качестве искажающего фактора, существенно влияющего на нормальное протекание того или иного физического процесса. В частности, атмосферная турбулентность значительно искажает амплитуду и фазу распространяющихся электромагнитных и звуковых волн. Поэтому исследования турбулентности актуальны и ведутся уже на протяжении двухсот лет (со времени опубликования уравнений Навье–Стокса, 1822). При этом традиционно (более полувека) турбулентность считается колмогоровской.

Вследствие чрезвычайной сложности индивидуального описания полей скорости, давления, температуры и других характеристик развитых турбулентных течений теория турбулентности обычно является статистической. Поэтому приходится применять методы теории вероятностей и теории случайных процессов (случайных функций). Следовательно, сами поля скорости, давления, температуры необходимо считать случайными.

Теория турбулентности, как известно, исходит из описания течений жидкостей и газов на основе уравнений гидродинамики (уравнений Навье–Стокса). Решения уравнений гидродинамики, конечно, детерминированы, т.е. не являются случайными. На это, по-видимому, впервые указал В.И. Татарский [1, С. 13]: «Слово “случайный” не всегда является вполне удачным, так как, например, “случайное” поле скоростей в теории турбулентности удовлетворяет точным соотношениям — уравнениям гидродинамики. Быть может, лучше было бы говорить о “статистически определенных” функциях».

Таким образом, описание турбулентности статистическими методами обусловлено в первую очередь большой сложностью турбулентных процессов

и часто является вынужденным. С помощью статистики удастся увидеть некоторые закономерности, присущие хаотичным турбулентным процессам. Эти закономерности соответствуют некоторым элементам порядка, наблюдающимся в хаосе турбулентной среды. Главным элементом порядка в хаосе можно считать плотность вероятностей. В общем случае она указывает диапазон значений, в котором будет находиться рассматриваемая случайная величина после множества реализаций (из допустимого ансамбля реализаций). Более простые элементы порядка — значения статистических моментов низших порядков (первого и второго): среднее значение (по ансамблю реализаций), дисперсия (разброс отклонений от среднего), радиус корреляции (радиус области, в которой отклонения от среднего происходят согласованно и в одну сторону). Исследуя такие статистические моменты, можно представить обобщенные характеристики рассматриваемой области (увидеть некоторые элементы порядка), заполненной случайной турбулентной средой. Полное статистическое описание случайных гидродинамических полей дается характеристическим функционалом [3, 4, 16]. Он содержит информацию о бесконечной совокупности моментов полей и удовлетворяет динамическим уравнениям с функциональными (вариационными) производными [16]. Приемлемые методы решения таких уравнений в настоящее время не существуют.

Можно было бы отказаться от применения статистических методов. Тогда для развития теории турбулентности (и описания механизмов ее возникновения и развития) необходимо научиться решать уравнения гидродинамики, что соответствует получению точных решений граничных задач для уравнений Навье–Стокса и теплопроводности. Однако, как показывают результаты, достигнутые в классической теоретической гидродинамике, исследования в этом направлении сталкиваются с растущей сложностью и громоздкостью аналитических выкладок при учете гидродинамической нелинейности. Численные решения уравнений гидродинамики хорошо учитывают нелинейность, но, как показывает опыт, для развитых турбулентных течений физическая интерпретация численных данных затруднена (опять же вследствие большой сложности получаемых решений). Таким образом, даже имея численные решения уравнений гидродинамики, не всегда удается избежать применения статистических методов.

Более плодотворный подход заключается в использовании результатов классической гидродинамики (решений уравнений Навье–Стокса) совместно со статистическими методами. В этом случае при описании турбулентности мы выходим на другие *детерминированные* элементы порядка, наблюдающиеся в хаосе турбулентной среды. Они, в отличие от элементов, задаваемых плотностью вероятностей, являются в общем случае *детерминированными* вихрями в турбулентной среде, *или гидродинамическими трехмерными топологическими солитонами*. Такие вихри часто экспериментально наблюдаются в атмосфере, а также в численных решениях

граничных задач для уравнений Навье–Стокса. Они обладают интересными свойствами и обычно называются когерентными структурами, которые активно и давно (не менее полувека [13]) изучаются мировой наукой. Установлено, что крупномасштабные турбулентные движения детерминированы, т.е. не являются случайными.

В наших работах [5–13] (2008–2021 гг.) показано, что когерентные структуры имеют различные размеры, при определенных условиях каскадно и когерентно распадаются и их можно рассматривать как элементы порядка, присутствующие в хаосе турбулентной среды. В вышеуказанных публикациях также отмечено, что атмосферную турбулентность можно рассматривать как некогерентную смесь (сумму) различных когерентных структур с несоизмеримыми частотами главных энергонесущих вихрей. Это установлено из анализа экспериментально зарегистрированных картин воздушных движений (с учетом рассчитанных спектральных характеристик вихрей). Такая смесь соответствует представлению о турбулентности как о хаосе, возникающем между когерентными структурами. Действительно, если за элементы порядка принять крупномасштабные (и, как правило, отслеживаемые в численных решениях) вихри, то в среде в промежутках между такими элементами будут присутствовать более мелкие вихри (мелкие когерентные структуры) и продукты распада самих крупномасштабных взаимодействующих вихрей. Продукты распада накладываются на более мелкие вихри (и взаимодействуют с ними и другими соседними крупномасштабными вихрями), поэтому в среде между крупномасштабными вихрями обычно наблюдаются очень сложные хаотические движения, изучать которые лучше статистическими методами. Следовательно, в целом можно говорить о турбулентности как о пространственно-временном хаосе взаимодействующих когерентных структур.

Размеры наименьших когерентных структур зависят от вязкости среды, в которой они возникают. В воздухе они составляют несколько сантиметров. Из таких структур (часто их называют термиками) обычно состоит пристеночная турбулентность. Она зарегистрирована и изучена экспериментально [17] и наблюдается также в численных решениях уравнений Навье–Стокса [10, 11]. Если максимальный объем гидродинамической среды, в которой регистрируется турбулентность (в случае атмосферы это ее максимальный объем), поделить на средний объем одного термика (наименьшей когерентной структуры), то мы получим конечное число (хотя и большое, но конечное). Следовательно, исходя из этой оценки и принимая во внимание предыдущие положения, можно говорить о турбулентности как о пространственно-временном хаосе конечного числа взаимодействующих когерентных структур.

Именно так на физическом языке и излагается гипотеза Э. Хопфа [15] о структуре турбулентности. Согласно этой гипотезе турбулентность есть пространственно-временной хаос конечного числа взаи-

модействующих когерентных структур. Поэтому наши результаты есть экспериментальные и теоретические доказательства гипотезы Э. Хопфа.

На математическом языке гипотеза Э. Хопфа заключается в конечной мерности аттракторов в фазовом пространстве решений уравнений Навье–Стокса (со временем все множество фазовых траекторий решений уравнений Навье–Стокса притягивается к конечномерному множеству). На физическом языке гипотеза Э. Хопфа сформулирована А.С. Мониним и А.М. Ягломом [3, 4]. Интересным следствием гипотезы Э. Хопфа является разделение турбулентности на когерентную и колмогоровскую.

2. Когерентная и колмогоровская турбулентность

Мы начали исследования структуры турбулентности с изучения турбулентности в закрытых помещениях. Наши данные [5–8, 2] подтверждают основные сценарии возникновения турбулентности (сценарии стохастизации Ландау–Хопфа, Рюэля–Таккенса, Фейгенбаума, Помо–Манневилля; подробнее об этих сценариях см., например, монографии [3, 4]). Установлено (рис. 1), что распад главного вихря конвективной когерентной структуры осуществляется по сценарию Фейгенбаума. При этом главный вихрь распадается на более мелкие в результате серии бифуркаций удвоения периода. Показано, что возникающая за счет распада турбулентность – когерентная (синфазная) и детерминированная. Обнаружена фрактальность (локальное самоподобие) спектра турбулентности. Турбулентность внутри одной изолированной когерентной структуры является неколмогоровской и обычно называется когерентной турбулентностью.

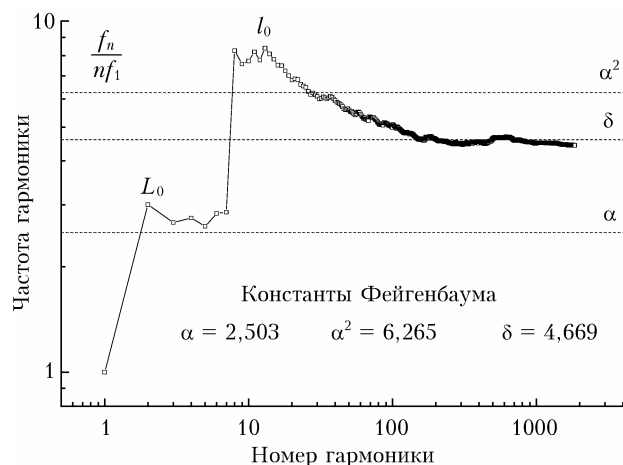


Рис. 1. Гармонический состав – распределение частот стабильных гармоник (вихрей) f_n в спектре флуктуаций температуры воздуха одной когерентной структуры; L_0 , l_0 – кармановский внешний и внутренний масштабы когерентной турбулентности [12, 13]

Как видно из результатов наших исследований [5, 13] (2008–2021 гг.), когерентный распад главного энергонесущего вихря на более мелкие

не заканчивается в области крупномасштабных (низкочастотных) вихрей. Он непрерывно продолжается в мелкомасштабную (высокочастотную) область вплоть до размеров мелких вихрей, которые еще могут существовать в воздухе (колмогоровский внутренний масштаб турбулентности, размеры которого в атмосфере, как известно [3, 4], составляют 0,6–1,2 мм). Частоты мелкомасштабных вихрей кратны частоте главного вихря. Фазы колебаний в этих вихрях жестко связаны, а сами вихри являются когерентными (синфазными). Поэтому когерентный распад нельзя ограничить областью крупномасштабных вихрей, как это делается на основании старых определений когерентной структуры [3, 4]: ранее когерентные крупномасштабные вихри считались просто основными энергоносителями и в структуре турбулентности не включались.

С учетом обнаруженного распада главного вихря [5–13] в наших работах определение когерентной структуры было расширено. Гидродинамической когерентной структурой можно назвать компактное образование, включающее в себя долгоживущую пространственную вихревую структуру (ячейку), возникающую в результате продолжительного действия термодинамических градиентов, и продукты ее дискретного когерентного каскадного распада. В расширенном понимании когерентная структура есть уединенное солитонное решение уравнений гидродинамики (уединенная волна). Это либо односолитонное решение, либо один солитон в многосолитонном решении. Когерентная структура содержит также и мелкомасштабную турбулентность.

Частота когерентно распадающегося главного вихря – основной признак когерентной структуры. Размеры когерентной структуры нечеткие. Течения, внешние по отношению к главному вихрю, могут перенести продукты его распада на значительные расстояния, образуя длинный турбулентный след. Время жизни когерентной структуры определяется временем действия термодинамических градиентов. В настоящее время нами сформулировано 28 различных свойств когерентных структур, наблюдающихся в атмосфере [8, 12, 13].

На основе теоретической кармановской модели спектров (см., например, [1]) нами были построены пространственный одномерный спектр флуктуаций температуры $V(\kappa)$ и соответствующий ему временной частотный спектр $W_T(f)$ в одиночной когерентной структуре (в когерентной турбулентности):

$$V(\kappa) = 0,514C_T^2\kappa_0(\kappa_0^2 + \kappa^2)^{-4/3},$$

$$W_T(f) = (4\pi/\nu)0,514C_T^2\kappa_0(\kappa_0^2 + 4\pi^2f^2/\nu^2)^{-4/3},$$

где f – положительная частота; $\kappa_0 = 2\pi/L_0$; C_T^2 – структурная характеристика флуктуаций температуры; ν – модуль вектора скорости ветра.

Временной спектр $W_T(f)$ построен из пространственного $V(\kappa)$ с помощью известного соотношения [1]: $W_T(f) = (4\pi/\nu) \times V(2\pi f/\nu)$. Эти спектры в инерционном интервале $\kappa_0 \ll \kappa \ll \kappa_m$ ($\kappa = 2\pi f/\nu$; $\kappa_m = 5,92/l_0$) имеют $8/3$ -степенное убывание, соот-

ветствующее зарегистрированным экспериментальным данным и численным решениям уравнений Навье–Стокса: $V(\kappa) \sim \kappa^{-8/3}$, $W_T(f) \sim f^{-8/3}$.

Приведенные спектры отличаются от соответствующих колмогоровских

$$V_*(\kappa) = 0,124C_T^2(\kappa_0^{*2} + \kappa^2)^{-5/6},$$

$$W_{T^*}(f) = (4\pi/\nu)0,124C_T^2(\kappa_0^{*2} + 4\pi^2f^2/\nu^2)^{-5/6},$$

где $\kappa_0^* = 2\pi/L_0^*$, L_0^* – кармановский внешний масштаб для колмогоровской турбулентности, более быстрое убывание в инерционном интервале (когерентное $8/3$ – убывание по сравнению с колмогоровским $5/3$ -убыванием, $V_*(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$, $W_{T^*}(f) \sim f^{-5/3}$). Отличаются также и внешние масштабы: колмогоровский внешний масштаб больше когерентного приблизительно (в среднем) в 2,3 раза [5, 8, 12, 13].

Нами показано, что экспериментальные спектры реально наблюдаемой атмосферной турбулентности представляют собой суммы спектров отдельных когерентных структур разных размеров (с различными внешними масштабами) [4–12]. При одинаковой интенсивности турбулентности кривая, соответствующая инерционному интервалу частотного спектра колмогоровской турбулентности, является верхней огибающей всех спектров разных когерентных структур, имеющих различные внешние масштабы турбулентности (рис. 2). Если разница между внешними масштабами невелика, то сумма спектров разных когерентных структур в инерционном интервале практически не отличается от колмогоровской $5/3$ -степенной зависимости. Если же эта разница велика, то сумма спектров имеет глубокий провал, в котором «обнажается» одна крупная структура с $8/3$ -степенным убыванием. Турбулентность в этом случае называется когерентной. Таким образом, если когерентные структуры имеют близкие размеры и «хорошо смешаны», то наблюдается изотропия турбулентности, описываемая колмогоровским

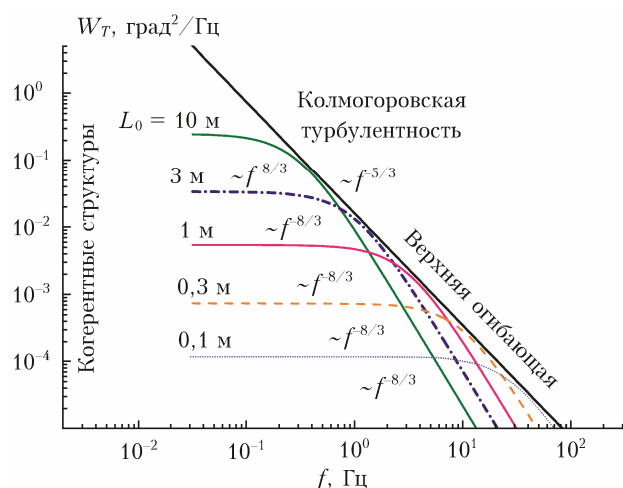


Рис. 2. Верхняя огибающая ($W_T \sim f^{-5/3}$) суммы всех спектров разных когерентных структур ($W_T \sim f^{-8/3}$) с различными внешними масштабами турбулентности соответствует колмогоровской турбулентности [13] (см. цветной рисунок на сайте <http://iao.ru/ru/content/vol.36-2023/iss.01>)

спектром. Если же одна из когерентных структур существенно больше других, то наблюдается анизотропия турбулентности, описываемая спектром когерентной турбулентности.

Возникновение колмогоровской турбулентности из совокупности областей, имеющих когерентную турбулентность, продемонстрировано на рис. 3 [10, 11]. В виде линий тока показаны численные решения

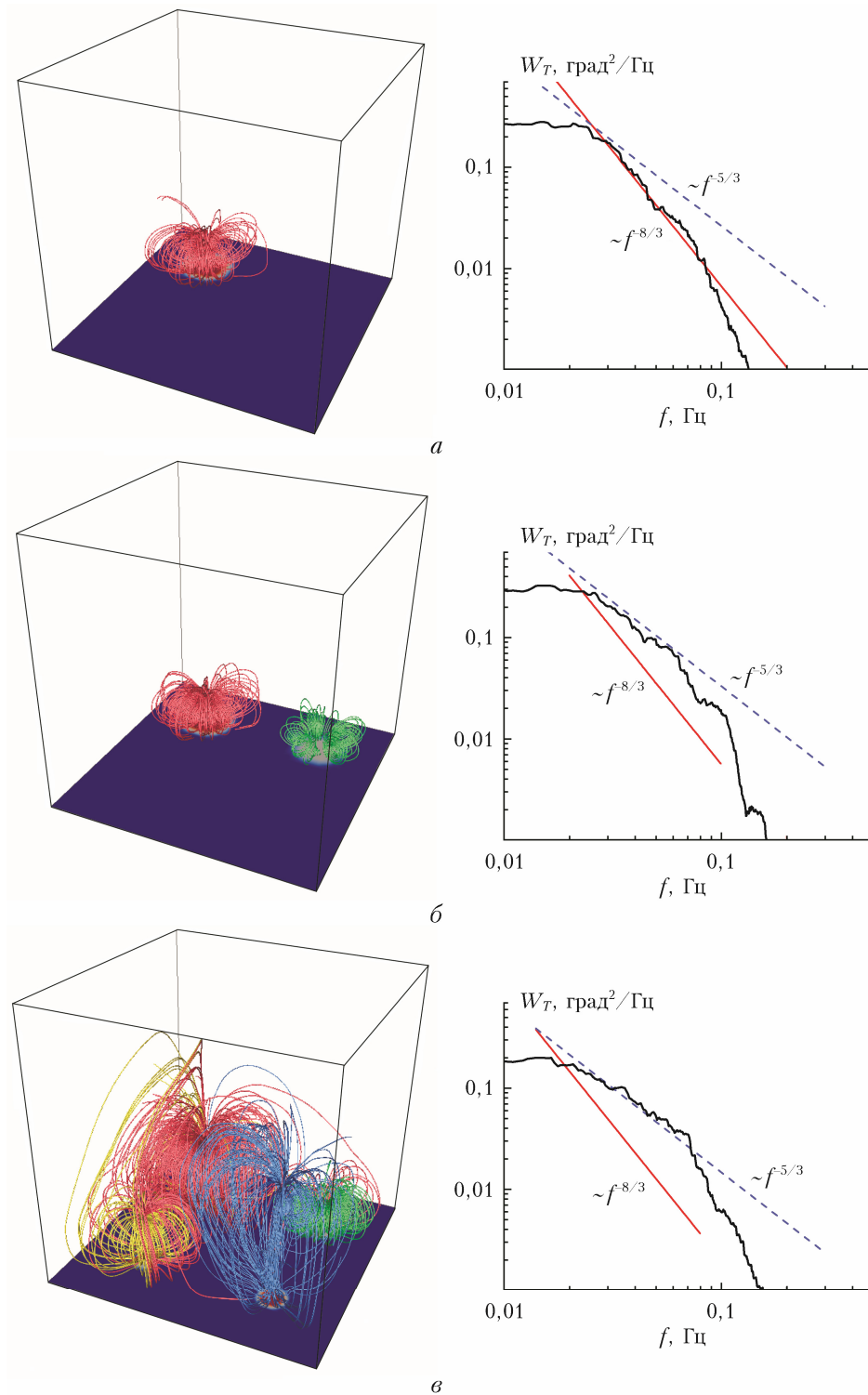


Рис. 3. Начальная фаза формирования конвективных ячеек над нагретыми пятнами (в момент времени численного моделирования 1 мин 57 с) и временные частотные спектры W_T флуктуаций температуры для стационарных (установившихся) решений соответствующих краевых задач. Количество пятен: 1 (*a*), 2 (*б*), 4 (*в*). Сплошные линии — линии тока с цветом, соответствующим пятну (см. цветной рисунок на сайте <http://iao.ru/ru/content/vol.36-2023/iss.01>)

уравнений Навье–Стокса над нагретыми пятнами и соответствующие им временные спектры. Как видно, для одного пятна наблюдается когерентная турбулентность (рис. 3, а, $W_T \sim f^{-8/3}$); увеличение количества пятен (рост теплового разнообразия) вначале приводит к появлению колмогоровского участка спектра (рис. 3, б, $W_T \sim f^{-5/3}$), а затем и к его удлинению (рис. 3, в).

Мы также установили, что в области с определяющим влиянием одной когерентной структуры (область когерентной турбулентности) постоянные Колмогорова и Обухова (в законе Колмогорова–Обухова) могут существенно отличаться от своих значений в колмогоровской турбулентности. По сравнению с последней в когерентной турбулентности обычно значительно ослабляются флуктуации оптического излучения. Такой эффект ослабления (совместно с данными о перемежаемости турбулентности) необходимо учитывать в астрономических наблюдениях (в [8, 12] выработаны рекомендации по наиболее благоприятному режиму проведения таких наблюдений).

В целом проведенный нами обзор всех имеющихся данных измерений и численных решений уравнений Навье–Стокса показывает, что *когерентную структуру в расширенном определении, несмотря на ее сложное внутреннее строение, можно рассматривать как основной структурный элемент, из которых состоит турбулентность*. Этот вывод проясняет внутреннюю структуру («внутреннее устройство») турбулентности.

Заключение

Показано, что результаты наших многолетних экспериментальных и теоретических исследований подтверждают гипотезу Э. Хопфа о структуре турбулентности как пространственно-временного хаоса конечного числа взаимодействующих когерентных структур.

Из приведенных в статье результатов следует, что наблюдается совпадение разнесенных во времени научных взглядов на структуру турбулентности. Указанные взгляды были сформулированы независимыми группами исследователей в разные исторические периоды (формулировка гипотезы Хопфа — середина XX в., а доказательство гипотезы Хопфа — начало XXI в.). Это дает основание утверждать, что представление о турбулентности как о пространственно-временном хаосе конечного числа взаимодействующих когерентных структур близко к истинному.

Мы отдаем дань уважения памяти В.И. Татарского, под научным влиянием которого мы пришли к изучению теории турбулентности.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики (проект «Расчетно-теоретические и экспериментальные исследования отклонений от колмогоровской модели турбулентности атмосферы в интересах оптимизации оптических наблюдений и требований к разрешению адап-

тивных оптических систем») в части расчетно-теоретического анализа когерентных составляющих спектров турбулентности, эффектов перемежаемости турбулентности и ослабления флуктуаций света. Разработка методологии измерений, анализа и расчетов выполнена в рамках государственного задания.

Список литературы

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
2. Клячкин В.И., Татарский В.И. Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики // Успехи физ. наук. 1973. Т. 10, № 8. С. 499–536. DOI: 10.3367/UFN.0110.197308b.0499.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 696 с.
4. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. СПб.: Гидрометеиздат, 1996. 742 с.
5. Носов В.В., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В. Астроклимат специализированных помещений Большого солнечного вакуумного телескопа. Ч. 2 // Оптика атмосфер. и океана. 2008. Т. 21, № 3. С. 207–217.
6. Nosov V.V., Lukin V.P., Nosov E.V., Torgaev A.V., Grigoriev V.M., Kovadlo P.G. The Solitonic Hydrodynamical Turbulence // Proc. VI Int. Conf. Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements Developments and Perspectives / V.E. Zakharov (ed.). Novosibirsk, 2012. P. 108–109. URL: <http://conf.nsc.ru/sct2012/en/reportlist> (last access: 22.08.2022).
7. Носов В.В., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В. Когерентные структуры — элементарные составляющие атмосферной турбулентности // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55, № 9/2. С. 236–238.
8. Носов В.В., Лукин В.П., Ковадло П.Г., Носов Е.В., Торгаев А.В. Оптические свойства турбулентности в горном пограничном слое атмосферы. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 153 с.
9. Lukin V.P., Nosov V.V., Nosov E.V., Torgaev A.V. Causes of non-Kolmogorov turbulence in the atmosphere // Appl. Opt. 2016. V. 55, N. 12. P. B163–B168. DOI: 10.1364/AO.55.00B163.
10. Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В. Моделирование когерентных структур (топологических солитонов) в закрытых помещениях путем численного решения уравнений гидродинамики // Оптика атмосфер. и океана. 2015. Т. 28, № 2. С. 120–133.
11. Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В. Структура турбулентности над нагретыми поверхностями. Численные решения // Оптика атмосфер. и океана. 2016. Т. 29, № 1. С. 23–30; Nosov V.V., Lukin V.P., Nosov E.V., Torgaev A.V. Turbulence structure over heated surfaces: Numerical solutions // Atmos. Ocean. Opt. 2016. V. 29, N 3. P. 234–243.
12. Nosov V.V. Atmospheric turbulence in the anisotropic boundary layer // Optical Waves and Laser Beams in the Irregular Atmosphere / N. Blaunshtein, N. Kopeika (eds.). London, New York: CRC Press, 2018. Chap. 3. P. 67–180. DOI: 10.1201/9780203732960.
13. Носов В.В., Лукин В.П., Ковадло П.Г., Носов Е.В., Торгаев А.В. Перемежаемость колмогоровской и когерентной турбулентности в горном пограничном слое (обзор) // Оптика атмосфер. и океана. 2021. Т. 34, № 9. С. 726–749; Nosov V.V., Lukin V.P., Kovadlo P.G., Nosov E.V., Torgaev A.V. Intermittency

- of Kolmogorov and coherent turbulence in the mountain atmospheric boundary layer (review) // Atmos. Ocean. Opt. 2022. V. 35, N 3. P. 266–287.
14. *Nosov V.V., Lukin V.P., Nosov E.V., Torgaev A.V., Bogushevich A.Ya.* Measurement of atmospheric turbulence characteristics by the ultrasonic anemometers and the calibration processes // Atmos. 2019. V. 10, N 8. P. 1–15. DOI: 10.3390/atmos10080460.
 15. *Hopf E.* A mathematical example displaying features of turbulence // Commun. Pure Appl. Math. 1948. V. 1, N 4. P. 303–322. DOI: 10.1002/CPA.3160010401.
 16. *Hopf E.* Statistical hydromechanics and functional calculus // J. Ratio. Mech. Analys. 1952. V. 1. P. 87–123. URL: <http://www.jstor.org/stable/24900259>.
 17. *Van Dyke M.* An Album of Fluid Motion. Stanford: Parabolic Press, 1982. 176 p.

V.V. Nosov, V.P. Lukin, P.G. Kovadlo, E.V. Nosov, A.V. Torgaev. **Proof of Hopf's conjecture on the structure of turbulence (Tatarsky's memory).**

The paper is dedicated to the memory of V.I. Tatarsky (1929–2020); however, it is not personalia. We present, as a brief review of our scientific works, the experimental and theoretical proofs of the E. Hopf's conjecture (1948) about the structure of turbulence as a space-time chaos of a finite number of interacting coherent structures. This review is the result of our many years research in the theory of turbulence. The theory of turbulence is a scientific direction that the authors have chosen under the scientific influence of V.I. Tatarsky.