«Оптика атмосферы и океана», **15**, № 8 (2002)

УДК 551.466.326

А.Н. Дубовик

Дифференциальные и статистические инварианты взволнованной поверхности. Часть 2. Свойства гауссовой поверхности

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 25.12.2001 г.

Показано, что спектр гауссовой поверхности имеет только ось вращения второго порядка, а его моменты выше второго порядка вырождены таким образом, что только три из них независимы и только два инварианта отличны от нуля. Выявлены условия распада спектра на ряд простых (одномерных) систем, получено совместное статистическое распределение средней и дифференциальной кривизны в горизонтальных точках поверхности. В рамках гауссовой модели волнения предложен простой оптический метод для одновременного измерения инвариантов вторых и четвертых моментов спектра поверхности.

Введение

В работе [1] была рассмотрена общая теория инвариантов взволнованной поверхности, которая имеет самостоятельный интерес в плане развития поверхности и вместе с тем создает необходимые теоретические предпосылки для строгого обоснования и развития дистанционных оптических методов исследования океана и других акваторий. Данная статья является продолжением работы [1]. Здесь рассмотрим статистические свойства гауссовой модели поверхности, представляющей наибольший практический интерес в теории морского волнения.

Как известно, в широком диапазоне условий взволнованную поверхность можно считать приблизительно гауссовой, когда статистические распределения ее производных описываются нормальным законом. Значительные отклонения от гауссовой статистики наблюдаются только в прибрежной зоне (на мелководье) и в условиях развивающегося волнения на глубокой воде, когда поверхность существенно неоднородна и происходит обрушение волн. Для гауссовой поверхности требования внешней симметрии связаны с инвариантностью следа и определителя корреляционных матриц. Как будет показано, это обусловливает специфическое вырождение инвариантов (четных моментов) и накладывает жесткие ограничения на симметрию спектра. В работе рассмотрены также характеристики угловой структуры двумерного спектра при его распаде на ряд простых (одномерных) систем, получено совместное статистическое распределение средней и дифференциальной кривизны в горизонтальных точках поверхности.

Как приложение теоретических результатов к практическому исследованию взволнованной поверхности в последнем разделе работы предложен простой оптический метод для одновременного дистанционного измерения инвариантов вторых и четвертых моментов спектра.

1. Вырождение инвариантов и свойства спектра

Для гауссовой поверхности четные моменты порядка $p + q = 2n$ образуют симметрическую корреляционную матрицу [2]:

$$M_{2n} = \begin{pmatrix} m_{2n,\,0} & m_{2n-1,\,1} & \cdots & m_{n,\,n} \\ m_{2n-1,\,1} & m_{2n-2,\,2} & \cdots & m_{n-1,\,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,\,n} & m_{n-1,\,n+1} & & m_{0,\,2n} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

в статистическом распределении производных n-го порядка. Однако для любой матрицы ее след и определитель

$$\mu_{2n} = \mathrm{Sp}\, M_{2n} = \sum_{r=1}^{n+1} (M_{2n})_{rr'} \quad \Delta_{2n} = \det M_{2n} \qquad (2)$$

являются инвариантами вращения [3]. Наличие дополнительных инвариантов, выражающих требования внешней симметрии, указывает на то, что в данном случае возможно вырождение (линейная зависимость) моментов, когда компоненты $H_{2n}^{(r)}$ и $h_{2n}^{(r)}$ некоторых инвариантов $V_{2n}^{(r)}$ обращаются в нуль (здесь и далее U_{2n}, $V_{2n}^{(r)}$ – обозначения инвариантов, принятые в [1], где приведены и их выражения вплоть до шестого порядка).

Так как Δ_{2n} является нелинейной функцией моментов, то вырождение определяется только следом матрицы. Для вторых моментов мы имеем $\mu_2 \equiv U_2$. Следовательно, в этом случае все три момента независимы, а момент по направлению дается хорошо известным выражением [2]:

$$2m_2(\varphi) = \mu_2 + (\mu_2^2 - 4\Delta_2)^{1/2}\cos [2\varphi - \varphi_2^{(1)}],$$

$$\varphi_2^{(1)} = \operatorname{arctg} [2m_{11}/(m_{20} - m_{02})]. \qquad (3)$$

Однако для моментов более высоких порядков $\mu_{2n} \neq \neq U_{2n}$. Из сравнения U_4 и μ_4 следует, что $(m_{40} + m_{04})$ и m_{22} являются инвариантами. Рассматривая преобразование моментов при вращении на угол φ, можно показать, что

$$(m'_{40} + m'_{04}) = (m_{40} + m_{04}) + h_4^{(2)} \sin 4\varphi +$$

$$+ (1/2)H_4^{(2)} \sin^2 2\varphi, \qquad (4)$$

где штрихом отмечены значения в повернутой системе координат. Отсюда и из выражений для компонент $H_4^{(2)}$, $h_4^{(2)}$ [1] следует

$$H_4^{(2)} = h_4^{(2)} = 0; \quad m_{13} = m_{31}, \quad m_{40} + m_{04} = 6m_{22}, \quad (5)$$

т.е. только три из пяти моментов независимы. Выбирая m_{40}, m_{04} и m_{31} как независимые моменты, можно заменить U_4 и $V_4^{(1)}$ наиболее простыми независимыми инвариантами

$$m_{22} = (m_{40} + m_{04})/6, \quad \delta = m_{40}\, m_{04} - 4m_{31}^2, \quad (6)$$

которые позволяют записать любые другие, связанные с моментами четвертого порядка. В частности, используя результаты работ [1,4], находим

$$U_4 = 8m_{22}, \ \ \mu_4 = 7m_{22},$$

$$V_4^{(1)} = 2\,(9m_{22}^2 - \delta), \ \ \Delta_4 = m_{22}\,(\delta - m_{22}^2),$$

$$\langle u_0^2\rangle = \langle v_0^2\rangle = P_0 = 2m_{22}, \ \ \langle u_0^4\rangle = 3P_0^2 = 12\, m_{22}^2,$$

$$\langle K_0^2\rangle = S = \delta + 3m_{22}^2,$$

$$\langle u_0^4\rangle - \langle v_0^4\rangle = 4Q_0 = 4m_{22}^2 = P_0^2, \qquad (7)$$

где P_0, Q_0 и S – обозначения инвариантов, принятые в [9,10] при анализе статистики отраженного от поверхности света; u_0, v_0, K_0 – средняя, дифференциальная и полная (гауссова) кривизна в горизонтальных точках. С учетом (6) четвертый момент одномерного спектра представляется в виде

$$m_4(\varphi) = 3m_{22} + (9m_{22}^2 - \delta)^{1/2} \cos [2\varphi - \varphi_4^{(1)}],$$

$$\varphi_4^{(1)} = \operatorname{arctg} [4m_{31}/(m_{40} - m_{04})]. \qquad (8)$$

Вырождение моментов более высоких порядков нетрудно найти, используя условие $H_4^{(2)} = h_4^{(2)} = 0$ и рекуррентные формулы для производных корреляционной функции (см. выражения (31) в [1]). В результате для моментов шестого порядка находим

$$H_6^{(r)} = h_6^{(r)} = 0 \ \ (r = 2,\,3); \ \ m_{15} = m_{51} = (5/3)m_{33},$$

$$15m_{42} = 2m_{60} + m_{06},\ 15m_{24} = m_{60} + 2m_{06}, \qquad (9)$$

т.е. здесь, как и выше, независимы только три момента $(m_{60},\ m_{06},\ m_{51})$. В этом случае $(m_{60} + m_{06})$ и $(m_{42} + m_{24})$ являются инвариантами, а момент по направлению определяется выражением

$$2m_6(\varphi) = (m_{60} + m_{06}) +$$

$$+ [(m_{60} - m_{06})^2 + 36m_{51}^2]^{1/2} \cos [2\varphi - \varphi_6^{(1)}],$$

$$\varphi_6^{(1)} = \operatorname{arctg} [6m_{51}/(m_{60} - m_{06})]. \qquad (10)$$

Продолжая вычисления, можно убедиться, что в общем случае мы имеем

$$H_{2n}^{(r)} = 0, \quad h_{2n}^{(r)} = 0 \ \ (2 \le r \le n). \qquad (11)$$

Итак, мы показали, что моменты выше второго порядка вырождены таким образом, что только три из них линейно независимы и только два инварианта U_{2n} и $V_{2n}^{(1)}$ не равны нулю, при этом вырождение (линейная связь моментов) определяется уравнениями (11). Очевидно, аналогичные выводы справедливы и для четных производных корреляционной функции.

Вырождение моментов существенно упрощает их угловую зависимость, которая при $V_{2n}^{(1)} \neq 0$ определяется только функциями $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$. Это означает, что спектр гауссовой поверхности имеет только ось вращения второго порядка, т.е. не может иметь побочных максимумов, кроме максимумов в заданном и противоположном ему направлениях. Как известно, такова же симметрия и развитого спектра ветрового волнения, что является одним из аргументов в пользу выбора гауссовой модели взволнованной поверхности. Из уравнений (11) вытекают также следующие свойства спектра:

1) моменты с переставленными нечетными индексами p и q одинаковы:

$$m_{qp} = m_{pq} \ \ (p \text{ и } q - \text{нечетные}); \qquad (12)$$

2) моменты $m_{2s,\,2s}$ и суммы моментов с переставленными четными индексами являются инвариантами, при этом выполняются соотношения

$$m_{2n-2k,\,2k} + m_{2k,\,2n-2k} = [C_n^k/C_{2n}^{2k}]\,(m_{2n,\,0} + m_{0,\,2n}) =$$

$$= 2^{k+1-2n}\, C_{2n-4k}^{n-2k}\, U_{2n}, \ \ 0 \le k \le E\,(n/2), \qquad (13)$$

где $E(z)$ – целая часть z. С учетом этих свойств моменты спектра по направлению φ представляются в виде

$$m_{2n}(\varphi) = (1/2)\, p_{2n}\, [1 + \varepsilon_n \cos (2\varphi - \varphi_{2n}^{(1)}],$$

$$\varepsilon_n = q_{2n}/p_{2n},$$

$$\varphi_{2n}^{(1)} = \operatorname{arctg} [(2n)\, m_{2n-1,\,1}/(m_{2n,\,0} - m_{0,\,2n})],$$

$$p_{2n} = m_{2n,\,0} + m_{0,\,2n},$$

$$q_{2n}^2 = (m_{2n,\,0} - m_{0,\,2n})^2 + 4n^2\, m_{2n-1,\,1}^2, \qquad (14)$$

где инварианты p_{2n} и q_{2n} можно выразить через U_{2n} и $V_{2n}^{(1)}$. Введенные здесь инварианты ε_n представляют коэффициенты анизотропии n-го порядка и играют важную роль в статистике поверхности. В частности, они характеризуют угловую направленность (заостренность) спектра и в изотропном случае обращаются в нуль.

Когда спектр симметричен относительно направления φ_0 (главного направления волн), то выполняются условия $\varphi_{2n}^{(1)} = 2\varphi_0$ и мы дополнительно имеем соотношения

$$\sin 2\varphi_0 = h_2^{(1)}/V_2^{(1)} = h_4^{(1)}/V_4^{(1)} = \ldots = h_{2n}^{(1)}/V_{2n}^{(1)}, \quad (15)$$

из которых следует, что все отношения $h_{2r}^{(1)}/h_{2s}^{(1)}$, $H_{2r}^{(1)}/H_{2s}^{(1)}$ также являются инвариантами ($r, s = 1, 2, 3,\ldots$).

Как известно, условие $\Delta_{2n} = 0$ отвечает распаду (вырождению) спектра на n одномерных спектров [2]. Это означает, что для невырожденного (двухмерного) спектра должны выполняться условия $0 \le \varepsilon_n < (\varepsilon_n)_{\max}$, где $(\varepsilon_n)_{\max} \le 1$ есть решение уравнения $\Delta_{2n} = 0$. Рассмотрим этот вопрос более подробно и найдем некоторые $(\varepsilon_n)_{\max}$. Перестановкой столбцов и строк корреляционную матрицу M_{2n} можно представить в виде [3]:

$$M_{2n} = \begin{pmatrix} A_{2n} & \vdots & B_{2n} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ B'_{2n} & \vdots & C_{2n} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где с учетом вырождения моментов квадратные подматрицы A_{2n} и C_{2n} содержат только моменты $m_{2n,\,0}$ и $m_{0,\,2n}$, тогда как подматрицы B_{2n} и B'_{2n} (не обязательно квадратные) содержат только моменты $m_{2n-1,\,1}$. В направлении $\varphi = \varphi_{2n}^{(1)}/2$ (или φ_0 для симметричного спектра) имеем

$$m_{2n-1,\,1} = 0, \quad m_{2n,\,0} = (m_{2n})_{\max} \equiv (1 + \varepsilon_n)\, p_{2n}/2,$$
$$m_{0,\,2n} = (m_{2n})_{\min} \equiv (1 - \varepsilon_n)\, p_{2n}/2, \quad (17)$$

где $(m_{2n})_{\max}$ и $(m_{2n})_{\min}$ – значения момента в указанном выше и перпендикулярном ему направлениях. С учетом этого условие вырождения спектра можно записать в виде

$$\Delta_{2n} = (\det A_{2n})\,(\det C_{2n}) = 0. \quad (18)$$

Ограничиваясь значениями $n \le 4$, найдем определители подматриц:

$$\det A_2,\ \det C_2 = (p_2/2)\,(1 \pm \varepsilon_1),$$
$$\det A_4 = (p_4/6)^2\,(8 - 9\varepsilon_2^2),\ \det C_4 = p_4/6,$$
$$\det A_6,\ \det C_6 = (p_6/15)^2\,(4\varepsilon_3^2 \pm 6\varepsilon_3 - 9),$$
$$\det A_8 = (2p_8/35)^3\,(64 - 75\varepsilon_4^2),$$
$$\det C_8 = (p_8/14)^2\,(4 - \varepsilon_4^2). \quad (19)$$

Отсюда получаем, что распаду спектра соответствуют значения коэффициентов анизотропии

$$(\varepsilon_1)_{\max} = 1;\ (\varepsilon_2)_{\max} = \sqrt{8}/3 = 0{,}9428,$$
$$(\varepsilon_3)_{\max} = 3/(1 + \sqrt{5}) = 0{,}9271,$$
$$(\varepsilon_4)_{\max} = 8/\sqrt{75} = 0{,}9238. \quad (20)$$

Следует отметить равенство значений $(\varepsilon_2)_{\max}$ и $\cos(\vartheta/2)$, где $\vartheta = 38°56'$ – угол расходимости корабельных волн [5]. На наш взгляд, такое совпадение двух характеристик поверхности не является случайным, однако обсуждение этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

2. Статистика кривизны поверхности

Найдем далее совместную плотность распределения $W_2(u_0, v_0)$ средней и дифференциальной кривизны в горизонтальных точках поверхности (для изотропного случая эта функция была получена в [4]). Как обычно, будем исходить из распределения вторых производных [2, 4]:

$$W_3(\zeta_{20}, \zeta_{11}, \zeta_{02}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,\Delta_4^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2\Delta_4}\sum_{p,}^{3}\sum_{q=0}^{3} B_{pq}\,\xi_p\,\xi_q\right], \quad (21)$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv (\zeta_{20}, \zeta_{11}, \zeta_{02})$ и B_{pq} – алгебраическое дополнение элемента матрицы $(M_4)_{pq}$ в определителе Δ_4, при этом имеем [1]:

$$\zeta_{20,\,02} = u_0 \pm v_0 \cos(2\varphi - \varphi_2),$$
$$\zeta_{11} = v_0 \sin(2\varphi - \varphi_2), \quad (22)$$

где $\varphi_2 = \mathrm{arctg}\,[(2\zeta_{11}/(\zeta_{20} - \zeta_{02})]$. Будем полагать, что ось x совпадает с направлением $\varphi_4^{(1)}/2$. Тогда, подставляя в (21) выражения (22) и учитывая тот факт, что якобиан преобразования переменных равен $4\,|\,v_0\,|$, получаем

$$W_3(u_0, v_0, t) = \frac{|\,v_0\,|}{4\pi\,(\pi m_{22}^3\,\rho)^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{(2u_0 - 3\varepsilon_2\,v_0\cos t)^2}{16\rho m_{22}} - \frac{v_0^2}{2m_{22}}\right], \quad (23)$$

где введены обозначения $\rho = 1 - (9/8)\,\varepsilon_2^2 \equiv 1 - [\varepsilon_2^2/(\varepsilon_2)_{\max}^2]$ и $t = 2\varphi - \varphi_2$ $(0 \le t \le \pi)$. Можно показать, что

$$\int_0^\pi \exp[-(\alpha - \beta\cos t)^2]\,dt = \exp[-\alpha^2 - (\beta^2/2)] \times$$
$$\times \int_0^\pi \exp[(\beta^2/2)\cos 2t]\,\mathrm{ch}\,(2\alpha\beta\sin t)\,dt. \quad (24)$$

Второй интеграл можно вычислить, используя известные соотношения [3]:

$$\mathrm{ch}(z_1 \sin t) = I_0(z_1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n}(z_1) \cos 2nt, \; z_1 = 2\alpha\beta,$$

$$\int_0^{\pi} \exp\,(z_2 \cos 2t) \cos 2nt\, dt = \pi I_n(z_2), \; z_2 = \beta^2/2, \quad (25)$$

в которых $I_r(z)$ – функция Бесселя порядка x от мнимого аргумента. Таким образом, интегрируя (23) по t, окончательно получаем

$$W_2(u_0, v_0) = \frac{|v_0|}{4(\pi m_{22}^3 \rho)^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{u_0^2 + (1+\rho)\, v_0^2}{4\rho m_{22}}\right] F(u_0, v_0), \quad (26)$$

где

$$F(u_0, v_0) = I_0(z_1)\, I_0(z_2) +$$
$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n}(z_1)\, I_n(z_2);$$

$$z_1 = (3\varepsilon_2/4\rho m_{22})\, u_0\, v_0, \;\; z_2 = [(1-\rho)/4\rho m_{22}]\, v_0^2. \quad (27)$$

В изотропном случае $\rho = F = 1$, поэтому распределение (26) совпадает с полученным ранее в [4]. Очевидно, используя $W_2(u_0, v_0)$, можно найти любые моменты инвариантов u_0, v_0 и $K_0 = u_0^2 - v_0^2$; значения некоторых из моментов приведены в (7). Вместе с тем, производя замену переменных, из (26) нетрудно получить и другие распределения, такие как $W_2(s_0, K_0)$ или $W_2(k_{10}, k_{20})$, где $s_0 = k_{10}/k_{20}$ – анизотропия кривизны, k_{10} и k_{20} – главные значения кривизны в горизонтальных точках поверхности.

3. Измерение инвариантов

Поскольку инварианты моментов спектра зависят только от внешних параметров, то их измерение является удобным способом исследования изменчивости волнения под влиянием ветра и течений, в результате взаимодействия поверхностных и внутренних волн, при наличии пленок загрязняющих и поверхностно-активных веществ и т.д. Особый интерес в таких исследованиях представляют дистанционные оптические методы, которые могут использоваться для решения широкого круга научных и прикладных задач [6–10].

Следует особо отметить, что измерение высших инвариантов позволяет получить интегральную информацию о весьма малых вариациях спектра в высокочастотной (капиллярной) области, где прямые спектральные измерения, как правило, весьма затруднены и ненадежны. Результаты, представленные в [1] и в данной статье, позволяют дать исчерпывающее теоретическое обоснование уже существующим и вновь предлагаемым дистанционным методам. В частности, как показано в (7), фигурирующие в [9,10] инварианты P_0, Q_0, S весьма просто выражаются через инварианты m_{22} и δ.

Полагая, что взволнованная поверхность является гауссовой, рассмотрим простой оптический метод для одновременного измерения инвариантов второго и четвертого порядков. В его основе лежит подсчет числа зеркальных точек поверхности (точек отражения), имеющих определенный угол наклона θ в заданном направлении φ. На практике такой метод может быть реализован подсчетом оптических импульсов от отдельных зеркальных точек при сканировании поверхности тонким (диаметром 1–5 мм) пучком непрерывного лазера. Заметим, что в лидарных системах, где источник и приемник излучения находятся в одном приборе, регистрируются импульсы обратного отражения от поверхности, при этом угол отклонения лазерного пучка от вертикали (в направлении сканирования φ) совпадает с углом наклона зеркальных точек. Ниже мы будем полагать, что измерения производятся двухканальным лидаром, в котором имеются две независимые (вертикальная и наклонная) оптоэлектронные системы для одновременного вывода лазерного излучения и приема отраженных импульсов. Такая конструкция лидара наиболее удобна для реализации предлагаемого метода.

Как показано в работе [2], среднее число $\eta(\varphi, \theta)$ точек отражения на единицу длины поверхности в направлении φ определяется выражением

$$\eta(\varphi, \theta) = N(\varphi) \exp\,[-\,\mathrm{tg}^2\theta/2m_2(\varphi)];$$
$$N(\varphi) = \frac{1}{\pi}\,[m_4(\varphi)/m_2(\varphi)]^{1/2}, \quad (28)$$

где $N(\varphi) \equiv \eta(\varphi, 0)$ – среднее число горизонтальных точек (максимумов и минимумов волн) на единицу длины. Заменяя согласно (14) моменты по направлению m_2 и m_4 их представлениями через инварианты, получаем

$$N(\varphi) = Q\left[\frac{1+\varepsilon_2\ \cos 2\varphi}{1+\varepsilon_1\ \cos 2\varphi}\right]^{1/2}, \;\; Q = \frac{1}{\pi}\,(p_4/p_2)^{1/2}, \quad (29)$$

где угол $\varphi = 0$ соответствует главному направлению волн. Обозначим далее

$$\alpha_m = \ln(N_m/\eta_m), \;\; N_m \equiv N(\varphi_m), \;\; \eta_m \equiv \eta(\varphi_m, \theta),$$
$$\varphi_m = \varphi_1 + 45°\,(m-1), \;\; 1 \le m \le 3, \quad (30)$$

где m – номер измерения (сканирования). Рассмотрим ситуацию, когда направление волн хорошо известно (например, при исследованиях в гидроканале или лотке). Полагая в этом случае $\varphi_1 = 0$, находим

$$p_2 = \mathrm{tg}^2\theta/\alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_3)\,\mathrm{tg}^2\theta/2\alpha_1\alpha_3, \quad p_4 = \pi^2 Q^2 p_2,$$
$$Q^2 = N_2^2 = (N_1^2\,\alpha_3 + N_3^2\,\alpha_1)/(\alpha_1 + \alpha_3);$$
$$\varepsilon_1 = (\alpha_3 - \alpha_1)/(\alpha_1 + \alpha_3),$$
$$\varepsilon_2 = (N_1^2\,\alpha_3 - N_3^2\,\alpha_1)/(N_1^2\,\alpha_3 + N_3^2\,\alpha_1). \quad (31)$$

Следовательно, здесь достаточно выполнить сканирование поверхности в направлениях $\varphi_m = 0,\ 45,\ 90°$ относительно главного направления волн.

Однако при измерениях в натурных условиях главное направление, как правило, неизвестно. С учетом этого для произвольного угла φ_1 имеем

$$p_2 = (\alpha_1 + \alpha_3)\,\mathrm{tg}^2\theta / 2\alpha_1\alpha_3, \quad p_4 = \pi^2 Q^2 p_2,$$

$$Q^2 = (N_1^2\,\alpha_3 + N_3^2\,\alpha_1)/(\alpha_1 + \alpha_3);$$

$$\varepsilon_1 = A/\alpha_2\,(\alpha_1 + \alpha_3), \quad \varepsilon_2 = B/\alpha_2\,(N_1^2\,\alpha_3 + N_3^2\,\alpha_1);$$

$$\cos 2\varphi_1 = \alpha_2(\alpha_3 - \alpha_1)/A = \alpha_2(N_1^2\,\alpha_3 - N_3^2\,\alpha_1)/B, \quad (32)$$

где коэффициенты A и B определяются выражениями

$$A^2 = 4\alpha_1^2\,\alpha_3^2 + 2\alpha_2^2\,(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) - 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\,(\alpha_1 + \alpha_3);$$

$$B^2 = 4\alpha_1^2\,\alpha_3^2\,N_2^4 + 2\alpha_2^2\,(\alpha_1^2\,N_3^4 + \alpha_3^2\,N_1^4) -$$

$$- 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\,N_2^2\,(\alpha_1\,N_3^2 + \alpha_3\,N_1^2). \quad (33)$$

Таким образом, в общем случае все инварианты второго и четвертого порядков вместе с главным направлением волн можно определить, сканируя поверхность в трех направлениях через 45°.

Очевидным достоинством предложенного метода является простота системы регистрации, которая работает в ключевом режиме, выполняя только подсчет световых импульсов без их аналоговой обработки. Для реализации высокого пространственно-углового разрешения, необходимого для выделения импульсов от близких точек отражения, угол зрения приемника $\Delta\theta$ следует выбирать достаточно малым, исходя из оценки $\Delta\theta \le d/H$, где d – размер пространственного разрешения (d ~ 1–5 см); H – высота лидара над поверхностью. Кроме того, приемник лидара должен обеспечивать уверенную регистрацию оптических импульсов, меняющихся по интенсивности на четыре–пять порядков. Отметим также, что скорость накопления импульсов пропорциональна скорости сканирования (скорости движения лидара), а в наклонном канале лидара она существенно зависит и от выбора угла θ.

Заключение

В работе показано, что при гауссовой статистике поверхности моменты спектра и производные корреляционной функции выше второго порядка вырождены, при этом только три из них линейно независимы и только два инварианта U_{2n} и $V_{2n}^{(1)}$ отличны от нуля.

Как следствие, спектр гауссовой поверхности имеет только ось вращения второго порядка и характеризуется свойствами симметрии моментов (12)–(14). Очевидно, все эти особенности необходимо учитывать в теоретических моделях или эмпирических аппроксимациях установившегося (развитого) спектра морского волнения.

Найдены некоторые предельные значения угловой структуры (коэффициентов анизотропии) спектра, соответствующие его распаду на ряд простых (одномерных) систем. Получено совместное статистическое распределение средней и дифференциальной кривизны в горизонтальных точках поверхности.

В рамках гауссовой модели волнения предложен простой оптический метод, позволяющий производить одновременное измерение инвариантов вторых и четвертых моментов. Как было показано, для измерения инвариантов достаточно просканировать поверхность в трех направлениях через 45°.

1. *Дубовик А.Н.* Дифференциальные и статистические инварианты взволнованной поверхности. Ч. 1. Общие свойства инвариантов // Оптика атмосф. и океана. 2002. Т. 15. № 8. С. 712–717.
2. *Лонге-Хиггинс М.С.* Статистический анализ случайной движущейся поверхности // Ветровые волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 125–218.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Гл. 13, 17, 21. М.: Наука, 1974. 832 с.
4. *Дубовик А.Н.* Статистические распределения элементов кривизны морской поверхности // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 1996. Т. 32. № 4. С. 523–527.
5. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 342 с.
6. *Wu J.* Slope and curvature distributions of wind-disturbed water waves // J. Opt. Soc. Amer. 1971. V. 61. № 7. P. 852–858.
7. *Bufton J.L., Hoge F.E. and Swift R.N.* Airborne measurements of laser backscatter from the ocean surface // Appl. Opt. 1983. V. 22. № 17. P. 2603–2618.
8. *Бункин Ф.В., Воляк К.И., Маляревский А.И.* Измерение параметров морского волнения по статистике отраженного лазерного излучения // Дистанционное зондирование океана (Тр. ИОФАН. Т. 1). М.: Наука, 1986. С. 3–22.
9. *Дубовик А.Н.* Статистика оптического излучения при обратном отражении от зеркальных точек морской поверхности // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 1997. Т. 33. № 1. С. 137–144.
10. *Дубовик А.Н.* Определение параметров морского волнения по статистике интенсивности солнечных бликов // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 1997. Т. 33. № 3. С. 389–393.
11. *Иванов В.И., Лазарчик А.Н.* Статистические свойства освещенности в плоскости изображения при лазерном зондировании морской поверхности // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 1992. Т. 28. № 3. С. 319–324.
12. *Гардашов Р.Г., Гардашова Т.Г.* Математическое моделирование статистических характеристик света, отраженного от морской поверхности // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2001. Т. 37. № 1. С. 99–103.

A.N. Dubovik. **Differential and statistical invariants of a wavy surface. Part 2. Properties of a Gaussian surface.**

It is shown that the spectrum of a Gaussian surface has only the second-order rotational axis, and its moments are higher than the second order are degenerated in such a way that only three of them are independent and only two invariants are nonzero. The conditions of the spectrum decay into one-dimentional systems are revealed, the joint statistical distribution of the mean and differential curvatures at horizontal surface points is found. As an application of our theoretical results to practical study of a wavy surface, a simple optical method is suggested for simultaneous remote-sensing measurement of the second- and fourth-order invariants of spectral moments.