

О расчетных формулах для дисперсии смещений изображения плоской волны в условиях слабых турбулентных флуктуаций

Г.А. Филимонов*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 2.02.2011 г.

Обнаружена неточность в ряде опубликованных работ, касающихся дрожания оптических изображений световых источников. Получена правильная формула для дисперсии смещений изображения плоской волны в условиях слабых турбулентных флуктуаций. Проверка правильности произведена с помощью численного интегрирования.

Ключевые слова: оптическое изображение, распространение лазерного излучения, турбулентная атмосфера, плоская волна; *imaging, propagation of laser radiation, turbulent atmosphere, plane wave.*

Введение

В исследованиях, связанных с наблюдениями источников света через турбулентную атмосферу, одной из важных задач является определение дисперсии смещений оптического изображения, которая характеризует степень его турбулентных искажений. Пионерские работы в этом направлении [1, 2] датируются 80-ми гг. XX в., но и в наши дни исследователи возвращаются к этому вопросу [3]. К сожалению, вывод расчетной формулы для дисперсии смещений оптического изображения без использования каких-либо приближений пока не представляется возможным в связи со сложностью задачи. В [4, 5] на основе решения уравнения для функции когерентности второго порядка получено следующее приближенное выражение для однородной трассы в режиме слабых турбулентных флуктуаций:

$$\sigma_t^2 = \frac{l^2 \sigma_{t0}^2}{4F_t^2} \int_0^1 d\xi \left\{ 2\mu \mu^* \left(1 + \frac{\Omega_t^2}{M^2} N^2 \right) \left[\beta_1^{-1/6} - (\beta_1 + \beta_t)^{-1/6} \right] + \mu^2 \left(1 + \frac{i\Omega_t}{M} N \right)^2 \left[\beta_2^{-1/6} - (\beta_2 + \beta_t)^{-1/6} \right] + \mu^{*2} \left(1 - \frac{i\Omega_t}{M} N \right)^2 \left[\beta_2^{*-1/6} - (\beta_2^* + \beta_t)^{-1/6} \right] \right\} + O(\beta_0^4), \quad (1)$$

где σ_t^2 – дисперсия смещений изображения; F_t – фокусное расстояние приемной апертуры; l – расстояние от приемной апертуры до плоскости наблюдения:

$\sigma_{t0}^2 = \frac{1}{2} \pi^2 0,033 F_t^2 L C_\epsilon^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) (a_t^2/2)^{-1/6}$; L – дистанция распространения;

$$\mu = \xi - i\Omega(1 - \xi)/b, \quad b = 1 - i\Omega\left(1 - \frac{L}{F}\right);$$

$$M = 1 + \frac{\Omega\Omega_t}{bb^*}; \quad N = 1 - X - \frac{\Omega^2}{bb^*}\left(1 - \frac{L}{F}\right);$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2M}(\mu^{*2} + \mu^2) + \frac{2\Omega}{\Omega_t bb^*}(1 - \xi)^2,$$

$$\beta_2 = \frac{\mu^2}{M} + \frac{2i\mu}{\Omega_t}(1 - \xi), \quad \beta_t = \frac{L_0^2}{2\pi^2 a_t^2}; \quad \Omega = \frac{ka^2}{L}, \quad \Omega_t = \frac{ka_t^2}{L};$$

a – радиус пучка, a_t – радиус приемной апертуры; L_0 – внешний масштаб турбулентности; k – волновое число; F – начальная фокусировка излучения; ξ – переменные интегрирования.

Ценность данного выражения в том, что оно учитывает зависимость от внешнего масштаба турбулентности, которая может быть существенной [6]. В [4, 7] показано, что применение квадратичной аппроксимации структурной функции для получения (1) дает погрешность не более 5%.

Рассмотрим следствия (1) для плоской волны ($\Omega \gg 1$), соответствующие бесконечному внешнему масштабу турбулентности. В предельных случаях точечной приемной апертуры ($\Omega_t \ll 1$) и полного перехвата излучения приемной апертурой ($\Omega_t \gg 1$) в [4, 5] из (1) получены асимптотики:

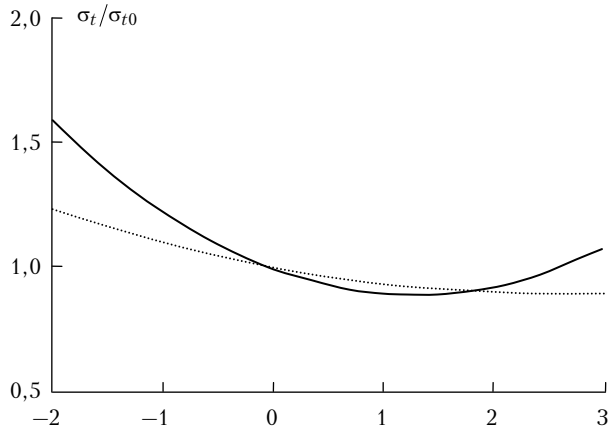
$$\sigma_{t,f}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{t0}^2 \frac{l^2}{F_t^2}, \quad \Omega_t \ll 1, \quad (2)$$

$$\sigma_{t,f}^2 = \sigma_{t0}^2 \frac{l^2}{F_t^2} \left[1 - \frac{X}{6} \left(1 - \frac{7X}{18} \right) \right], \quad \Omega_t \gg 1, \quad (3)$$

* Григорий Алексеевич Филимонов (grfilimonov@yandex.ru).

где $\sigma_{t,f}^2$ — дисперсия смещений изображения плоской волны; $X = L/l(l/F_t - 1)$.

На рисунке сплошной кривой показана зависимость, рассчитанная по формулам (1), (3) в области $\Omega \gg 1$, $\Omega_t \gg 1$.



Зависимости дисперсии смещений оптического изображения плоской волны от положения плоскости наблюдения в случае полного перехвата излучения приемной апертурой ($\Omega_t = 10^4$). Сплошная кривая — формулы (1) и (3), $\Omega_t \gg 1$, пунктирная — формула (4)

Однако приведенная в [2, 4, 5] более общая формула для плоской волны, не накладывающая ограничений на размер апертуры Ω_t :

$$\sigma_{t,f}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{t0}^2 \frac{l^2}{F_t^2} \left\{ (1 + X^2 \Omega_t^2) + \int_0^1 \operatorname{Re} \left[(1 - iX\Omega_t)^2 (1 + i\Omega_t^{-1} \xi)^{-1/6} \right] d\xi \right\} + O(\beta_0^4), \quad (4)$$

также полученная из (1), записана неточно, что подтверждает расчет для случая $\Omega_t \gg 1$ (пунктирная кривая).

Точное выражение для формулы (4) имеет вид

$$\sigma_{t,f}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{t0}^2 \frac{l^2}{F_t^2} \left\{ (1 + X^2 \Omega_t^2) + \int_0^1 \operatorname{Re} \left[(1 - iX\Omega_t)^2 (1 + 2i\Omega_t^{-1} (1 - \xi))^{-1/6} \right] d\xi \right\} + O(\beta_0^4). \quad (5)$$

Расчет по формуле (5) в области $\Omega_t \gg 1$ воспроизводит сплошную кривую, полученную авторами [4, 5].

G.A. Filimonov. About equations for the variance of plane wave image displacement in the conditions of weak turbulent fluctuations.

The inexactness was discovered in several papers which deal with optical image displacement of light sources. Correct formula was obtained for the variance of plane wave image displacement in the condition of weak turbulent fluctuations. The test of correctness was performed by numerical integration method.

О практической применимости выражений для дисперсии плоской волны

Асимптотики (3) и (4) очень удобны для использования, так как дисперсию смещений изображения можно быстро вычислить с их помощью даже на калькуляторе. Однако в практических ситуациях приемную апертуру редко можно считать точечной или полностью перехватывающей излучение. Использование выражений (1) и (2) осложнено присутствием интегралов. Аналитически можно показать, что эти интегралы сводятся к гипергеометрическим функциям, но это не облегчает их вычисление. Наиболее удобным способом здесь становится численное интегрирование, несмотря на то что оно требует повышенного контроля точности вычислений.

Замеры времени тестовых расчетов показывают, что на современных вычислительных рабочих станциях расчеты по формулам (1) и (2) производятся приблизительно с одинаковой скоростью. При использовании метода Симпсона третьего порядка точности и разбиения отрезка интегрирования на 1000 интервалов расчеты обоих выражений занимают не более 1–2 с. С учетом этого наиболее предпочтительным становится использование выражения (1), так как оно справедливо для произвольных значений размера излучающей апертуры Ω и не использует приближения бесконечного внешнего масштаба турбулентности, что во многом усиливает его практическую значимость.

Автор выражает благодарности В.В. Колосову и В.В. Дудорову за ценные обсуждения, В.А. Банаху и В.П. Аксенову за помощь по улучшению логики изложения материала.

1. Рытов С.М., Крайцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
2. Зуев В.Е., Банах В.А., Покасов В.В. Оптика турбулентной атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 270 с.
3. Большасова Л.А., Лукин В.П., Носов В.В. О дрожании изображения лазерной опорной звезды в моностатической схеме формирования // Оптика и спектроскопия. 2009. Т. 107, № 6. С. 1045–1050.
4. Аксенов В.П., Банах В.А., Чен Б.Н. Дисперсия дрожания изображения лазерного источника в турбулентной атмосфере. Томск: ИОА, 1983. 19 с. Деп. в ВИНТИ 19.09.83, № 5932-83.
5. Чен Б.Н. Флуктуации оптических изображений источников света и лоцируемых объектов в турбулентной атмосфере: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск: Изд-во ТГУ, 1985. 145 с.
6. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 286 с.
7. Kon A.I., Mironov V.L., Nosov V.V. Dispersion of light beam displacements in the atmosphere with strong intensity fluctuations // Radiophys. Quantum Electron. 1976. V. 19. P. 722–725.