«Оптика атмосферы и океана», **19**, № 7 (2006)

УДК 621.396.965.8

Г.Л. Дегтярев, А.В. Маханько, С.М. Чернявский, А.С. Чернявский

Метод моментов в задаче восстановления волнового фронта по изображениям

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию 29.06.2005 г.

Получены новые моментные соотношения, связывающие функцию аберраций оптической системы с числовыми характеристиками распределения интенсивности в изображении. На их основе предложен метод восстановления волнового фронта по изображениям источника в нескольких параллельных плоскостях.

Введение

Среди методов восстановления волнового фронта (ВФ) в оптической системе (ОС) наиболее простым в реализации и менее изученным является метод, основанный на анализе изображений точечного источника в нескольких плоскостях, параллельных фокальной плоскости.

Если искажения ВФ представлены в виде разложения в ряд по некоторой системе базисных функций с неизвестными коэффициентами, то задача восстановления ВФ сводится к оценке этих коэффициентов по изображениям или по функционалам от них.

Пусть $G = A(\xi,\eta)\exp[k\Phi(\xi,\eta)]$ – функция зрачка ОС, описывающая амплитудные $A(\xi, \eta)$ и фазовые $\Phi(\xi, \eta)$ искажения волнового поля в каждой точке (ξ, η) области выходного зрачка Ω; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Обозначим через $I(x, y, z)$ распределение интенсивности в плоскости изображения $z = \mathrm{const}$ ($z = 0$ соответствует фокальной плоскости).

Имеется несколько подходов восстановления ВФ по изображениям.

1. По известным распределениям $I(x, y, z_s)$, $s = \overline{1,S}$, в ограниченной области найти волновую функцию G.

2. По известным распределениям $I(x, y, z_s)$, $s = \overline{1,S}$, в ограниченной области и амплитуде A найти функцию аберраций Φ.

3. Функция аберраций задана частичной суммой ряда

$$\Phi = \sum c_k\varphi_k(\xi,\eta),$$

найти оценки коэффициентов $\tilde{c}_k$ (мод) в виде функционалов изображений $\tilde{c}_k(I)$ при известной или неизвестной амплитуде.

Наиболее гибким методом решения задач 1, 2 является метод, сводящий их решение к геометрической задаче нахождения общей точки заданных множеств. Задача 1 может быть решена в геометрической трактовке численным алгоритмом Файнапа [1] или алгоритмом увеличения размерности [2], задача 2 – алгоритмом Гершберга–Закстона [3] и алгоритмом увеличения размерности. Решение задачи 3 можно извлечь из решения задач 1, 2 или решить самостоятельно итерационным методом [4–6]. Но задача 3 допускает решение в явном виде. Один из таких подходов основан на вычислении или измерении функционалов изображения вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{d^kI(0)}{dz^k}x^p y^q dxdy\,. \quad (1)$$

В этом методе, названном моментным [7, 8], используются линейные соотношения, связывающие $\mathrm{grad}\Phi$ с величинами (1).

В данной работе получены новые соотношения более общего вида, чем (1), связывающие функцию аберраций волнового фронта с числовыми характеристиками (моментами) распределения интенсивности в изображении. Предложен математический аппарат, основанный на функциях комплексного переменного, упрощающий нахождение явной зависимости оценок $\tilde{c}_k$ от функционалов изображений.

1. Обобщенное моментное соотношение

Пусть удаленный точечный источник находится на оптической оси и R – радиус идеального ВФ (сферы Гаусса). Поперечные аберрации лучей $\overline{r}$ в фокальной плоскости связаны с волновыми аберрациями равенством [9]:

$$\overline{r} = R\,\mathrm{grad}\Phi\,.$$

Точке $\overline{r} = (x,y)$ на фокальной плоскости соответствует множество на зрачке

$$\Omega(\overline{r}) = \{(\xi,\eta) \in \Omega :\ R\,\mathrm{grad}\Phi(\xi,\eta) = \overline{r}\}.$$

Множество $\Omega(\overline{r})$ задает элементы искаженного ВФ, световая энергия которых переносится лучами, проходящими через точку $\bar{r}$. Через элемент $dxdy$, содержащий точку $\bar{r}$, проходит энергия $I(x, y)dxdy$, переносимая лучами из множества $\Omega(\bar{r})$. В рамках геометрической оптики имеем энергетическое равенство

$$I(x,y)dxdy = \sum_{(\xi,\eta)\in\Omega(\bar{r})} A^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Пусть $\varphi(\bar{r})$ – функция от (x, y). Эта функция может быть и комплекснозначной. Элемент энергии $I(x, y)dxdy$ имеет момент

$$\varphi(x,y)I(x,y)dxdy = \varphi(R\mathrm{grad}\Phi)\sum_{(\xi,\eta)\in\Omega(\bar{r})} A^2(\xi,\eta)d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{(\xi,\eta)\in\Omega(\bar{r})} \varphi[R\mathrm{grad}\Phi(\xi,\eta)]\, A^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Полный момент всех элементов энергии будет равен

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \varphi(x,y)I(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega}\varphi[R\mathrm{grad}\Phi(\xi,\eta)]A^2(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (2)$$

Это и есть обобщенное моментное соотношение. Для степенной функции $\varphi = x^p y^q$ равенство (2) было доказано на основе волновой теории света в [7, 8] для достаточно гладкой функции зрачка и доказано [8] на основе геометрической оптики без требования гладкости амплитуды A.

Моментное соотношение в комплексной форме

Точки плоскости зрачка (ξ, η) и фокальной плоскости (x, y) определяют комплексные переменные $\zeta = (\xi + i\eta)/a = \rho\exp(i\theta)$ и $w = (a/\lambda R)(x + iy)$, где a – характерный размер выходного зрачка. Функцию аберраций представим в виде

$$\Phi = \lambda\mathrm{Re}\Psi\left(\zeta,\bar{\zeta}\right), \qquad (3)$$

где функция Ψ имеет производные по своим аргументам. Тогда

$$\partial\Phi/\partial\xi = (\lambda/a)\mathrm{Re}(\partial\Psi/\partial\zeta + \partial\Psi/\partial\bar{\zeta}),$$

$$\partial\Phi/\partial\eta = (\lambda/a)\mathrm{Re}\, i(\partial\Psi/\partial\zeta - \partial\Psi/\partial\bar{\zeta}) =$$

$$= (\lambda/a)\mathrm{Im}(-\partial\Psi/\partial\zeta + \partial\Psi/\partial\bar{\zeta}).$$

Вектор $\mathrm{grad}\Phi$ задает комплекснозначную функцию

$$(\lambda R/a)[\overline{(\partial\Psi/\partial\zeta)} + \partial\Psi/\partial\bar{\zeta}] =$$

$$= R(\partial\Phi/\partial\xi + i\partial\Phi/\partial\eta) = x + iy$$

переменной ζ. Отсюда следует, что искажения ВФ, отклоняющие световые лучи, задают функцию комплексного переменного

$$w = w(\zeta) = \overline{(\partial\Psi/\partial\zeta)} + \partial\Psi/\partial\bar{\zeta},$$

которая преобразует точки выходного зрачка в точки фокальной плоскости. Моментное соотношение (2) в комплексной форме принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\varphi(w)I(x,y)dxdy =$$

$$= a^2\iint\limits_{\Omega}\varphi[w(\zeta)]A^2(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta. \qquad (4)$$

Представление первичных аберраций в комплексной форме

Общий наклон ВФ вносит в функцию Φ составляющую

$$\Phi_1^1/\lambda = A\rho\cos(\theta) + B\rho\sin(\theta) = \mathrm{Re}C\zeta,$$

где $C = A - iB$ и определяет преобразование

$$w_1^1 = \overline{(\partial\Psi_1^1/\partial\zeta)} = \bar{C}.$$

Астигматизм вносит составляющую

$$\Phi_2^2/\lambda = A\rho^2\cos(2\theta) + B\rho^2\sin(2\theta) = \mathrm{Re}C\zeta^2$$

и определяет преобразование

$$w_2^2 = 2\overline{C\zeta}.$$

Кома вносит составляющую

$$\Phi_3^1/\lambda = \rho^2[A\rho\cos(\theta) + B\rho\sin(\theta)] = \mathrm{Re}C\zeta^2\bar{\zeta}$$

и определяет преобразование

$$w_3^1 = 2\bar{C}\zeta\bar{\zeta} + C\zeta^2.$$

Расфокусировка и сферическая аберрация вносят составляющие

$$\Phi_2^0/\lambda = A(2\rho^2 - 1) = A(2\zeta\bar{\zeta} - 1),$$

$$\Phi_4^0/\lambda = A(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1) = A[6(\zeta\bar{\zeta})^2 - 6\zeta\bar{\zeta} + 1]$$

и определяют преобразования

$$w_2^0 = 4A\zeta \text{ и } w_4^0 = 12A\zeta(2\zeta\bar{\zeta} - 1).$$

Комплексное представление преобразований, соответствующих полиномам Цернике

В случае круглого зрачка радиуса a функция аберраций часто раскладывается по полиномам Цернике. Каждая составляющая в разложении имеет в действительной форме вид [9]:

$$V_n^m(\rho,\theta) = R_n^m(\rho)[A_n^m\cos(m\theta) + B_n^m\sin(\theta)],$$

где

$$R_n^m(\rho) = \rho^m\sum_{s=0}^{(n-m)/2} D_{n,s}^m(\rho^2)^{\frac{n-m}{2}-s} = \rho^m r_n^m(\rho^2),$$

$n - m \geq 0$ – четное число и

$$D_{n,s}^{m} = (-1)^{s}(n-s)!\Big/\left[s!\left(\frac{n+m}{2}-s\right)!\left(\frac{n-m}{2}-s\right)!\right].$$

Полагая $C_n^m = A_n^m - iB_n^m$, получим комплексную форму членов разложения по полиномам Цернике:

$$V_n^m = \mathrm{Re}\, C_n^m \zeta^m r_n^m(\zeta\bar{\zeta}),$$

определяемых функциями

$$\Psi_n^m(\zeta,\bar{\zeta}) = \zeta^m r_n^m(\zeta\bar{\zeta}).$$

Члены ряда определяют преобразования $w_n^m(\zeta)$, вид которых зависит от m и n. При $n > m = 0$

$$w_n^0 = 2A_n^0\zeta(r_n^0)',$$

где $(r_n^0)'$ — производная по переменной $\zeta\bar{\zeta}$.

При $n = m > 0$

$$w_m^m = m\bar{C}_n^m\bar{\zeta}^{m-1}.$$

При $n > m > 0$

$$w_n^m = \bar{C}_n^m\bar{\zeta}^{m-1}\left[mr_n^m + \zeta\bar{\zeta}(r_n^m)'\right] + C_n^m\zeta^{m+1}(r_n^m)'.$$

Преобразования w_n^m, соответствующие первичным аберрациям, были получены в [9]. Представление преобразований w_n^m в комплексной форме делает их более наглядными и в более общем виде. Окружности $\rho = \mathrm{const}$ переходят с помощью преобразований в кривые, называемые аберрационными. Преобразованием w_n^0 радиусы-векторы точек окружности $\rho = \mathrm{const}$ получают одинаковое растяжение. Поэтому аберрационные кривые являются окружностями. Преобразование w_m^m осуществляет указанное растяжение, поворот на угол $\arg C_m^m + (m-2)\theta$ и симметрию относительно действительной оси.

Преобразование w_n^l, $n > 1$, сводится к следующему: равномерному растяжению, повороту на угол $\arg C_n^l + \theta$ и смещению на величину l-го слагаемого в выражении для w_n^l. Поэтому аберрационные кривые преобразования w_n^l являются смещенными окружностями.

Преобразование w_n^m, $n > m > 1$, может быть записано в виде

$$w_n^m = (1/\zeta^{m-l})\left\{\bar{C}_n^m(\zeta\bar{\zeta})^{m-l}[mr_n^m + \zeta\bar{\zeta}(r_n^m)'] + C_n^m\zeta^{2m}(r_n^m)'\right\}$$

и представляет собой композицию двух преобразований:

$$w_n^m = (1/\zeta^{m-l}) \otimes (w_n^m)_l,$$

где преобразование $(w_n^m)_l$ аналогично преобразованию w_n^l, в котором поворот осуществляется на угол $\arg C_n^m + (2m-l)\theta$.

Нахождение мод Цернике по распределению интенсивности в пространстве изображения

Моментное соотношение (4) записано для фокальной плоскости. Если измерение осуществляется в нефокальной плоскости $z \neq 0$, то при небольших z это измерение соответствует интенсивности в фокальной плоскости для измененной функции зрачка на фазовый множитель [9]:

$$\exp[-ik(a/2R)^2 z(2\rho^2 - 1)].$$

Это изменение сводится к изменению коэффициента расфокусировки Цернике A_2^0, который надо заменить на

$$A_2^0(z) = A_2^0 - (a/2R)^2 z/\lambda = A_2^0 - (1/8\pi)\bar{z},$$

$$\bar{z} = k(a/R)^2 z.$$

Располагая интенсивностью $I(x, y, z)$, требуется найти моды Цернике C_n^m. Один из путей решения этой задачи состоит в следующем. Для различных φ необходимо составить систему уравнений из соотношений (4) с известной левой частью для определения мод. В правую часть соотношения (4) входит амплитуда A, которая должна быть измерена или найдена по интенсивности $I(x, y, z)$ из соответствующих моментных соотношений [8].

Идеальный случай решения задачи нахождения мод состоит в выборе таких функций φ_n^m, при которых левые части соотношений (4) сразу дают оценки моды $\tilde{C}_n^m$. Решение в таком виде пока не известно. Однако для случая, когда амплитуда не зависит от угловой координаты $A = A(\rho)$, будет показано, что для каждого $m = m_0$ можно выбрать такие линейные комбинации моментов (1), которые будут зависеть только от мод $C_n^{m_0}$. Это означает, что моды, соответствующие различным m, можно находить раздельно.

Пусть функция аберраций с учетом контролируемой расфокусировки z определяется частичной суммой ряда

$$\Phi = \lambda\,\mathrm{Re}[\Psi(\zeta,\bar{\zeta}) - (1/8\pi)\bar{z}(2\zeta\bar{\zeta} - 1)],$$

где

$$\Psi(\zeta,\bar{\zeta}) = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=m}^{N(m)} C_n^m\Psi_n^m(\zeta,\bar{\zeta}).$$

Искажению ВФ соответствует преобразование

$$w = w(\zeta,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=m}^{N(m)} w_n^m(\zeta) - (1/2\pi)\bar{z}\zeta =$$

$$= w(\zeta) - (1/2\pi)\bar{z}\zeta.$$

Возьмем функцию φ равной $\varphi(w) = w^{k+l}\bar{w}^l$, $0 \le k \le M$. Ей соответствует моментное соотношение (4) вида

$$M_{k+2l}^{k}(\bar z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int w^{k+l}\bar w^{l} I(x,y,\bar z)\,dxdy =$$

$$= a^2 \iint\limits_{\Omega} w^{k+l}(\zeta,\bar z)\bar w^{l}(\zeta,\bar z)A^2(\rho)\rho d\rho d\theta.$$

Так как $w(\zeta,\bar z)$ линейно зависит от $\bar z$, то момент $M_{k+2l}^{k}(\bar z)$ есть многочлен $k + 2l$ степени от $\bar z$.

С помощью формулы Лейбница для производной высшего порядка от произведения найдем, что

$$[w^{k+l}(\zeta,\bar z)\bar w^{l}(\zeta,\bar z)]_{\bar z=0}^{(k+2l-1)} = \binom{l-1}{k+2l-1}(w^{k+l})^{(k+l)}(\bar w^{l})^{(l-1)} +$$

$$+\binom{l}{k+2l-1}(w^{k+l})^{(k+l-1)}(\bar w^{l})^{(l)} =$$

$$= \binom{l-1}{k+2l-1}(k+l)!\,l!\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{k+2l-1}\zeta^{k+l}\bar\zeta^{l-1}\bar w(\zeta) +$$

$$+\binom{l}{k+2l-1}(k+l)!\,l!\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{k+2l-1}\zeta^{k+l-1}\bar\zeta^{l} w(\zeta) =$$

$$= (k+2l-1)!(-1/2\pi)^{k+2l-1}\times$$

$$\times[l\zeta^{k+l}\bar\zeta^{l-1}\bar w(\zeta) + (k+l)\zeta^{k+l-1}\bar\zeta^{l} w(\zeta)].$$

Поэтому

$$[M_{k+2l}^{k}(0)]^{(k+2l-1)} = (k+2l-1)!(-1/2\pi)^{k+2l-1}a^2\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}\!\int\limits_0^{1}[l\zeta^{k+l}\bar\zeta^{l-1}\bar w(\zeta) + (k+l)\zeta^{k+l-1}\bar\zeta^{l} w(\zeta)]\,A^2(\rho)\rho d\rho d\theta. \quad (5)$$

Рассмотрим интеграл по θ в равенстве (5):

$$\int\limits_0^{2\pi}[\ldots]d\theta =$$

$$= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=m}^{N(m)}\int\limits_0^{2\pi}[l\zeta^{k+l}\bar\zeta^{l-1}\bar w_n^m(\zeta) + (k+l)\zeta^{k+l-1}\bar\zeta^{l} w_n^m(\zeta)]\,d\theta =$$

$$= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=m}^{N(m)}[l\int\limits_0^{2\pi}\zeta^{k+l}\bar\zeta^{l-1}\left\{C_n^m[\zeta^{m-1}mr_n^m + \zeta^m\bar\zeta(r_n^m)'] +\right.$$

$$\left.+\bar C_n^m\bar\zeta^{m+1}(r_n^m)'\right\}d\theta +$$

$$+(k+l)\int\limits_0^{2\pi}\zeta^{k+l-1}\bar\zeta^{l}\left\{\bar C_n^m[\bar\zeta^{m-1}mr_n^m + \bar\zeta^m\zeta(r_n^m)'] +\right.$$

$$\left.+C_n^m\zeta^{m+1}(r_n^m)'\right\}d\theta] =$$

$$= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=m}^{N(m)}[l\int\limits_0^{2\pi}\left\{C_n^m[\zeta^{m+k+l-1}\bar\zeta^{l-1}mr_n^m + \zeta^{m+k+l}\bar\zeta^{l}(r_n^m)'] +\right.$$

$$\left.+\bar C_n^m\zeta^{k+l}\bar\zeta^{m+l}(r_n^m)'\right\} +$$

$$+(k+l)\int\limits_0^{2\pi}\left\{\bar C_n^m[\zeta^{k+l-1}\bar\zeta^{m+l-1}mr_n^m + \zeta^{k+l}\bar\zeta^{m+l}(r_n^m)'] +\right.$$

$$\left.+C_n^m\zeta^{m+k+1}\bar\zeta^{l}(r_n^m)'\right\}d\theta].$$

Ненулевой вклад дают интегралы, которые зависят только от произведения $\zeta\bar\zeta$.

При $k = 0$

$$\int\limits_0^{2\pi}[\ldots]d\theta = 8\pi\sum_{n=0}^{N(0)} lA_n^0(\zeta\bar\zeta)^l(r_n^0)'.$$

При $k \neq 0$

$$\int\limits_0^{2\pi}[\ldots]d\theta = 2\pi\sum_{n=0}^{N(k)} C_n^k\left\{l(\zeta\bar\zeta)^{k+l}(r_n^k)' +\right.$$

$$\left.+(k+l)[k(\zeta\bar\zeta)^{k+l-1}r_n^k + (\zeta\bar\zeta)^{k+l}(r_n^k)']\right\} =$$

$$= 2\pi\sum_{n=0}^{N(k)} C_n^k[(k+2l)(\zeta\bar\zeta)^{k+l}(r_n^k)' + (k+l)k(\zeta\bar\zeta)^{k+l-1}r_n^k].$$

С учетом интегралов по θ получим вид производных при $k = 0$:

$$[M_{2l}^0(0)]^{2l-1} =$$

$$= -\frac{(2l-1)!}{(-2\pi)^{2l-2}}4a^2 l\sum_{n=0}^{N(0)} A_n^0\int\limits_0^1\rho^{2l}(r_n^0)'A^2(\rho)\rho d\rho, \qquad (6)$$

при $k \neq 0$

$$[M_{k+2l}^k(0)]^{k+2l-1} = -\frac{(k+2l-1)!}{(-2\pi)^{k+2l-2}}a^2\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{N(k)} C_n^k\int\limits_0^l\left[(k+2l)\rho^2(r_n^0)' + k(k+l)r_n^k\right]\rho^{2(k+l-1)}A^2(\rho)\rho d\rho. \qquad (7)$$

Соотношения (6) и (7), записанные при различных l, служат для раздельного определения коэффициентов C_n^k при заданном k. Соотношение (6) получается из (7) умножением на два.

Нахождение первичных аберраций из моментных соотношений

Пусть ВФ определяется только первичными аберрациями

$$\Phi = \lambda\,\mathrm{Re}\left\{A_2^0(2\zeta\bar\zeta - 1) + A_4^0[6(\zeta\bar\zeta)^2 - 6\zeta\bar\zeta + 1] +\right.$$

$$\left.+C_1^1\zeta + C_3^1(3\zeta\bar\zeta - 2)\zeta + C_2^2\zeta^2\right\}.$$

Тогда при $k = 0$ и $l = 1, 2$ имеем систему для определения A_2^0 и A_4^0:

$$[M_2^0(0)]' =$$

$$= -8a^2\left[A_2^0\int\limits_0^1\rho^2A^2(\rho)\rho d\rho + 3A_4^0\int\limits_0^1\rho^2(2\rho^2-1)A^2(\rho)\rho d\rho\right],$$

$$[M_4^0(0)]''' = -\frac{3!}{(2\pi)^2}16a^2 \times$$

$$\times\left[A_2^0\int_0^1\rho^4A^2(\rho)\rho d\rho + 3A_4^0\int_0^1\rho^4(2\rho^2-1)A^2(\rho)\rho d\rho\right].$$

При $k = 1$ и $l = 1$, 2 имеем систему для определения $\bar{C}_1^1$ и $\bar{C}_3^1$:

$$M_1^1(0) = 2\pi a^2\left[\bar{C}_1^1\int_0^1 A^2(\rho)\rho d\rho + \bar{C}_3^1\int_0^1(6\rho^2-2)A^2(\rho)\rho d\rho\right],$$

$$[M_3^1(0)]'' =$$

$$= a^2/\pi\left[2\bar{C}_1^1\int_0^1\rho^2A^2(\rho)\rho d\rho + \bar{C}_3^1\int_0^1\rho^2(15\rho^2-4)A^2(\rho)\rho d\rho\right].$$

При $k = 2$ и $l = 0$ имеем уравнения для определения C_2^2:

$$[M_2^2(0)]' = -4a^2C_2^2\int_0^1\rho^2A^2(\rho)\rho d\rho.$$

2. Применение комплексного представления ВФ в задаче восстановления мод по данным датчика Гартмана

В методе Гартмана измеряются локальные наклоны ВФ на дискретном множестве точек выходного зрачка ω. Задача состоит в получении оценки функции аберрации по ее градиенту на дискретном множестве ω. Существует несколько методов решения этой задачи. Один из них заключается в представлении функции Φ в виде отрезка ряда по некоторой системе базисных функций с неизвестными коэффициентами, которые находятся методом наименьших квадратов. Выбор системы базисных функций существенно влияет на сложность вычисления коэффициентов ряда. В данном разделе предлагается такое разложение функции Φ, которое, по мнению авторов, существенно упрощает вычисление искомых коэффициентов.

Зададим функцию Φ соотношением (3), в котором комплексную функцию Ψ представим частичной суммой ряда вида

$$\Psi = \sum_{m=0}^{M} C^m\left(\zeta\bar{\zeta}\right)\zeta^m. \tag{8}$$

Требуется найти действительный C^0 и комплексные C^m коэффициенты, зависящие от аргумента $\zeta\bar{\zeta} = \rho^2$. Представление Φ равенствами (3), (8) включает разложение по полиномам Цернике. Данные Гартмана задают на ω значения преобразования $w(\zeta)$. С учетом (8)

$$w(\zeta) = 2\zeta(C^0)' + \sum_{m=1}^{M}\bar{\zeta}^{m-1}[m\bar{C}^m + \zeta\bar{\zeta}(\bar{C}^m)'] + \zeta^{m+1}(C^m)'.$$

Предполагается, что по значениям $w(\zeta)$ на ω можно оценить $w(\zeta)$ в точках $\zeta_k = \rho\exp(i2\pi k/N)$, $0 \le k \le N-1$, где натуральное число $N = 2M + 1$ определяется теоремой отсчетов. Тогда в точке ζ_k

$$(\bar{\zeta}w)_k = \bar{\zeta}_k w(\zeta_k) = 2(C^0)'\rho^2 +$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\exp(-i2\pi km/N)a_m(\rho) +$$

$$+\exp[-i2\pi k(N-m)/N]\,a_{N-m}(\rho),$$

где обозначили

$$a_m(\rho) = \rho^m[m\bar{C}^m + \rho^2(\bar{C}^m)'],\quad a_{N-m}(\rho) = \rho^{m+2}(C^m)'.$$

Положим $a_0 = 2(C^0)'\rho^2$, тогда

$$(\zeta w)_k = a_0(\rho) + \sum_{m=1}^{M}\exp(-i2\pi km/N)\,a_m(\rho) +$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\exp(-i2\pi k(N-m)/N)\,a_{N-m}(\rho) =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\exp(-i2\pi km/N)\,a_m(\rho),\quad k = \overline{0,N-1}.$$

Из этого равенства следует, что значения $(\bar{\zeta}w)_k$ являются координатами вектора дискретного преобразования Фурье от вектора $(a_0(\rho), \ldots, a_{N-1}(\rho))$, поэтому

$$a_m(\rho) = (1/N)\sum_{k=0}^{N-1}\exp(i2\pi km/N)(\bar{\zeta}w)_k,\quad m = \overline{0,N-1}.$$

Таким образом, по значениям $w(\zeta_k)$ можно найти величины $a_m(\rho)$, а по ним получить

$$2\rho^2(C^0)' = a_0 \tag{9}$$

и

$$m\rho^mC^m(\rho^2) = \bar{a}_m(\rho) - a_{N-m}(\rho),\quad m = \overline{1,M}. \tag{10}$$

Из равенств (10) непосредственно определяются величины $\rho^mC^m(\rho^2)$, входящие в разложение (3), (8). Равенство (9) определяет только производную коэффициента $C^0(\rho^2)$, по которой нужно оценить сам коэффициент, характеризующий вращательно-симметричную составляющую ВФ.

Заключение

Метод получения моментных соотношений (2) и их приложения дают теоретическую основу для создания и обоснования алгоритмов восстановления мод ВФ по изображениям источника. Разложения (3), (8) рациональны в том смысле, что данные Гартмана и коэффициенты разложения связаны простой зависимостью, дискретным преобразованием

Фурье. При этом интегрирование необходимо только для нахождения коэффициента, соответствующего нулевой частоте.

1. *Реконструкция* изображений: Пер. с англ. / Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1992. 635 с.
2. *Дегтярев Г.Л., Маханько А.В., Чернявский С.М., Чернявский А.С.* Итерационный метод восстановления волнового фронта по адаптивно формируемым изображениям произвольного протяженного источника // Оптика атмосф. и океана. 2004. Т. 17. № 8. С. 676–681.
3. *Gerchberg R.W., Sakton W.O.* // Optik. 1971. V. 34. P. 275.
4. *Саутвэл В.* Анализатор волнового фронта, основанный на методе максимального правдоподобия // Адаптивная оптика / Под ред. Д. Фрида. М.: Мир, 1980. 456 с.
5. *Воронов М.А., Шмальгаузен В.И.* Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 269 с.
6. *Чернявский С.М.* Восстановление мод волнового фронта по функционалам изображения //Оптика атмосф. и океана. 1997. Т. 10. № 12. С. 1593–1598.
7. *Лопатников М.В.* Моментные уравнения формирования изображения для идентификации компонент функции зрачка // Адаптивная оптика. Казань: КАИ, 1987. С. 66–72.
8. *Чернявский С.М.* К задаче о восстановлении волнового поля по объемному изображению // Оптика атмосф. и океана. 1996. Т. 9. № 1. С. 85–91.
9. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики / Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 719 с.

G.L. Degtyarev, A.V. Makhan'ko, S.M. Chernyavskii, A.S.Chernyavskii. **Method of moments for the problem of wavefront reconstruction from images.**

New relations connecting the function of wavefront aberrations of an optical system and numerical characteristics (moments) of intensity distribution in the image are obtained.