

А.Н. Валентюк

НОВЫЙ МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Разработан новый метод аналитического решения уравнения переноса оптического излучения в стохастической рассеивающей среде в линейном и квадратичном приближениях.

В настоящее время общепризнано, что наиболее адекватной моделью атмосферы является модель трехмерно неоднородного рассеивающего слоя. В рамках этой модели можно описать пространственную неоднородность атмосферного аэрозоля, стохастическую структуру туманов и сплошной облачности, а также наличие в атмосфере кучевой облачности. Интенсивное развитие теории распространения излучения в таких средах началось лишь в последние годы. Среди численных методов наибольшее продвижение в решении проблемы достигнуто при использовании метода Монте-Карло [1, 2]. Среди аналитических методов развиты только методы, основанные на применении теории возмущений и малоуглового приближения уравнения переноса [3–8]. Из них методы теории возмущений [3–5] и малоугловое приближение [6, 7] применимы только для расчета световых полей в стохастических средах со слабыми мелкомасштабными флуктуациями показателей рассеяния, метод [8], хотя и обладает гораздо более широкой областью применимости, также имеет ряд ограничений. В настоящей статье описывается более общий, чем в [3–8], метод аналитического решения уравнения переноса в стохастических средах, использующий новый подход в применении теории возмущений для решения стохастического уравнения переноса.

Считаем, что в рассеивающем слое реализовано случайное поле показателей ослабления $\varepsilon(\mathbf{r})$ и направленного светорассеяния $\sigma(\mathbf{r}; \gamma)$ на угол γ . Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор точки, принадлежащий слою. Этот слой освещается сверху излучением, создающим в верхней плоскости слоя в момент времени t яркость $B_0(\rho; \Omega; t)$, где ρ – радиус-вектор точки, принадлежащей поверхности слоя; Ω – орт, определяющий направление наблюдения яркости. Световое поле внутри слоя удовлетворяет стохастическому уравнению переноса:

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \nabla + \varepsilon(\mathbf{r}) \right] I(\mathbf{r}; \Omega; t) = \int_{4\pi} \sigma(\mathbf{r}; \Omega \cdot \Omega') I(\mathbf{r}; \Omega'; t) d\Omega', \quad (1)$$

где c – скорость света в среде; ∇ – оператор градиента; $I(\mathbf{r}; \Omega; t)$ – яркость излучения в точке \mathbf{r} среды в направлении Ω в момент времени t . Обозначим проекцию \mathbf{r} на верхнюю плоскость слоя ρ , длину проекции \mathbf{r} на направленную вниз ось Z декартовой системы координат z . Граничные условия уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} I(\rho; z = 0; \Omega; t) &= B_0(\rho; \Omega; t) && \text{при } \mu > 0, \\ I(\rho; z = H; \Omega; t) &= 0 && \text{при } \mu < 0, \end{aligned}$$

где μ – направляющий косинус вектора Ω с осью Z ; H – толщина слоя. Вследствие линейности уравнения переноса (1) яркость $I(\mathbf{r}; \Omega; t)$ связана с $B_0(\rho; \Omega; t)$ линейным функционалом:

$$I(\mathbf{r}; \Omega; t) = \int_0^t dt' \int d\rho' \int d\Omega' B_0(\rho'; \Omega'; t') G(\mathbf{r}; \rho'; \Omega; \Omega'; t; t'), \quad (2)$$

где $G(\cdot)$ – стохастическая функция Грина уравнения (1). Из (2) видно, что для расчета световых полей, создаваемых в среде произвольными излучателями, достаточно знать лишь функцию Грина уравнения (1). Очевидно, что она удовлетворяет уравнению (1) с граничными условиями:

$$\begin{aligned} G(\rho; z = 0, \rho'; \Omega; \Omega'; t; t') &= \delta(\rho - \rho') \delta(\Omega - \Omega') \delta(t - t') && \text{при } \mu > 0, \\ G(\rho; z = H; \rho'; \Omega; \Omega'; t; t') &= 0 && \text{при } \mu < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Нетрудно видеть, что для нерассеянного света

$$G_0(\mathbf{r}; \boldsymbol{\rho}'; \boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{\Omega}'; t; t') = \exp \left[- \int_0^z \varepsilon(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{a}u; u) \frac{du}{\mu_1} \right] \times \\ \times \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{a}z) \delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}') \delta(t - t' - z/\mu_1 c), \quad (4)$$

где μ_1 — направляющий косинус $\boldsymbol{\Omega}'$ с осью Z , $\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega}'_{\perp} / \mu_1$, $\boldsymbol{\Omega}'_{\perp}$ — проекция $\boldsymbol{\Omega}'$ на верхнюю плоскость слоя.

Представим функцию Грина $G(\cdot)$ в виде суммы функций Грина для нерассеянного света $G_0(\cdot)$ и света, испытавшего в среде многократное рассеяние $G^*(\cdot)$, :

$$G(\cdot) = G_0(\cdot) + G^*(\cdot). \quad (5)$$

Функция $G^*(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$LG^* = Q, \quad (6)$$

где оператор $L = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla + \varepsilon(\mathbf{r}) - \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \sigma(\mathbf{r}; \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}')(\cdot)$,

$$Q = \sigma(\mathbf{r}; \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}') \exp \left[- \int_0^z \varepsilon(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{a}u; u) \frac{du}{\mu_1} \right] \times \\ \times \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{a}z) \delta(t - t' - z/\mu_1 c). \quad (7)$$

Оператор L и функцию Q представим в виде суммы детерминированных L_0 и Q_0 и случайных V и F компонент:

$$L = L_0 + V, \\ Q = Q_0 + F,$$

где

$$L_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla + \langle \varepsilon \rangle - \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \langle \sigma(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}') \rangle (\cdot), \\ V = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \tilde{\sigma}(\mathbf{r}; \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}') (\cdot), \quad (8)$$

$\langle \varepsilon \rangle$, $\langle \sigma(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}') \rangle$, $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\sigma}(\mathbf{r}; \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}')$ — детерминированные и случайные компоненты показателей ослабления и направленного светорассеяния, угловые скобки — знак математического усреднения,

$$Q_0 = \left\langle \sigma(\mathbf{r}; \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}') \exp \left[- \int_0^z \varepsilon(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{a}u; u) \frac{du}{\mu_1} \right] \right\rangle \times \\ \times \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{a}z) \delta(t - t' - z/\mu_1 c). \quad (9)$$

Аналогично функцию Грина будем искать также в виде суперпозиции детерминированной $G_0^*(\cdot)$ и случайной частей $\tilde{G}^*(\cdot)$;

$$G^*(\cdot) = G_0^*(\cdot) + \tilde{G}^*(\cdot). \quad (10)$$

Уравнение (6) легко можно свести к эквивалентной системе двух уравнений.

$$L_0 G_0^* = Q_0 - \langle V \tilde{G}^* \rangle, \\ L_0 \tilde{G}^* = F + \langle V \tilde{G}^* \rangle - V G_0^* - V \tilde{G}^*. \quad (11)$$

Проанализируем структуру второго уравнения системы (11). Правую часть этого уравнения можно переписать в виде: $Q - \langle Q \rangle + \langle VG \rangle - VG$. Очевидно, что разность $Q - \langle Q \rangle$ описывает флуктуации однократно рассеянного света, разность $\langle VG \rangle - VG$ — флуктуации многократно рассеянного. Нетрудно оценить амплитуду этих флуктуаций. Максимальное значение Q будет достигаться в том случае, когда в точку $\{\mathbf{r}; z\}$ прямопрошедший свет будет попадать не проходя через неоднородности среды. Величина Q в этом случае будет порядка $\sigma(\mathbf{r}; \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}')$, среднее значение Q — порядка $\sigma(\mathbf{r}; \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}')(1 - p_0)$, где p_0 — безусловная вероятность наличия облака. Таким образом, амплитуда флуктуаций члена $Q - \langle Q \rangle$ равна $\sigma(\mathbf{r}; \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}')$.

Как правило, индикатрисы рассеяния природных сред типа атмосферы и океана сильно анизотропны. В этом случае угловая диаграмма функции $G(\cdot)$ много шире угловой диаграммы $\sigma(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}')$ и поэтому

$$VG(\cdot) \simeq \tilde{\kappa}^*(\mathbf{r}) G(\cdot),$$

где $\tilde{\kappa}^*$ — случайная часть эффективного показателя поглощения света средой [9]. Так как величина $\kappa^* < \sigma(\mathbf{r}; \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}')$, то, очевидно, в правой части второго уравнения системы (11) основной вклад дает член F и поэтому оператор V можно считать малым и использовать для решения системы методы теории возмущений.

Отметим одну принципиальную особенность данного подхода. Как известно, методы теории возмущений применимы лишь тогда, когда возмущающий оператор исследуемого уравнения мал. При стандартных подходах [3–5] в качестве возмущающего малого оператора выбирается оператор, описывающий случайные флуктуации параметров среды. По этой причине такие подходы принципиально не могут применяться при сильных флуктуациях среды. В данном подходе малым считается оператор, описывающий влияние в системе (11) флуктуаций многократно рассеянного света по сравнению с влиянием флуктуаций однократно рассеянного. А так как это соотношение выполняется и при слабых, и при сильных флуктуациях среды, то описанный в данной статье подход с успехом может применяться для описания распространения излучения и в средах с сильными флуктуациями параметров рассеяния.

Введем вспомогательный параметр s и систему (11) перепишем в виде

$$\begin{aligned} L_0 G_0^* &= Q_0 - s \langle V \tilde{G}^* \rangle, \\ L_0 \tilde{G}^* &= F + s \langle V \tilde{G}^* \rangle - s V G_0^* - s V \tilde{G}^*, \end{aligned} \quad (12)$$

а функцию $\tilde{G}^*(\cdot)$ будем искать в виде разложения $\tilde{G}^*(\cdot)$ в ряд по параметру s :

$$\tilde{G}^*(\cdot) = \sum_{\kappa=0}^{\kappa_0} \tilde{G}_\kappa^*(\cdot) s^\kappa. \quad (13)$$

При $\kappa_0 = 0$ вместо системы (12) имеем два независимых уравнения для $G_0^*(\cdot)$ и $\tilde{G}_0^*(\cdot)$:

$$\begin{aligned} L_0 G_0^* &= Q_0 - \langle V L_0^{-1} F \rangle, \\ L_0 \tilde{G}_0^* &= F, \end{aligned} \quad (14)$$

где L_0^{-1} — оператор, обратный L_0 . При $\kappa = 1$ система (12) сводится к трем независимым уравнениям для G_0^* , \tilde{G}_0^* , \tilde{G}_1^* :

$$\begin{aligned} (L_0 - \langle V L_0^{-1} V \rangle) G_0^* &= Q_0 - \langle V L_0^{-1} F \rangle - \langle V L_0^{-1} \langle V L_0^{-1} F \rangle \rangle, \\ L_0 \tilde{G}_0^* &= F, \end{aligned} \quad (15)$$

$$L_0 \tilde{G}_1^* = \langle V L_0^{-1} F \rangle - V G_0^* - V L_0^{-1} F.$$

Аналогичные уравнения могут быть записаны для произвольных κ_0 . Как видно из (12), при $\kappa_0 = 0$ при расчете среднего значения учитываются линейные по s члены, при $\kappa_0 = 1$ — квадратичные. По этой причине решения уравнений (14) в дальнейшем будем называть решениями уравнения переноса в линейном приближении, уравнений (15) — решениями в квадратичном приближении.

Сфера применения этих уравнений значительно шире, чем метода [8], так как здесь нет никаких ограничений на соотношение горизонтальных масштабов неоднородностей и ширины функции Грина. Входящие в уравнения для $G_0^*(\cdot)$ члены, содержащие оператор V , описывают радиационное взаимо-

действие неоднородностей, например, облаков. Единственным ограничением уравнений (14), (15) является требование малости флуктуаций многократно рассеянного света по сравнению с флуктуациями однократно рассеянного. Важно отметить, что в линейном приближении уравнения для G_0^* и \tilde{G}_0^* аналогичны уравнению переноса излучения в детерминированных средах, освещаемых излучателями со случайным распределением яркости. Это обстоятельство позволяет использовать для нахождения средних значений и вторых моментов яркости богатый арсенал аналитических методов решения уравнения переноса.

В качестве иллюстрации эффективности обсуждаемого здесь подхода найдем среднюю яркость излучения, создаваемую в стохастическом слое бесконечно протяженным мононаправленным стационарным излучателем. Для решения задачи будем использовать малоугловое приближение уравнения переноса, справедливое для сред с сильно анизотропной индикатрисой рассеяния. Пренебрегая малыми членами порядка s в правой части уравнений (14)–(15), описывающими радиационное взаимодействие неоднородностей, для средних значений яркости $B_0(z; \mathbf{\Omega})$ в линейном приближении будем иметь:

$$\mu_0 \frac{dB_0}{dz} + \langle \varepsilon \rangle B_0 = \frac{\langle \sigma^* \rangle}{4\pi} \int_{4\pi} i_0(\mathbf{\Omega}_\perp - \mathbf{\Omega}'_\perp) B_0(\mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + Q_0(z; \mathbf{\Omega}), \quad (16)$$

где μ_0 – направляющий косинус с осью Z единичного вектора $\mathbf{\Omega}_0$, определяющего направление освещения среды; $\langle \sigma^* \rangle$ – среднее значение эффективного показателя рассеяния [9]; $i_0(\gamma)$ – индикатриса рассеяния среды.

Для записи уравнения переноса в квадратичном приближении предварительно найдем результат действия оператора $\langle VL_0^{-1}V \rangle$ на функцию $B_0(\cdot)$. Обозначим через $\Gamma_0(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}'; \mathbf{\Omega}_\perp - \mathbf{\Omega}'_\perp; z; z')$ найденную в малоугловом приближении объемную функцию Грина детерминированного уравнения переноса. Тогда

$$L_0^{-1}VB_0(\cdot) = \int d\mathbf{r}' \tilde{\kappa}^*(\mathbf{r}') \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' B_0(\mathbf{\Omega}') \Gamma_0(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}'; \mathbf{\Omega}_\perp - \mathbf{\Omega}'_\perp; z; z'), \quad (17)$$

$$\langle VL_0^{-1}V \rangle B_0(\cdot) = \int d\mathbf{r}' R_{\kappa\kappa}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' B_0(\mathbf{\Omega}') \Gamma_0(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}'; \mathbf{\Omega}_\perp - \mathbf{\Omega}'_\perp; z; z')$$

где $R_{\kappa\kappa}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \langle \tilde{\kappa}^*(\mathbf{r}) \tilde{\kappa}^*(\mathbf{r}') \rangle$ – корреляционная функция эффективного показателя поглощения. В дальнейшем случайное поле будем считать горизонтально однородным, а $R_{\kappa\kappa}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = R_{\kappa\kappa}(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}'; z; z')$.

На основании (15), (17), пренебрегая несущественными членами в правой части (15), для $B_0(\cdot)$ получим

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{dB_0}{dz} - \int d\mathbf{r}' R_{\kappa\kappa}(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}'; z; z') \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' B_0(\mathbf{\Omega}') \Gamma_0(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}'; \mathbf{\Omega}_\perp - \mathbf{\Omega}'_\perp; z; z') + \\ + \langle \varepsilon \rangle B_0 = \frac{\langle \sigma^* \rangle}{4\pi} \int_{4\pi} i_0(\mathbf{\Omega}_\perp - \mathbf{\Omega}'_\perp) B_0(\mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + Q_0(z; \mathbf{\Omega}). \end{aligned} \quad (18)$$

Введем Фурье образ функции $B_0(\mathbf{\Omega})$:

$$\hat{B}_0(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{\Omega}_\perp B_0(\mathbf{\Omega}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Omega}_\perp}. \quad (19)$$

Из (18) следует уравнение для $\hat{B}_0(\mathbf{P})$:

$$\mu_0 \frac{d\hat{B}_0}{dz} + [\langle \varepsilon \rangle - \langle \sigma^* \rangle F(\mathbf{p})] \hat{B}_0 - \int_0^z dz' \hat{B}_0(z') L(z; z') = \hat{Q}_0(z; \mathbf{p}), \quad (20)$$

где $\hat{Q}_0(z; \mathbf{p})$ – Фурье образ функции $Q_0(z; \mathbf{\Omega})$;

$$L(z; z') = \int \frac{d\mathbf{\omega}}{4\pi^2} \hat{\Gamma}_0(\mathbf{\omega}; \mathbf{p}; z; z') \hat{S}_\kappa(-\mathbf{\omega}; z; z'), \quad (21)$$

$\hat{\Gamma}_0(\omega; \mathbf{p}; z; z')$ — пространственно-угловой спектр функции Грина детерминированного уравнения переноса;

$$\hat{S}_\kappa(\omega; \mathbf{z}; z') = \int d\omega R_{\kappa\kappa}(\xi; \mathbf{z}; z') e^{-i\omega \cdot \xi} \quad (22)$$

— спектр мощности флуктуаций эффективного показателя поглощения;

$$F(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \gamma i_0(\gamma) J_0(p\gamma) d\gamma, \quad (23)$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Согласно L9, 10]

$$\hat{\Gamma}_0(\omega; \mathbf{p}; z; z') = \exp \left\{ - [\langle \varepsilon \rangle - \langle \sigma^* \rangle F(\mathbf{p})] \frac{(z - z')}{\mu_0} \right\}. \quad (24)$$

Аналогичным образом может быть записано и уравнение для Фурье образа (19) в линейном приближении

$$\mu_0 \frac{d\hat{B}_0}{dz} + [\langle \varepsilon \rangle - \langle \sigma^* \rangle F(\mathbf{p})] \hat{B}_0 = \hat{Q}_0(\mathbf{z}; \mathbf{p}), \quad (25)$$

При сопоставлении (20) и (25) видно, что линейное приближение может применяться при $\langle \kappa^* \rangle \gg \sigma_k^2 l_\Pi$ где l_Π — продольный масштаб неоднородностей, σ_k^2 — дисперсия $\kappa^*(r)$. Уравнение (25) решается легко:

$$\hat{B}_0 = \int_0^z \hat{Q}_0(\omega; \mathbf{p}) \exp[-\kappa(p)(z - \omega)] d\omega, \quad (26)$$

где $\kappa(p) = \langle \varepsilon \rangle - \langle \sigma^* \rangle F(\mathbf{p})$. Точное решение уравнения (20) в явном виде получить не удастся. По этой причине приведем здесь несколько приближенных решений этого уравнения.

Для мелкомасштабных по оси Z флуктуаций параметров среды с продольным масштабом $l_\Pi \ll H$ для описания распространения излучения может использоваться модель δ -коррелированного случайного процесса. В рамках этой модели

$$R_{\kappa\kappa}(\xi; \mathbf{z}; z') = R_{\kappa\kappa}^*(\xi; \mathbf{z}) \delta(z - z'), \quad (27)$$

где

$$R_{\kappa\kappa}^*(\xi; \mathbf{z}) = \int_0^z R_{\kappa\kappa}(\xi; \mathbf{z}; z') dz'.$$

Для модели (27), как легко убедиться, \hat{B}_0 также описывается выражением типа (26) с заменой параметра $\kappa(p)$ параметром

$$\kappa'(p) = \kappa(p) - R_{\kappa\kappa}^*(0; \mathbf{z}). \quad (28)$$

Получим сейчас приближенное решение уравнения (20) в другом предельном случае, когда $l_\Pi \gg H$. В этом случае можно считать, что входящая в (20) функция $L(z; z')$ относительно слабо зависит от переменной z . Вводя обозначение

$$\Psi = \int_0^z dz' \hat{B}_0(z') L(\mathbf{z}; z'),$$

вместо (20) можем записать эквивалентную систему уравнений

$$\mu_0 \frac{d\hat{B}_0}{dz} + \kappa(p) \hat{B}_0 - \Psi = \hat{Q}_0(z; p),$$

$$\frac{d\Psi}{dz} = \hat{B}_0 L(z; z) + \int_0^z dz' \hat{B}_0(z') \frac{dL(z; z')}{dz}.$$

Считая, что в последнем уравнении член, содержащий производную, пренебрежимо мал, вместо интегро-дифференциального уравнения (20) запишем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\mu_0 \frac{d^2 \hat{B}_0}{dz^2} + \kappa(p) \frac{d\hat{B}_0}{dz} - L(z; z) \hat{B}_0 = \frac{d\hat{Q}_0}{dz}(z; p),$$

которое в ряде случаев может быть решено точно. В частности, для стационарного по z случайного процесса $\kappa^*(r)$

$$\hat{B}_0 = C_1 e^{-\frac{\kappa(p)-l}{2}z} + C_2 e^{-\frac{\kappa(p)+l}{2}z} + \frac{2}{l} \int_0^z d\hat{Q}_0(t) e^{\frac{1}{2}\kappa(p)(t-z)} \operatorname{sh} \frac{l}{2}(z-t), \quad (29)$$

где постоянные C_1 и C_2 находятся из условий: $\hat{B}_0 = 0$ при $z = 0$, $\hat{B}_0 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $l = (\kappa_p^2 + 4\sigma_\kappa^2)^{1/2}$.

Угловую структуру светового поля можно найти, выполняя обратное преобразование Фурье. На основании выражений (26), (29) очень просто может быть найдена освещенность в среде $E = \mu_0 \hat{B}_0(0)$ и коэффициент диффузного пропускания рассеянного излучения $T = \hat{B}_0(0)$.

В качестве примера запишем выражение для коэффициента диффузного пропускания для модели облачного слоя [1, 11]. В рамках этой модели:

$$\hat{Q}_0(z; 0) = \sum_{j=1}^2 D_j p_0 \sigma_0 e^{-\lambda_j z / \mu_0}, \quad (30)$$

где

$$D_1 = \frac{\Lambda_2 - \sigma_0}{\Lambda_2 - \Lambda_1}, \quad D_2 = \frac{\sigma_0 - \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1},$$

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_0 + A \mp \sqrt{(\sigma_0 + A)^2 - 4A p_0 \sigma_0}),$$

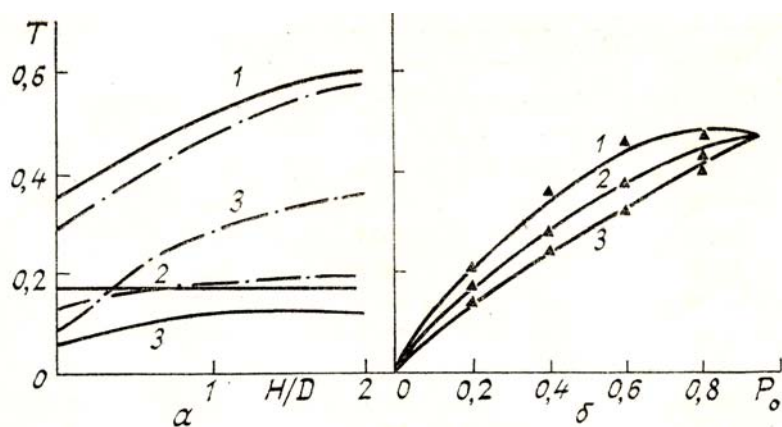
$$A = A_* \sin \vartheta_0 (\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0),$$

A_*^{-1} — характерный масштаб неоднородностей облачной среды; σ_0 — показатель рассеяния облака; p_0 — безусловная вероятность наличия облаков; ϑ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы освещения. Для модели (30) решение (29) имеет вид;

$$T = \sum_{j=1}^2 \frac{4\Lambda_j D_j \sigma_0 p_0}{(\kappa_0^* - 2\Lambda_j)^2 - l^2} \left[e^{-\frac{\kappa_0^* + l}{2\mu_0} H} - e^{-\frac{\Lambda_j}{\mu_0} H} \right], \quad (31)$$

где $\kappa_0^* = p_0 \sigma_0 \Phi$, Φ — доля света, рассеиваемого назад в однократном акте рассеяния.

На рисунке приведены результаты сопоставления значений T , полученных по формуле (31) и методом Монте-Карло [1, 12]. Как видно из рисунка, существенные отличия данных наблюдаются лишь для оптически толстых облаков при наклонных углах освещения. Причина этому — малая точность малоуглового приближения для оптически толстых рассеивающих слоев.



Сопоставление различных методов расчёта коэффициента пропускания T : а) при $A = 1,65(p_0 - 0,5)^2 + 1,04/D$, где D — характерный размер облака, $\sigma_0 H = 5,0$, $\vartheta_0 = 69^\circ$, $\varphi_0 = 0$ (1), $\sigma_0 H = 30$, $\vartheta_0 = \varphi_0 = 0$ (2), $\vartheta_0 = 60^\circ$, $\varphi_0 = 0$ (3); б) при $A = (2,32p_0^2 - 0,92p_0 + 1,69) / D$, $\vartheta_0 = 30^\circ$, $\varphi_0 = 45^\circ$, $\sigma_0 H = 15$, $H/D = 0,25$ (1), $0,50$ (2), $1,0$ (3). Расчет по (31) — сплошная линия, расчет методом Монте-Карло — штрихпунктирные линии и треугольники

1. Титов Г. А. // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 4. С. 3—18.
2. Каргин Б. А. Статистическое моделирование поля солнечной радиации в атмосфере. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. 205 с.
3. Учайкин В. В. // Изв. вузов. Сер. Физика. 1968. № 10. С. 86—91.
4. Кольчужкин А. М., Учайкин В. В. // Изв. вузов. Сер. Физика. 1971. № 3. С. 65—68.
5. Белов В.Ф., Глазов Г.Н., Креков Г.М. Распространение оптических волн в атмосфере. Новосибирск: Наука, 1975. С. 95—103.
6. Кацев И. Л. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1983. Т. 19. № 11. С. 1172—1179.
7. Долин Л. С. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 77—80.
8. Валентюк А. Н. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 12. С. 1085—1088
9. Валентюк А. Н. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1987. Т. 23. № 8. С. 839—850.
10. Долин Л. С., Савельев В. А. // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 11. С. 1310—1317.
11. Журавлева Т. Б., Титов Г. А. Оптико-метеорологические исследования атмосферы. // Новосибирск: Наука, 1987. С. 108—119.
12. Титов Г. А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1985. Т. 21. № 9. С. 940—948.

Институт физики АН БССР,
г. Могилев

Поступила в редакцию
11 декабря 1990 г.

A. N. Valentyuk. A New Technique of Analytical Calculations of the Light Fields in Stochastic Scattering Media.

A new technique for analytical solution of the radiation transfer equation in a linear and nonlinear approaches for the case of stochastic scattering media is proposed,