

Ю.Б. Попов, А.И. Попова

## Оценка потенциальной точности алгоритма экстраполяции метеорологических величин методом пространства состояний

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 9.11.2005 г.

Получено аналитическое выражение для дисперсии ошибки экстраполяции, позволяющее для различных начальных условий рассчитать ошибку пространственного прогноза метеовеличины для любого интервала времени измерения. Для анализа был выбран алгоритм фильтрации, использующий в качестве модели наблюдений пространственный полином второго порядка.

В ранее опубликованных статьях [1, 2] была предложена методика синтеза алгоритмов пространственной экстраполяции значений метеорологических величин на основе фильтрации Калмана. Исследования точности всех алгоритмов проводились с использованием реальных аэрологических данных. Окончательная ошибка оценивания зависела от условий, объема и характеристик конкретной выборки измерений. Возникает закономерный вопрос о потенциальных возможностях алгоритмов и о поведении ошибок экстраполяции во времени по мере поступления измерений. В данной статье рассматривается полученное нами аналитическое выражение для дисперсии ошибки экстраполяции, позволяющее для различных начальных условий рассчитать ошибку пространственного прогноза метеовеличины для любого интервала времени измерения. Для анализа был выбран алгоритм фильтрации, использующий в качестве модели наблюдений пространственный полином второго порядка.

### Постановка задачи

Пусть значение метеорологической величины  $\xi_i(t)$  в  $i$ -й точке заданной плоскости в момент времени  $t$  определяется полиномом второго порядка:

$$\xi_i(t) = X_1(t) + X_2(t)x_i + X_3(t)y_i + X_4(t)x_i y_i + X_5(t)x_i^2 + X_6(t)y_i^2, \quad (1)$$

где  $x_i$  и  $y_i$  – декартовы координаты станций, проводящих измерения;  $X_1(t) - X_6(t)$  – неизвестные коэффициенты, определяющие значение метеорологической величины в каждый момент времени для любой точки в пределах мезомасштабного полигона. Оценка неизвестных коэффициентов полинома осуществляется с помощью дискретного варианта фильтра Калмана. При этом вектор состояния для дискретных моментов времени  $t_k$  имеет вид

$$\mathbf{X}(k) = [X_1(k), X_2(k), X_3(k), X_4(k), X_5(k), X_6(k)]^T. \quad (2)$$

Здесь символ  $T$  означает транспонирование. Динамика изменения составляющих вектора состояний (2) может быть описана системой разностных уравнений следующего вида ( $l = 1, \dots, 6$ ):

$$X_l(k+1) = X_l(k) + \omega_l(k), \quad (3)$$

где

$$\Omega = [\omega_1(k) \omega_2(k) \omega_3(k) \omega_4(k) \omega_5(k) \omega_6(k)]^T$$

– случайные возмущения системы (порождающие шумы, шумы состояния). Модель измерений представлена в виде аддитивной смеси истинного значения метеорологического параметра  $\xi_i(k)$  и ошибки измерения  $\varepsilon_i(k)$ :

$$Y_i(k) = \xi_i(k) + \varepsilon_i(k). \quad (4)$$

В терминах переменных состояния (2) модель измерений (4) можно записать [2]:

$$Y_i(k) = X_1(k) + X_2(k)x_i + X_3(k)y_i + X_4(k)x_i y_i + X_5(k)x_i^2 + X_6(k)y_i^2 + \varepsilon_i(k). \quad (5)$$

Уравнения (3) и (5) полностью определяют структуру линейного фильтра Калмана, обеспечивающего оценку коэффициентов полинома (1) с минимальной среднеквадратической ошибкой. Алгоритм пространственной экстраполяции в заданную точку  $j$  полигона имеет вид

$$\hat{Y}_j(k) = \hat{X}_1(k) + \hat{X}_2(k)x_j + \hat{X}_3(k)y_j + \hat{X}_4(k)x_j y_j + \hat{X}_5(k)x_j^2 + \hat{X}_6(k)y_j^2, \quad (6)$$

где  $\hat{X}_i(k)$ ,  $\hat{Y}_j(k)$  – оценка вектора состояния и экстраполированное значение метеовеличины для момента времени  $k$ ;  $x_j$ ,  $y_j$  – координаты точки экстраполяции. Дисперсия ошибки оценивания (пространственной экстраполяции) метеорологической переменной  $Y_j(k)$  на каждом шаге прогноза, усредненная по ансамблю реализаций, определяется выражением

$$D_Y(k) = E\left\{\left[Y_j(k) - \hat{Y}_j(k)\right]^2\right\}, \quad (7)$$

где  $E$  – оператор математического ожидания;  $Y_j(k)$  – истинное значение прогнозируемой переменной;  $\hat{Y}_j(k)$  – оцененное значение прогнозируемой переменной. Подставляя уравнение (6) в уравнение (7), можно получить зависимость дисперсии ошибки оценивания  $Y_j(k)$  от ошибок оценивания коэффициентов полинома  $X_j(k)$ :

$$\begin{aligned} D_Y(t) = & D_{11}(t) + x_j^2 D_{22}(t) + y_j^2 D_{33}(t) + x_j^2 y_j^2 D_{44}(t) + \\ & + x_j^4 D_{55}(t) + y_j^4 D_{66}(t) + 2x_j y_j D_{12}(t) + 2y_j D_{13}(t) + \\ & + x_j y_j D_{14}(t) + 2x_j^2 D_{15}(t) + 2y_j^2 D_{16}(t) + 2x_j y_j D_{23}(t) + \\ & + 2x_j^2 y_j D_{24}(t) + 2x_j^3 D_{25}(t) + 2x_j y_j^2 D_{26}(t) + \\ & + 2x_j y_j^2 D_{34}(t) + 2x_j^2 y_j D_{35}(t) + 2y_j^3 D_{36}(t) + \\ & + 2x_j^3 y_j D_{45}(t) + 2x_j y_j^3 D_{46}(t) + 2x_j^2 y_j^2 D_{56}(t), \quad (8) \end{aligned}$$

где  $D_{lm}(k)$  – элементы матрицы ковариаций ошибок оценивания коэффициентов  $\mathbf{D}(t_k)$  (2).

## Методика решения задачи

Для линейного фильтра Калмана расчет матрицы ковариаций ошибок оценивания элементов вектора состояний можно выполнить априори, с помощью решения матричного дифференциального уравнения Риккати [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{D}}{dt} = & \mathbf{F}(t)\mathbf{D}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{R}_\Omega(t)\mathbf{G}^T(t) - \\ & - \mathbf{D}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}_\epsilon^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{D}(t), \quad (9) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}(t) = 0$  – переходная матрица состояний;  $\mathbf{G}(t)$  – единичная переходная матрица шумов состояний ( $\mathbf{diag} \mathbf{G}(t) = |1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1|$ );  $\mathbf{R}_\Omega(t) = 0$  – матрица ковариаций шумов состояний, при условии, что шумы отсутствуют (3);

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & y_{11} & x_{11} \cdot y_{11} & (x_{11})^2 & (y_{11})^2 \\ 1 & x_{22} & y_{22} & x_{22} \cdot y_{22} & (x_{22})^2 & (y_{22})^2 \\ 1 & x_{33} & y_{33} & x_{33} \cdot y_{33} & (x_{33})^2 & (y_{33})^2 \\ 1 & x_{44} & y_{44} & x_{44} \cdot y_{44} & (x_{44})^2 & (y_{44})^2 \\ 1 & x_{55} & y_{55} & x_{55} \cdot y_{55} & (x_{55})^2 & (y_{55})^2 \\ 1 & x_{66} & y_{66} & x_{66} \cdot y_{66} & (x_{66})^2 & (y_{66})^2 \end{pmatrix}$$

– переходная матрица измерений;  $\mathbf{R}_\epsilon(t)$  – ковариационная матрица шумов наблюдений ( $\mathbf{diag} \mathbf{R}_\epsilon(t) = |\sigma_\epsilon^2 \sigma_\epsilon^2 \sigma_\epsilon^2 \sigma_\epsilon^2 \sigma_\epsilon^2 \sigma_\epsilon^2|$ ).

Для решения (9) необходимо задать начальное значение матрицы дисперсий ошибок оценивания  $\mathbf{D}(0)$ , которая равна матрице дисперсий компонент оцениваемого процесса  $\mathbf{X}(t)$  в момент  $t = 0$ . Значение этой матрицы при синтезе алгоритмов задается на основе априорных данных. В работе использован

один из способов аналитического решения уравнения (9), подробно описанный в [4]. Принцип решения основывается на замене (9) системой линейных дифференциальных уравнений с матрицей  $2n \times 2n$  (где  $n$  – размерность вектора состояний). Ниже приведено замкнутое решение уравнения Риккати в матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) = & [\mathbf{C}_{11}(t)\mathbf{D}(0) + \mathbf{C}_{12}(t)] \times \\ & \times [\mathbf{C}_{21}(t)\mathbf{D}(0) + \mathbf{C}_{22}(t)]^{-1}. \quad (10) \end{aligned}$$

Для определения блочной матрицы  $\mathbf{C}(t)$  используется выражение

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11}(t) & \mathbf{C}_{12}(t) \\ \mathbf{C}_{21}(t) & \mathbf{C}_{22}(t) \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{x}}^{-1} \{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1}, \quad (11)$$

где  $\dot{\mathbf{x}}^{-1}$  – операция обратного преобразования Лапласа;  $\mathbf{I}$  – единичная матрица ( $2n \times 2n$ );  $s$  – параметр преобразования Лапласа;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G}\mathbf{R}_\Omega\mathbf{G}^T \\ \mathbf{H}^T\mathbf{R}_\epsilon^{-1}\mathbf{H} & -\mathbf{F}^T \end{pmatrix}$$

– вспомогательная блочная матрица.

Для моделей (3) и (5) блочная матрица  $\mathbf{A}$  будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{R}_\epsilon^{-1} \cdot \mathbf{H} & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

## Результаты исследования

Проведены исследования среднеквадратической ошибки экстраполяции  $\sigma_Y = \sqrt{D_Y(t)}$  для трех конфигураций полигона рис. 1, а, включающих станции: 1 – Бологое–Сухиничи–Смоленск–Рязань–Москва; 2 – Смоленск–Сухиничи–Курск–Рязань–Москва; 3 – Сухиничи–Курск–Рязань–Нижний Новгород–Москва.

Начальная ковариационная матрица ошибок задавалась в диагональном виде:  $\mathbf{D}(0) = \sigma^2 \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица с размерностью  $(n \times n)$ . Период исследований – 5 сут, с темпом поступления измерений 12 ч [1]. Для конфигурации полигона 1 на рис. 1, б приведены результаты исследований влияния начальных значений  $\mathbf{D}(0)$  на  $\sigma_Y$  (при  $\sigma = 1$ ; 2; 3 и  $\sigma_\epsilon = 1$ ). Исследовано изменение  $\sigma_Y$  для разных станций и конфигураций полигона рис. 1, в (при  $\sigma = 2$ ,  $\sigma_\epsilon = 1$ ). На рис. 1, г представлены графики изменения  $\sigma_Y$  для всех рассмотренных конфигураций полигона с точкой экстраполяции станции г. Москва. Проведенное исследование влияния ошибки измерения  $\sigma_\epsilon$  на  $\sigma_Y$  не выявило значимой зависимости в диапазоне значений  $\sigma_\epsilon = 0,5$ ; 1; 1,5; 2 и  $\sigma = 1$ ; 1,5; 2. Все расчеты проводились при помощи программного обеспечения Mathcad 2001.

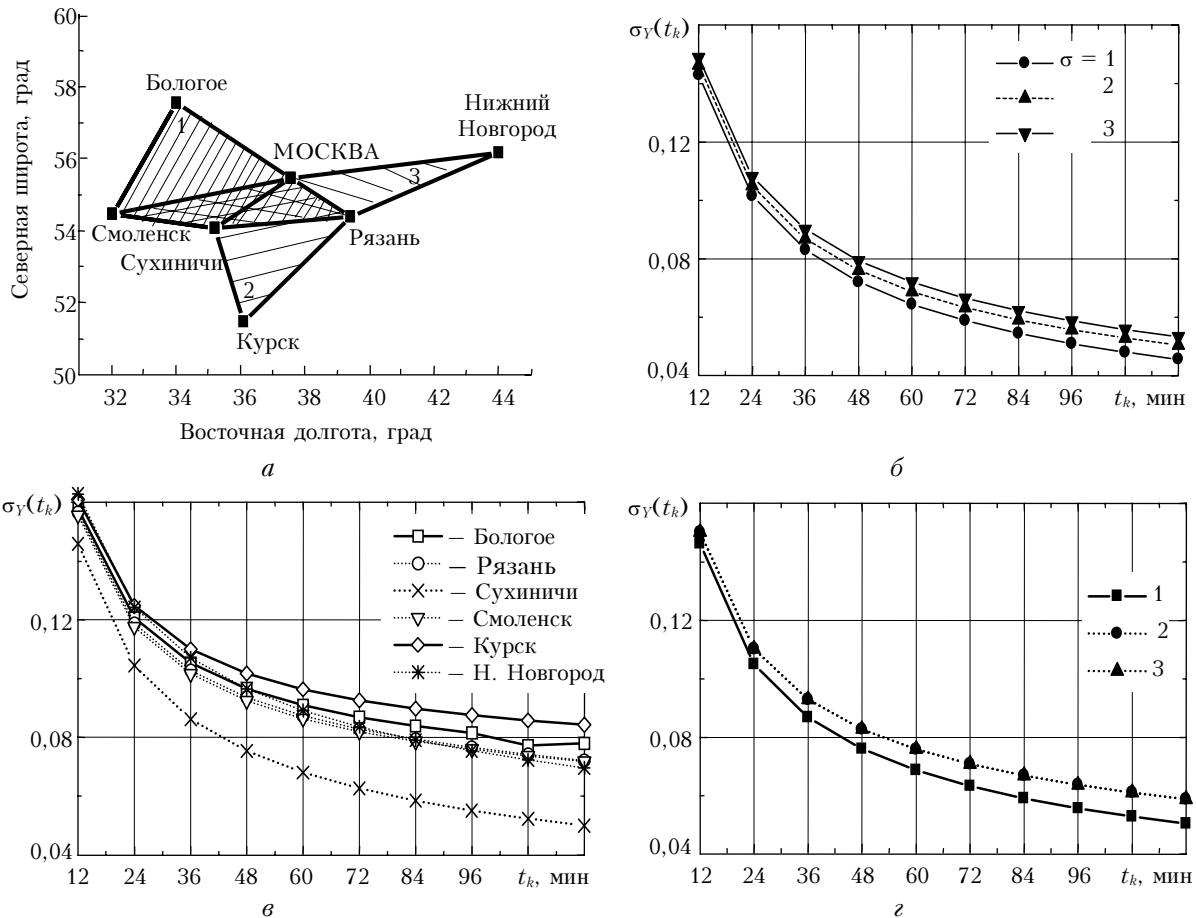


Рис. 1. Схема вариантов конфигураций полигона (а), а также графики поведения среднеквадратических ошибок оценивания метеовеличины во времени: б – для станции Москва (полигон 1) при  $\sigma = 1, 2, 3$  и  $\sigma_\epsilon = 1$ ; в – для станций Бологое, Рязань, Сухиничи, Смоленск (полигон 1), для станции Курск (полигон 2), для станции Нижний Новгород (полигон 3); г – для станции Москва при  $\sigma_\epsilon = 1$  и  $\sigma = 2$  для конфигураций полигона (1, 2, 3)

### Выводы

1) Полученные результаты позволяют оценить потенциальную точность экстраполяции при различных значениях ошибок измерения.

2) Наибольшее влияние на скорость сходимости фильтра оказывает значение элементов начальной матрицы ковариаций  $\sigma$ , при этом минимум  $\sigma_\gamma$  обеспечивается при  $\sigma = 1, 0$ .

3) Исследование влияния ошибки измерения  $\sigma_\epsilon$  на  $\sigma_\gamma$  не выявило значимой зависимости в диапазоне значений  $\sigma_\epsilon = 0,5; 1; 1,5; 2$  при  $\sigma = 1; 1,5; 2$ .

4) Минимальная ошибка  $\sigma_\gamma$  получена для ст. Москва и Сухиничи, которые расположены внутри выбранных полигонов, что полностью согласуется с данными [5].

1. Комаров В.С., Попов Ю.Б., Кураков В.А., Куркушев В.В., Попова А.И. Алгоритмы пространственно-временного прогноза метеопараметров на основе фильтра Калмана с использованием полиномиальной модели второго порядка // Оптика атмосф. и океана. 2002. Т. 15. № 11. С. 1007–1011.
2. Комаров В.С., Попов Ю.Б., Попова А.И. Адаптивный алгоритм пространственного прогнозирования метеорологических полей на основе фильтра Калмана и полиномиальной модели второго порядка // Оптика атмосф. и океана. 2004. Т. 17. № 7. С. 558–562.
3. Assimakis N.D., Lainiotis D.G., Sanida F.L. A survey of recursive algorithms for the solution of the discrete time Riccati equation // Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications. 1997. V. 30. N 4. P. 2409–2420.
4. Первачев С.В. Радиоавтоматика. М.: Радио и связь, 1982. 295 с.
5. Гандин Л.С., Казан Р.Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 359 с.

*Yu.B. Popov, A.I. Popova. Estimate of potential accuracy of the algorithm for meteorological parameter extrapolation by the state space method.*

An analytical formula is derived for extrapolation error dispersion allowing a computation of the spatial prognosis error for some meteoroparameter for any initial conditions and any measurement interval. For the analysis, the filtration algorithm was chosen, which uses a spatial polynomial of the second order as the observational model.