<Оптика атмосферы и океана>, **6**, №11 (1993)

УДК 535.36

Л.Е. Парамонов

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ МИ ДЛЯ СФОКУСИРОВАННОГО ПУЧКА

Решена задача рассеяния сфокусированного падающего пучка сферической частицей. Рассмотрены частные случаи, допускающие аналитическое решение. Приведены численные примеры, иллюстрирующие зависимость индикатрисы рассеяния от геометрии падающего пучка.

1. Введение

Решение задачи рассеяния осесимметричного сфокусированного пучка элементарным рассеивающим объемом, состоящим из независимых хаотично ориентированных рассеивателей, приведено в [1]. При этом использовано свойство аддитивности параметров Стокса и матриц Мюллера одиночных частиц, которое является следствием некогерентности рассеянного частицами излучения.

Такой подход не может быть использован для одиночной частицы [1], необходимость же решения этой задачи продиктована потребностью учета геометрии эксперимента, например, в оптических счетчиках частиц с различной геометрией падающего пучка.

В настоящей статье рассматривается обобщение классического решения Ми для случая сфокусированного падающего пучка. Исследуется влияние геометрии падающего пучка на пространственное распределение рассеянного излучения.

Полагаем, что падающий пучок представляет собой суперпозицию локальных пучков (плоских электромагнитных волн), распространяющихся внутри конического телесного угла с линейным углом $2\nu_0$, ось которого совпадает с осью Z, а результат взаимодействия падающего излучения с частицей есть суперпозиция результатов взаимодействия каждого локального пучка с частицей, при этом рассеянные волны когерентны.

2. LP- и CP-представления электрического поля

Для описания рассеяния плоской электромагнитной волны сферической частицей используем правую систему координат с началом в центре частицы. Направление распространения локального пучка определяется единичным вектором $\mathbf{n} = (\theta, \varphi)$, где θ, φ – соответственно полярный и азимутальный углы в сферической системе координат. Составляющие электрического поля определяются относительно меридиональной плоскости референции, содержащей направления оси Z, и распространения локального пучка

$$\mathbf{E} = E_1\,\boldsymbol{\theta} + E_2\,\boldsymbol{\varphi}\,, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\varphi}$ – единичные векторы соответственно параллельный и перпендикулярный плоскости референции. Отметим, что $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{n}$ являются ортами правой системы координат ($\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{n}$), вращение которой на угол α по часовой стрелке относительно направления $\mathbf{n}$ описывается в новой системе координат новыми составляющими электрического поля [2]

$$\begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Преобразование (2) имеет собственные значения $\exp(i\alpha)$, $\exp(-i\alpha)$ и соответствующие им нормированные собственные векторы $2^{-1/2}(1, i)$, $2^{-1/2}$ $(1, -i)$. Унитарное преобразование [2, 3]

$$\begin{bmatrix} E_{+1} \\ E_{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

может быть интерпретировано как изменение базиса двух линейно поляризованных состояний (1, 0), (0, 1) (LP-представление) к базису двух циркулярно поляризованных состояний $2^{-1/2}(1, i)$, $2^{-1/2}(1, -i)$ (CP-представление), которые соответствуют лево- и правоциркулярно поляризованному электромагнитному излучению единичной интенсивности. Эффект вращения в CP-представлении имеет более простой вид, чем в LP-представлении, и описывается диагональной матрицей [2, 3]

$$\begin{bmatrix} E'_{+1} \\ E'_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{+1} \\ E_{-1} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

3. Амплитудная матрица рассеяния

В так называемой дальней зоне ($r \gg 1$) составляющие падающей плоской электромагнитной и рассеянной сферической волн связаны соотношением [4]

$$\begin{bmatrix} E_1^s \\ E_2^s \end{bmatrix} = \frac{\exp(ikr)}{-ikr} \mathbf{S}(\mathbf{n}_s; \mathbf{n}_i) \begin{bmatrix} E_1^i \\ E_2^i \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $\mathbf{S}$ – амплитудная матрица рассеяния; $k = 2\pi\lambda^{-1}$ (λ – длина волны падающего излучения).

Обозначая преобразование (3) через $\mathbf{U}$ и используя (3), (5), получим выражение для амплитудной матрицы рассеяния в CP-представлении

$$\mathbf{C}(\mathbf{n}_s; \mathbf{n}_i) = \mathbf{U}\, \mathbf{S}(\mathbf{n}_s; \mathbf{n}_i)\, \mathbf{U}^{-1}, \tag{6}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} C_{+1+1} & C_{+1-1} \\ C_{-1+1} & C_{-1-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} S_{11} + iS_{12} - iS_{21} + S_{22} & S_{11} - iS_{12} - iS_{21} - S_{22} \\ S_{11} + iS_{12} + iS_{21} - S_{22} & S_{11} - iS_{12} + iS_{21} + S_{22} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Используя выражение для амплитудной матрицы рассеяния $\mathbf{S}$ [5, с. 636] и соотношение (7), после простых, но громоздких выкладок получим выражения для элементов амплитудной матрицы рассеяния [5–6]:

$$\begin{aligned}
C_{+1+1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (2n+1) \exp\left[\mathrm{im}(\varphi_s - \varphi_i)\, d_{1m}^n(\theta_s)\right] d_{1m}^n(\theta_i)\, (b_n + a_n); \\
C_{+1-1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (2n+1) \exp\left[\mathrm{im}(\varphi_s - \varphi_i)\, d_{1m}^n(\theta_s)\right] d_{-1m}^n(\theta_i)\, (b_n - a_n); \\
C_{-1+1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (2n+1) \exp\left[\mathrm{im}(\varphi_s - \varphi_i)\, d_{-1m}^n(\theta_s)\right] d_{1m}^n(\theta_i)\, (b_n - a_n); \\
C_{-1-1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (2n+1) \exp\left[\mathrm{im}(\varphi_s - \varphi_i)\, d_{-1m}^n(\theta_s)\right] d_{-1m}^n(\theta_i)\, (b_n + a_n),
\end{aligned} \tag{8}$$

где $d_{qm}^n(\theta)$ – функция Вигнера [7]; a_n, b_n – известные коэффициенты Ми [4].

4. Рассеянное поле для случая падающего сфокусированного пучка

Изменив плоскость референции для падающей плоской электромагнитной волны на меридиональную с $\varphi_i = 0$, учитывая (4), получим с точностью до множителя

$$\begin{aligned}
E_{+1}^s &= C_{+1+1} \exp(i\varphi_i)\, E_{+1}^i + C_{+1-1} \exp(-i\varphi_i)\, E_{-1}^i; \\
E_{-1}^s &= C_{-1+1} \exp(i\varphi_i)\, E_{+1}^i + C_{-1-1} \exp(-i\varphi_i)\, E_{-1}^i.
\end{aligned} \tag{9}$$

С учетом сделанных предположений и когерентности локальных рассеянных пучков составляющие рассеянного поля для случая сфокусированного пучка, распространяющегося в коническом телесном угле Ω, имеют вид

$$<E^s_{\pm 1}> = \int\limits_{\Omega} E^s_{\pm 1}\, d\omega \Big/ \int\limits_{\Omega} d\omega \ . \tag{10}$$

Рассмотрим ряд частных случаев формулы (10), допускающих аналитическое решение.

4.1. *Однородный по интенсивности и поляризации падающий пучок* ($E^i_{\pm 1}(\theta_i, \varphi_i) = const.$

Не ограничивая общности, считаем, что локальные пучки единичной интенсивности.

4.1.1. Левоциркулярно поляризованный свет ($E^i_{+1}=1, E^i_{-1}=0$)

После подстановки (9) в (10) и интегрирования получим

$$<E^s_{\pm 1}> = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\, e^{i\varphi_s}\, d^n_{\pm 11}(\theta_s) <d^n_{11}(\upsilon_0)> (b_n \pm a_n) \ , \tag{11}$$

где

$$<d^n_{11}(\upsilon_0)> = \int\limits_0^{\upsilon_0} d^n_{11}(\theta) \sin\theta \, d\theta / (1-\cos\upsilon_0) \ . \tag{12}$$

Аналитическое выражение интеграла (П11), а также основные свойства функций Вигнера приведены в Приложении.

4.1.2. Правоциркулярно поляризованный свет ($E^i_{+1}=0, E^i_{-1}=1$)

Используя (П6),

$$<E^s_{\pm 1}> = (1/2)\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\, e^{-i\varphi_s}\, d^n_{\pm 1-1}(\theta_s) <d^n_{11}(\upsilon_0)> (b_n \mp a_n) \ , \tag{13}$$

4.1.3. Эллиптически поляризованный свет

Плоская электромагнитная волна произвольной поляризации может быть представлена в виде линейной комбинации базисных состояний СР-представления, т.е. составляющие рассеянного поля в этом случае есть линейная комбинация (11) и (13).

Отметим, для случая параллельно падающего излучения ($\Omega = 0$) выражения (11), (13) с помощью формул

$$\lim_{\upsilon_0 \to 0} <d^n_{11}(\upsilon_0)> = 1 \ , \quad n = 1, 2, \ldots \ . \tag{14}$$

упрощаются до известных выражений амплитуд рассеянного поля [8].

4.2. *Неоднородный по интенсивности падающий пучок* [$E^i_{\text{ю}1}(\theta_i, \varphi_i) = E^i_{\text{ю}}(\theta_i)$]

Пусть $E^i_{\pm 1}(\theta_i)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд по функциям Вигнера $d^n_{00}(\theta_i)$

$$E^i_{\pm 1}(\theta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} c^{\pm}_n\, d^n_{00}(\theta_i) \ . \tag{15}$$

В дальнейшем также используем формулу [7]

$$d^n_{qm}(\theta)\, d^{n'}_{q'm'}(\theta) = \sum_{n''=|n-n'|}^{n+n'} C^{n''q+q'}_{nq\, n'q'}\, C^{n''m+m'}_{nm\, n'm'}\, d^{n''}_{q+q'\, m+m'}(\theta) \ , \tag{16}$$

где $C^{nm}_{n_1 m_1 n_2 m_2}$ – коэффициенты Клебша–Гордона [7].

Представим падающий пучок в виде суммы двух когерентных пучков и найдем амплитуды рассеянного поля отдельно для каждого из них.

$E^i_{+1}(\theta_i, \varphi_i) = E^i_{+}(\theta_i)$, $E^i_{-1}(\theta_i, \varphi_i) = 0$.

$$<E^s_{\pm 1}> = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\, e^{i\varphi_s}\, d^n_{\pm 11}(\theta_s)\,(b_n \pm a_n)\sum_{n'=0}^{\infty} c^+_{n'} \sum_{n''=|n-n'|}^{n+n'}\left[C^{n''1}_{n1n'0}\right]^2 <d^{n''}_{11}(\upsilon_0)> . \tag{17}$$

$E^i_{+1}(\theta_i, \varphi_i) = 0$, $E^i_{-1}(\theta_i, \varphi_i) = E^i_{-}(\theta_i)$.

$$<E^s_{\pm 1}> = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\, e^{-i\varphi_s}\, d^n_{\pm 1-1}(\theta_s)\,(b_n \mp a_n)\sum_{n'=0}^{\infty} c^-_{n'} \sum_{n''=|n-n'|}^{n+n'}\left[C^{n''1}_{n1n'0}\right]^2 <d^{n''}_{11}(\upsilon_0)>. \tag{18}$$

5. Вектор Стокса рассеянного излучения

Параметры вектора Стокса в CP-представлении имеют вид [3]

$$\begin{gathered} I_2 = E_{-1} E^*_{+1} = (1/2)\,(Q - i\,U)\,,\ I_0 = E_{+1} E^*_{+1} = (1/2)\,(I - V)\,, \\ I_{-0} = E_{-1} E^*_{-1} = (1/2)\,(I + V)\,,\ I_{-2} = E_{+1} E^*_{-1} = (1/2)\,(Q + i\,U)\,, \end{gathered} \tag{19}$$

где * – означает комплексно сопряженное число; I, Q, V, U – параметры Стокса в LP-представлении [4].

Интенсивность рассеянного излучения

$$I^s = (I^s_0 + I^s_{-0})\,. \tag{20}$$

Рассмотрим характеристики рассеяния частицы для случаев, рассмотренных в 4.1.1 и 4.1.2.

Поток рассеянного излучения в полном телесном угле 4π с учетом (П7) имеет вид

$$\Phi = (2\,\pi/k^2)\sum_{n=1}^{\infty}(2\,n+1)\,(\,|a_n|^2 + |b_n|^2)\,<d^n_{11}(\upsilon_0)>^2 \tag{21}$$

и совпадает с сечением рассеяния C_{scat} для случая плоской электромагнитной падающей волны.

Индикатриса рассеяния $p(\theta_s) = 4\pi\, I^s\, \Phi^{-1}$ удовлетворяет условию нормировки

$$(1/4\,\pi)\int_{4\,\pi} p\, d\,\omega = 1\,. \tag{22}$$

В таблице представлены результаты расчетов индикатрисы рассеяния при различной геометрии падающего пучка (значения в знаменателе). Значения в числителе – результаты расчетов индикатрисы рассеяния для элементарного рассеивающего объема, состоящего из независимых рассеивателей [1, 9]. Дифракционный параметр $\rho = 50$, показатель преломления частицы $m_{\text{ч}} = 1{,}33$, а также геометрия и структура падающего пучка одинаковы для обоих случаев.

Для фактора асимметрии ($<\cos\theta>$) [4], используя (16), (20), (П7), а также свойства коэффициентов Клебша–Гордона [7], получим

$$<\cos\theta>\,\Phi = \frac{4\,\pi}{k^2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(n+2)}{n+1}\,(a_n a^*_{n+1} + b_n b^*_{n+1})<d^n_{11}(\upsilon_0)><d^{n+1}_{11}(\upsilon_0)> + \frac{2\,n+1}{n\,(n+1)}\,(a_n b^*_n)<d^n_{11}(\upsilon_0)>^2. \tag{23}$$

Формула (23) совпадает с известным выражением Дебая [4] для случая плоской падающей волны ($\nu_0 = 0$).

В заключение отметим, что аналогичные (21), (23) формулы могут быть легко получены и для рассмотренных в 4.1.3 и 4.2 случаев.

Таблица

θ_s	υ_0			
	0°	1°	5°	10°
0°	1244,47	1115,16 / 1242,77	194,655 / 468,085	63,5497 / 74,3988
10°	11,4185	10,6874 / 11,7726	11,0932 / 32,4256	32,9131 / 45,1948
20°	7,4857	6,9109 / 7,5328	5,2298 / 4,3226	4,7707 / 2,2676
30°	2,7400	2,6691 / 2,7032	2,4212 / 2,6846(–1)	2,5053 / 1,6982(–1)
40°	1,3182	1,3262 / 1,2538	1,3913 / 3,8716(–2)	1,3932 / 1,6307(–1)
50°	5,3715(–1)	5,6772(–1) / 5,0683(–1)	6,2692(–1) / 1,8693(–2)	6,7099(–1) / 6,6409(–2)
60°	3,1315(–1)	2,9715(–1) / 2,8994(–1)	2,7959(–1) / 2,2929(–2)	2,9123(–1) / 4,0759(–2)
70°	7,9111(–2)	9,1894(–2) / 7,2457(–2)	1,2395(–1) / 1,7701(–2)	1,3326(–1) / 1,3283(–2)
80°	9,5849(–2)	8,6848(–2) / 8,9638(–2)	6,9054(–2) / 5,8814(–3)	6,8797(–2) / 7,0381(–3)
90°	2,4738(–2)	2,6777(–2) / 2,3266(–2)	3,1191(–2) / 5,9350(–3)	3,3794(–2) / 3,6968(–3)
100°	1,5444(–2)	1,7164(–2) / 1,5086(–2)	1,9866(–2) / 7,2455(–3)	2,1066(–2) / 4,1076(–3)
110°	5,4005(–3)	9,7217(–3) / 5,7367(–3)	2,0476(–2) / 1,8562(–2)	2,6723(–2) / 9,6380(–3)
120°	2,9429(–2)	3,8332(–2) / 2,9868(–2)	5,0239(–2) / 2,8427(–2)	4,4060(–2) / 5,2118(–3)
130°	3,6375(–2)	4,2932(–2) / 3,3305(–2)	7,6169(–2) / 6,0338(–2)	8,9188(–2) / 1,3136(–2)
140°	2,4655(–1)	2,2934(–1) / 2,3325(–1)	2,1549(–1) / 2,7344(–2)	1,8985(–1) / 3,4051(–2)
150°	1,2251(–1)	1,2867(–1) / 1,1883(–1)	1,6019(–1) / 1,1811(–1)	1,7927(–1) / 1,8599(–1)
160°	7,0563(–2)	8,1232(–2) / 6,8005(–2)	1,1139(–1) / 7,1432(–2)	1,3792(–1) / 4,9046(–2)
170°	1,3890(–1)	1,4444(–1) / 1,3955(–1)	1,6606(–1) / 6,1376(–1)	1,7916(–1) / 1,5395
180°	2,0613(–1)	1,8439(–1) / 1,9812(–1)	3,3481(–1) / 2,5994(–1)	2,0715(–1) / 1,5722

Приложение

Функции Вигнера $d^n_{qm}(\theta)$ связаны с обобщенными сферическими функциями $P^n_{qm}(\cos\theta)$ [10] соотношением [2]

$$d^n_{qm}(\theta) = i^{m-q} P^n_{qm}(\cos\theta)\,, \quad n \ge \max\left(|q|, |m|\right) = n_* \,. \tag{П1}$$

Используя свойства обобщенных сферических функций и соотношение (П1), рассмотрим свойства функции Вигнера.

Полиномы и присоединенные функции Лежандра выражаются в виде [7, 10]

$$d^n_{00}(\theta) = P^n_{00}(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)\,, \tag{П2}$$

$$d^n_{0m}(\theta) = i^m P^n_{0m}(\cos\theta) = (-1)^m\left[(n-m)!/(n+m)!\right]^{1/2} P^m_n(\cos\theta)\,, \tag{П3}$$

где

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \tag{П4}$$

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} (d^m/dx^m) P_n(x) . \tag{П5}$$

Функции Вигнера имеют следующие свойства симметрии [7,10]:

$$d^n_{qm}(\theta) = d^n_{-m-q}(\theta) = (-1)^{m-q} d^n_{mq}(\theta) \tag{П6}$$

и удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \, d^n_{qm}(\theta) \, d^{n'}_{qm}(\theta) = 2 \, \delta_{nn'}/(2n+1) , \tag{П7}$$

рекуррентному соотношению

$$n\sqrt{(n+1)^2-m^2}\sqrt{(n+1)^2-q^2}\, d^{n+1}_{qm}(\theta)+(n+1)\sqrt{n^2-q^2}\sqrt{n^2-m^2}\, d^{n-1}_{qm}(\theta)=(2n+1)\left[n(n+1)\cos\theta-mq\right]d^n_{qm}(\theta) \tag{П8}$$

с начальными условиями

$$d^{n_*}_{qm}(\theta) = \frac{(-1)^{(q-m+|q-m|)/2}}{2^{n_*}}\left[\frac{(2\,n_*)!}{(|q-m|)!\,(|q+m|)!}\right]^{1/2} (1-\cos\theta)^{|q-m|/2} (1+\cos\theta)^{|q+m|/2} , \tag{П9}$$

а также

$$\frac{d}{d\theta} d^n_{qm}(\theta) + \frac{q - m\cos\theta}{\sin\theta} d^n_{qm}(\theta) = -\sqrt{(n-m)(n+m+1)}\, d^n_{q\,m+1}(\theta) . \tag{П10}$$

Воспользуемся (П3), (П5), (П6) и (П10) для того, чтобы получить

$$<d^n_{11}(\upsilon)> = \frac{\sin\upsilon\left[P_n^1(\cos\upsilon) + P_n^{-1}(\cos\upsilon)\right] + P_n(\cos\upsilon)(1-\cos\upsilon)}{n(n+1)(1-\cos\upsilon)} . \tag{П11}$$

1. П а р а м о н о в Л . Е . // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. N 5. С. 479-486.
2. H o v e n i e r J . W ., v a n d e r M e e C . V . M . // Astron. Astrophys. 1983. V. 128. P. 1–16.
3. K u š č e r I . , R i b a r i č M . // Opt. Acta. 1959. V. 6. P. 42–51.
4. Б о р е н К ., Х а ф м е н Д . Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
5. T s a n g L ., K o n g J . A ., S h i n R . T . // Radio Sci. 1984. V. 19. P. 629–642.
6. M i s h c h e n k o M . I . // J. Opt. Soc. Am. A. 1991. V. 8. P. 871–882.
7. В а р ш а л о в и ч Д . А ., М о с к а л е в А . Н . , Х е р с о н с к и й В . К . Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 440 с.
8. D o m k e H . // Z. Meteorologie. 1975. V. 25. P. 357–361.
9. P a r a m o n o v L . E . Light scattering by randomly oriented particles of arbitrary shape into solid angles. 1. Krasnoyarsk, 1993. 24 p. (Preprint/Institute of Biophysics. N 198B).
10. Г е л ь ф а н д И . М ., М и н л о с Р . А . , Ш а п и р о З . Я . Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: ГИТТЛ, 1958. 368 с.

Институт биофизики СО РАН,
г. Красноярск

Поступила в редакцию
5 июля 1993 г.

L . E . P a r a m o n o v . **Generalized Mie Solution for a Focused Beam.**
Scattering of a focused beam by a spherical particle is considered. Illustrative material results of the dependence of the scattering phase function on the incident beam geometry are given.