

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ. ОБРАБОТКА ДАННЫХ
ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

УДК 535.36:551.521.3

В.В. Веретенников

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ АЭРОЗОЛЯ ПО ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ
ТЕНИ ЧАСТИЦ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ**

Рассматривается численный алгоритм обращения функции корреляции тени частиц, основанный на применении преобразования Ганкеля и разложении функции распределения частиц по размерам в ряд Фурье–Бесселя. Исследована устойчивость решения обратной задачи на основе анализа обусловленности и результатов численных экспериментов. Алгоритм применим для решения задач диагностики микроструктуры аэрозоля при однократном и многократном рассеянии в малоугловом приближении.

В проблеме оптической диагностики микроструктуры грубодисперсных сред с учетом многократного рассеяния центральное место занимает задача обращения функции корреляции тени (ФКТ) частиц [1–3]. ФКТ частиц однозначно связана с пространственно-угловыми характеристиками многократно рассеянного излучения, которые можно использовать для ее нахождения. Для полидисперсного ансамбля сферических рассеивателей зависимость ФКТ $\varphi(\xi)$ от микроструктуры среды определяется выражением

$$\varphi(\xi) = \int_{\xi}^1 G(\xi/\eta) f(\eta) d\eta, \quad (1)$$

где $\xi \in [0, 1]$. Преобразование (1) записано для безразмерных координат, его ядро имеет вид

$$G(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\arccos t - t\sqrt{1-t^2}], & t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad (2)$$

а функция $f(\eta)$ имеет смысл нормированной плотности распределения геометрического сечения частиц по относительному размеру.

В [1] описана методика решения интегрального уравнения (1) с использованием конечно-разностного регуляризирующего алгоритма. Задачи восстановления микроструктуры $f(\eta)$ дисперсной среды на основе аналитических преобразований ФКТ $\varphi(\xi)$ рассмотрены в [4].

В настоящем сообщении рассматривается «гибридный» алгоритм восстановления функции $f(\eta)$ из уравнения (1), включающий в себя интегральное преобразование ФКТ $\varphi(\xi)$ и обращение матричного уравнения для определения коэффициентов разложения функции $f(\eta)$ в ряд Фурье–Бесселя.

На первом этапе решения обратной задачи с помощью преобразования Ганкеля нулевого порядка для ФКТ $\varphi(\xi)$

$$x(\omega) = \int_0^1 \xi J_0(\omega \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (3)$$

осуществляется переход от интегрального уравнения (1) к уравнению

$$2 \int_0^1 J_1^2(\omega\eta/2) f(\eta) d\eta = H(\omega), \quad (4)$$

в котором правая часть $H(\omega) = \omega^2 x(\omega)$. Представим функцию $f(\eta)$ в виде разложения по полной ортогональной на отрезке $(0,1)$ с весом η системе функций $\{J_0(\alpha_i \eta)\}$, где α_i – нули функции Бесселя $J_0(x)$; $J_0(\alpha_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots$:

$$\eta f(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_0(\alpha_i \eta), \quad 0 < \eta < 1. \quad (5)$$

Для нахождения коэффициентов b_i подставим ряд (5) в уравнение (4). В результате получим следующее уравнение:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i(\omega) b_i = H(\omega) \quad (6)$$

относительно неизвестных b_i ($i = 1, 2, \dots$) с коэффициентами

$$A_i(\omega) = 2 \int_0^1 J_0(\alpha_i \eta) J_1^2(\omega \eta / 2) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (7)$$

Подынтегральная функция в (7) быстро убывает с ростом η , что позволяет без большой потери точности заменить в (7) конечный верхний предел интегрирования на бесконечность. При этом коэффициенты $A_i(\omega)$ приобретают очень простой вид

$$A_i(\omega) = G(\alpha_i / \omega), \quad (8)$$

где функция $G(t)$ определяется формулой (2). Из свойств функции $G(t)$ следует, что $G(\alpha_i / \omega) = 0$ при $\omega \leq \alpha_i$. Это позволяет выбрать такие отсчеты ω_j , при которых матрица $A_i(\omega_j)$ приобретает треугольный вид, а решение (6) становится тривиальным. Отсчеты ω_j необходимо выбрать из условия

$$\alpha_j < \omega_j \leq \alpha_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Функция $G(t)$ – монотонно убывающая с областью изменения $1 \geq G(t) \geq 0$, при $t \in [0, 1]$, поэтому диагональные элементы матрицы $A_i(\omega_j)$ достигают наибольших значений при

$$\omega_j = \alpha_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (10)$$

При таком выборе отсчетов ω_j уравнение (6) преобразуется в бесконечную систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{ji} b_i = H_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (11)$$

с нижней треугольной матрицей, элементы которой $A_{ji} = G(\alpha_i / \alpha_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, j$, и правой частью $H_j = \alpha_{j+1}^2 x(\alpha_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots$, где α_j – корни уравнения $J_0(z) = 0$.

Произвольное конечное число n коэффициентов b_i ($i=1, \dots, n$) ряда (6) определяется из первых n уравнений системы (11). Устойчивость этой системы можно характеризовать числом обусловленности $P_n = \max |\lambda_i| / \min |\lambda_i|$, где λ_i – собственные значения матрицы A . Поскольку матрица A – нижняя треугольная, то ее собственные значения совпадают с диагональными элементами: $\lambda_i = G(\alpha_i / \alpha_{i+1})$. Отношения последовательных нулей функции Бесселя (α_i / α_{i+1}) образуют монотонно возрастающую последовательность, поэтому вследствие монотонности функции $G(t)$ выражение для числа обусловленности будет иметь вид

$$P_n = G(\alpha_1 / \alpha_2) / G(\alpha_n / \alpha_{n+1}). \quad (12)$$

Результаты расчета чисел обусловленности P_n по формуле (12) для последовательности значений n приведены в следующей таблице.

n	5	6	7	8	9	10	15	20
P_n	5,1	6,7	8,2	11	12	13	26	33

Из таблицы следует, что числа обусловленности P_n сохраняют невысокие значения и решение системы (11) будет устойчиво при ограничении размерности задачи n в пределах, которые вполне могут удовлетворить потребности практических расчетов.

Решение системы (11) определяется по рекуррентным формулам:

$$b_1 = H_1/A_{11}; \quad b_i = \left[H_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} b_j \right] / A_{ii}; \quad i = 2, 3, \dots \quad (13)$$

Подставляя найденные коэффициенты b_i в ряд (5), получим искомое распределение $f(\eta)$.

Суммирование ряда (5) не обладает свойством устойчивости к ошибкам в задании коэффициентов b_i , если погрешность восстановления функции $f(\eta)$ оценивать в равномерной метрике. Устойчивые методы суммирования рядов Фурье, основанные на идее регуляризации, описаны в [5]. В простейшем случае этой цели служит ограничение числа членов разложения (5), согласованное с погрешностями коэффициентов b_i , определяемых из системы уравнений (11).

Следует отметить, что аналогичная схема восстановления распределения $f(\eta)$ может быть построена при разложении в ряды по другим ортогональным системам базисных функций, которые получаются из системы $\{J_0(\alpha_i \eta)\}$ при замене α_i на β_i – нули функции Бесселя $J_1(x)$, или на γ_i – корни уравнения:

$$q J_0(x) - x J_1(x) = 0, \quad (14)$$

где q – произвольная вещественная константа (ряды Дини [6]).

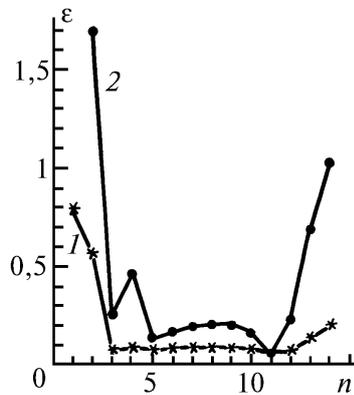


Рис. 1. Зависимость относительной невязки $\varepsilon_{\varphi}^{(n)}$ (кривая 1) и ошибки $\varepsilon_f^{(n)}$ восстановления распределения $f(\eta)$ (кривая 2) в зависимости от числа n членов разложения в ряд Фурье–Бесселя в модельном эксперименте при 10%-й относительной погрешности в исходных данных

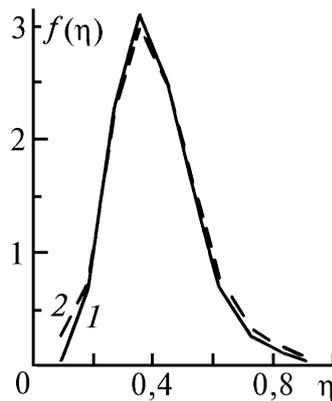


Рис. 2. Пример восстановления $f(\eta)$ в численном эксперименте методом разложения в ряд Фурье–Бесселя при 10%-й относительной погрешности в исходных данных: 1 – модель; 2 – результат обращения $\varphi(\xi)$; $n = 11$

Для иллюстрации рассмотрим пример обращения функции корреляции $\varphi(\xi)$ методом разложения в ряд Фурье–Бесселя в численном эксперименте. На рис. 1 изображены невязка

$\varepsilon_{\varphi}^{(n)} = \|\varphi_n - \varphi_{\delta}\| / \|\varphi_{\delta}\|$ (кривая 1) и ошибка $\varepsilon_f^{(n)} = \|f_n - f_T\| / \|f_T\|$ восстановления распределения $f(\eta)$ (кривая 2) в зависимости от числа членов разложения n в ряд (5) при 10%-й относительной погрешности δ в исходных данных $\varphi(\xi)$. Модельное распределение $f_T(\eta)$ изображено на рис. 2 (кривая 1). Как видно из рис. 1 (кривая 1), вполне удовлетворительная точность восстановления одномодального распределения $f(\eta)$ достигается уже при 5 членах ряда ($\varepsilon_f^{(5)} = 0,14$). При этом невязка $\varepsilon_{\varphi}^{(5)}$ равна 0,078. Наименьшая погрешность восстановления $f(\eta)$ составляет 6,1% и достигается при $n = 11$. При дальнейшем увеличении числа членов разложения ряда (5) суммирование становится неустойчивым и приводит к резкому возрастанию погрешности $\varepsilon_f^{(n)}$. Обращает на себя внимание тот факт, что при изменении n в пределах $3 \leq n \leq 12$ невязка $\varepsilon_{\varphi}^{(n)}$ изменяется незначительно и не превышает уровня погрешности исходных данных ($\varepsilon_{\varphi}^{(n)} < 10\%$). Пример распределения $f(\eta)$, восстановленного при $n = 11$ и 10%-й относительной погрешности задания функции $\varphi(\xi)$ представлен на рис. 2 (кривая 2).

1. Боровой А.Г., Вагин Н.И., Веретенников В.В. // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 61. Вып. 6. С. 1326–1330.
2. Вагин Н.И., Веретенников В.В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1989. Т. 25. N 7. С. 723–731.
3. Веретенников В.В. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. N 9. С. 1047–1053.
4. Веретенников В.В. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 11. С. 40–47.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
6. Корнеёв Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
19 декабря 1994 г.

V. V. Veretennikov. Determination of Aerosol Microstructure from Particles' Shadow Correlation Function Using Fourier–Bessel-series Expansion.

Numerical procedure is considered of inversion of the particles' shadow correlation function based on Hankel transformation and Fourier–Bessel-series expansion of the particles size distribution function.

A stability of the inverse problem solution is studied based on condition analysis and results of numerical experiments. The procedure can be applicable to problems of aerosol microstructure diagnosis at single and multiple scattering based on small-angle approximation.