«Оптика атмосферы и океана», **8**, N 8 (1995)

УДК 519.6+551: 521.3+621.372

А.В. Фабриков, О.И. Алдошина, А.В. Мамаева

ОЦЕНИВАНИЕ ВРЕМЕН ЗАПАЗДЫВАНИЯ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ

Приводится теория и схема построения процессора и результаты численного эксперимента на ЭВМ по разработанным программам.

Для локации изотропных источников импульсного оптического излучения по данным спутниковых наблюдений [1] и для ряда других применений [2] важна точность оценивания временных сдвигов между версиями сигнала, зарегистрированными различными датчиками. Высокую точность (доли от шага выборки) при большом шуме (перекрывающем сигнал на первых 8 – 10 шагах выборки) можно получить в схеме специально разработанного для этих целей процессора БТФ-ОВЗ – оценивателя временных задержек на основе быстрого трансверсального фильтра – при использовании кубических сплайнов для сглаживания сравниваемых сигналов.

Применительно к двум датчикам задача формулируется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x_1(k) &= s(k) + n_1(k), \\ x_2(k) &= a\, s(k + \mathrm{D}) + n_2(k), \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

где $s(k)$ и $as(k + \Delta)$ – выборки из сигналов $s(t)$ и $\alpha s(t + \Delta)$ соответственно; $n_1(k)$ и $n_2(k)$ – случайные шумовые последовательности («белый» гауссовский шум с нулевым средним), не зависящие друг от друга и от сигнала $s(t)$:

$$\begin{aligned} &\overline{n_1(k)} = \overline{n_2(k)} = 0, \\ &\overline{n_i(k)\, n_j(l)} = Q_i\, \delta(k - l)\, \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \tag{2}$$

$\delta(k - l)$ – дискретный аналог дельта-функции Дирака; δ_{ij} – дельта-функция Кронекера; черта над величиной означает усреднение по ансамблю. По известным реализациям случайных процессов $x_1(k)$ и $x_2(k)$ нужно оценить задержку Δ.

Классическим подходом к решению этой задачи является вычисление функции $R_{x_1x_2}(\tau)$ взаимной корреляции x_1 и x_2 и определение задержки $\tau = \tau_0$, при которой эта функция достигает максимума [1]. Значение τ_0 берется в качестве оценки Δ: $\tau_0 = \hat{\Delta}$. Для тех же целей в последнее время стали использовать метод адаптивной фильтрации.

Метод заключается в том, что сравниваемые версии сигнала, например $x_1(k)$ и $x_2(k)$ из уравнений (1), подаются на адаптивный фильтр, работающий в режиме идентификации подключенной к нему параллельно линейной системы, в качестве входного и опорного сигналов. После определенного периода адаптации, длящегося m шагов выборки, импульсная характеристика фильтра, представляемая на n-м шаге вектором-столбцом из p чисел

$$h_p(n) = [h_1(n), \dots, h_p(n)]^{\mathrm{T}},$$

преобразуется так, что ее свертка с входным сигналом $x_1(k)$ оптимально (по критерию наименьшего среднего квадрата ошибки) аппроксимирует опорный сигнал $x_2(k)$. Если ввести обозначения

$$x_{1p}(n) = [x_1(n), x_1(n - 1), \dots, x_1(n - p + 1)]^{\mathrm{T}},$$

$$x_{2p}(n) = [x_2(n), x_2(n - 1), \dots, x_2(n - p + 1)],$$

то

$$x_{2p}(n) = h_p^{\mathrm{T}}(n) * x_{1p}(n), \quad n > m\ ,$$

где т – знак транспонирования, а «*» – знак свертки. Смещение Δ определяют по положению максимума на кривой зависимости $h_i(n)$ от i $(1 \le i \le p)$ при $n > m$; для идентичных по структуре слабо зашумленных сигналов последняя близка к дельта-функции Дирака: $h_i(n) \approx \delta(i - \hat{\Delta})$, где $\hat{\Delta}$ – оценка Δ.

В [3] предложено в качестве оценивателя временных задержек (ОВЗ) использовать адаптивный фильтр Уидроу [6], работающий в режиме идентификации неизвестной системы, и описан соответствующий алгоритм МНК-ОВЗ. Этот алгоритм, решая задачу ОВЗ с высокой точностью и надежностью, не обладает, однако, достаточным быстродействием для работы в реальном времени. От этого недостатка свободен предложенный и реализованный в [4] алгоритм БТФ-ОВЗ на основе адаптивного быстрого трансверсального фильтра (БТФ) [5], обеспечивающего возможность обработки данных в реальном времени.

Устройство БТФ-ОВЗ дает хорошие результаты при малом шуме, но характеристики его быстро ухудшаются с увеличением шума за пределы, определяемые видом функции $s(t)$ и шагом выборки. В данной статье исследуется возможность повышения точности и надежности работы БТФ-ОВЗ на фоне превышающего этот предел аддитивного шума путем включения в схему оценивателя операций предварительного отфильтровывания входного и опорного сигналов – их аппроксимации сглаживающими сплайнами.

Общее определение аппроксимирующих сплайновых функций можно найти, например, в [6]. Пусть X и Y – два гильбертова пространства; T: $X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, действующий из X в Y. В X задана система линейных ограниченных функционалов k_i $(i = 1, ..., n)$, которая предполагается линейно независимой. Если элемент $\sigma \in X$ удовлетворяет двум условиям:

1) $k_i(\sigma) \equiv (k_i, \sigma)_X = r_i\ , \quad i = 1, \dots , n$;
2) $(T\sigma, T\sigma)_Y \equiv \|T\sigma\|_Y^2 = \min$,

где $(,)_X$ и $(,)_Y$ – скалярные произведения в X и Y соответственно, а r_i – заданные числа, то его называют интерполяционным сплайном. (Возможность представления функционала k_i на векторе σ скалярным произведением вытекает из теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве). Элемент $\sigma_\alpha \in X$ называют сглаживающим сплайном, если он реализует минимум квадратичного функционала

$$\Phi_\alpha(u) = \alpha\, \|T u\|_Y^2 + \sum_{i=1}^{n} [(k_i, u) - r_i]^2 = \alpha\, \|T u\|_Y^2 + \|K u - r\|_{R^n}^2,\ \ \alpha > 0.$$

В этом функционале с весом $\alpha > 0$ скомбинированы невязка уравнения $Ku = r$ и энергетический функционал $\|Tu\|^2$. Задача минимизации $\Phi_\alpha(u)$ не приводит к появлению какого-то нового типа сплайнов. Сглаживающий сплайн σ_α – это интерполяционный сплайн с вектором входных данных $r_\alpha = K\sigma_\alpha$.

В рассматриваемой нами задаче сплайновой аппроксимации зашумленных сигналов в схеме БТФ-ОВЗ T – оператор двукратного дифференцирования, а K – оператор следа восстанавливаемой функции на сетку x_1, ..., x_n. Особенностью задачи является то, что излишнее сглаживание исходной информации и потери «тонкой структуры», связанные с использованием слишком «сильных» операторов сглаживания, не страшны, если только они не приводят к относительному сдвигу во времени сравниваемых зависимостей. Опыт показывает, что в большинстве встречающихся в практике ОВЗ ситуаций дело обстоит именно так – выбор конкретного значения регуляризирующего параметра α на этапе предфильтрации не слишком критичен. Это облегчает нахождение оптимального (точнее, квазиоптимального) численного значения параметра α.

Построение сплайна проводилось классическим методом Рейнша [7, 8]. Задача формулируется следующим образом. Даны пары чисел x_i, y_i, $i = 0, 1, ..., n$, причем $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Нужно найти функцию, минимизирующую выражение

$$\int_{x_0}^{x_n} g''(x)\, d\, x \tag{3}$$

среди всех $g(x)$ таких, что

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{g(x_i) - y_i}{\delta\, y_i} \right)^2 \le S, \quad g \in C^2\, [x_0, x_n]. \tag{4}$$

Здесь $\delta\, y_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $C^2[x_0, x_n]$ – класс функций, непрерывных вместе со вторыми производными на отрезке $[x_0, x_n]$; S – постоянная, вводимая из соображения удобства и делающая возможным явное изменение масштаба величин δy_i при регулировании степени сглаживания. Рекомендуемые значения S зависят от относительного веса δy_i^2. При наличии соответствующих априорных сведений в качестве δy_i^2 выбирают стандартные отклонения величин y_i. В этом случае естественные значения S лежат внутри доверительного интервала, соответствующего левой стороне (4)

$$N - (2\, N)^{1/2} \le S \le N + (2\, N)^{1/2}, \quad N = n + 1. \tag{5}$$

Уравнения (3), (4) решаются стандартными методами вариационного исчисления. Вводя вспомогательную переменную z и параметр Лагранжа p, приходим к задаче минимизации функционала

$$\int_{x_0}^{x_n} g''(x)\, d\, x + p \left\{ \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{g(x_i) - y_i}{\delta\, y_i} \right)^2 + z^2 - S \right\}. \tag{6}$$

Решением (однозначным) является кубический сплайн, называемый часто сплайном Шенберга, – функция $f(x)$, состоящая из кубических парабол

$$f(x) = a_i + b_i\, (\, x - x_i) + c_i\, (\, x - x_i)^2 + d_i\, (\, x - x_i)^3\,, \tag{7}$$

$$x_i \le x < x_{i+1}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

сопрягаемых через общие концевые точки; при этом f, f' и f'' непрерывны.

Разработана программа, реализующая (на языке СИ) процедуру вычисления всех входящих в (7) коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i, ($i = 0, \ldots, n$) и параметра p.

Применение кубического сглаживающего сплайна на этапе предфильтрации входного и опорного сигналов, не слишком увеличивая сложность алгоритма БТФ-ОВЗ [4], существенно улучшает его устойчивость к воздействию аддитивного шума. Сплайновая аппроксимация входного и опорного сигналов в схеме БТФ-ОВЗ позволяет удержать погрешность определения задержки времени Δ в пределах интервала выборки вплоть до значений шума, стандартное отклонение которого соответствует приращению s на первых 8 – 10 шагах.

Экспериментальные данные, подтверждающие этот вывод, приведены на рис. 1, 2 для типовой ситуации, описываемой уравнениями (1) при $s(t) = A\, t \exp\, (-\, t\, /\, T)$, при $T = 10$, $A = 3{,}7$, $a = 0{,}7$, $\Delta = 4$; $h_1(t)$ и $h_2(t)$ – независимые шумы, порождаемые генератором случайных чисел.

На рис. 1 приведены интерполированные по формуле Котельникова – Шеннона кривые импульсной характеристики фильтра $h(t)$ (представляемой в эксперименте набором чисел h_i, $i = 1, \ldots, p$, $p = 20$) в установившемся режиме адаптации для незашумленных сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$ (кривая *1*) и для тех же сигналов на фоне аддитивного «белого» шума с нулевым средним и стандартным отклонением $\sigma = 0{,}2$ (кривая *2*) и $\sigma = 0{,}8$ (кривая *3*). Положение максимума первых двух кривых очень близко (в пределах погрешности $\pm 0{,}01$) соответствует значению задержки $\Delta = 4$; для третьей кривой оно смещено от этого значения на 1,4. На рис. 2 приведены аналогичные кривые для случая $\sigma = 0{,}8$ при использовании (кривая *1*) и без использования (кривая *2*) процедуры сплайнового сглаживания входного и опорного сигналов. Процедура сглаживания, как это видно из рис. 2, полностью устраняет искажающее действие шума на точностные характеристики процессора.

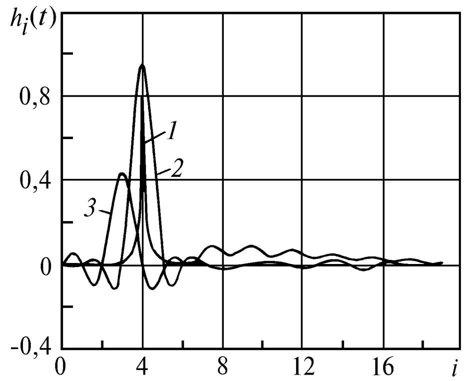

Рис. 1. Функция отклика БТФ-ОВЗ для несглаженных сигналов с различной зашумленностью

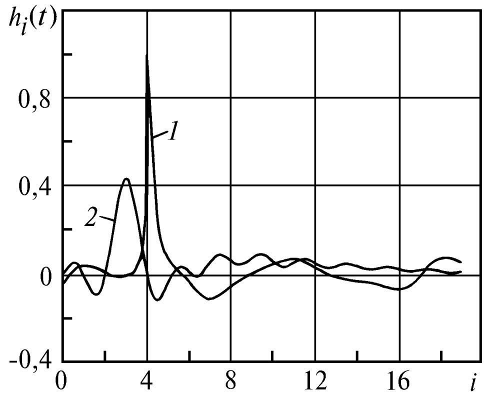

Рис. 2. Функция отклика БТФ-ОВЗ для зашумленного сигнала без (*2*) и со сглаживанием (*1*)

Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующий вывод: введение в схему БТФ-ОВЗ процедуры предфильтрации сигналов с применением сглаживающих сплайнов существенно улучшает характеристики процессора и позволяет получить надежный и высокоточный алгоритм оценивания временных задержек сигналов в различных задачах прикладной оптики, включая задачу определения координат источника изотропного импульсного излучения по данным спутниковых наблюдений.

1. Алдошина О.И., Фабриков А.В., Фабриков В.А. // Алгоритмы и структуры систем отображения информации. Сб. науч. тр. ТулГТУ, 1993. С. 107 – 115.
2. Carter G.C. // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1981. V. ASSP-29, N 3 (special issue on time delay estimation). P. 463 – 470.
3. Jonn D.H., Ahmed N., Carter G.C. On using the LMS algorithm for time – delay estimation. // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1982. V. ASSP-30. N 5. P. 798 – 801.
4. Сталь Н.Л., Фабриков А.В., Фабриков В.А. // Алгоритмы и структуры систем отображения информации. Сб. науч. тр. ТулГТУ, 1994. С. 115 – 123.
5. Cioffi J.M., Kailath T. Windowed fast transversal filters adaptive algorithms with normalization. // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1985. V. ASSP-33. N 4. P. 607 – 625.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 456 с.
7. Василенко В.А. Сплайн-функции: Теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983. 214 с.
8. Reinsh C.H. Smoothing by spline functions. // Numer. Math. 1967. V. 10. N 3. P. 177–183.

Всероссийский НИИ оптико-физических измерений,
г. Москва

Поступила в редакцию
31 августа 1994 г.

A.V. Fabrikov, O.I. Aldoshina, A.V. Mamaeva. **Time-delay Estimation of Signals by Means of Adaptive Filtering and Spline Smoothing of Input Data.**

The theory and the scheme of constructiong the processor are presented, as well as the results of numerical computing experiment by the codes designed.