<Оптика атмосферы и океана>, **8**, N 3 (1995)

УДК 538.5

Д.А. Безуглов, Е.Н. Мищенко

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ НАКЛОНОВ ФАЗОВОГО ФРОНТА В ГАРТМАНОВСКОМ ДАТЧИКЕ НА ФОНЕ ПУАССОНОВСКИХ ШУМОВ

На базе анализа системы кумулянтов случайных величин получены аналитические выражения для характеристических функций и плотностей распределения, описывающих сигналы в одном канале датчика Гартмана. Решено уравнение для отношения правдоподобия, получено выражение для оптимальной в статистическом смысле оценки локальных наклонов датчиком гартмановского типа.

1. Введение

Одним из основных элементов адаптивной оптической системы фазового сопряжения является датчик Гартмана. В его сотаве в качестве приемника оптического излучения обычно используется квадрантный (четырехплощадный) фотоприемник. Проводя суммарно-разностную обработку электрических сигналов с выходов этих фотоприемников, получают сигналы, пропорциональные локальным наклонам фазового фронта. При этом становится возможным восстановление оценки фазы на апертуре оптической системы [1,2]. Во многих работах, посвященных синтезу алгоритмов восстановления фазового фронта по результатам измерений датчика гартмановского типа [3,4], априорно предполагалось наличие оптимальных в статистическом смысле оценок $\hat{V} = \dfrac{\partial S(x, y)}{\partial X}$ и $\hat{U} = \dfrac{\partial S(x, y)}{\partial Y}$, где $S(x, y)$ – распределение фазы на апертуре оптической системы. Однако сам подход к получению таких оптимальных оценок в условиях воздействия пуассоновских шумов к настоящему времени не рассмотрен. Следует отметить, что применение известных подходов, использующих гауссовскую аппроксимацию шумов, в данном случае не корректно, т.к. априорно известно, что на каждый квадрантный фотоприемник гартмановского датчика попадает световой поток с интенсивностью I_i порядка I/M, где M – число субапертур датчика. Таким образом, говорить о наличии <сильного> сигнала, а именно в этом случае применима гауссовская аппроксимация, не приходится. Известно, [5], что детектирование оптического поля с помощью фоточувствительной поверхности связано с наблюдением потока электронов в течение определенного интервала времени. Фундаментальные свойства процесса фотодетектирования состоят в том, что вероятность освобождения электрона с фоточувствительной поверхности детектора описывается распределением Пуассона:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \tag{1}$$

где λ – параметр распределения.

Известно, что плотность распределения суммы произвольного числа L пуассоновских случайных величин также является пуассоновской случайной величиной с параметром $L\lambda$, что, впрочем, объясняется свойствами дискретного процесса Пуассона. Однако с учетом вышеизложенного при получении сигналов, пропорциональных U и V, в датчике гартмановского типа наряду с суммированием сигналов с отдельных площадок используется их вычитание. Очевидно, что разность пуассоновских случайных величин уже не будет подчиняться закону Пуассона.

Таким образом, является актуальной задача вычисления аналитического выражения для плотности распределения разности пуассоновских случайных величин в виде, удобном для анализа и синтеза на этой основе оптимальных решающих правил для получения оценок $\hat{U}$ и $\hat{V}$.

В данной статье на базе математического аппарата кумулянтного анализа получены выражения для характеристической функции разности двух пуассоновских случайных величин, записаны аналитические выражения для соответствующих плотностей распределения. Получено выражение для оптимальной оценки U, V.

2. Вывод основных соотношений для плоского фазового фронта

Рассмотрим задачу регистрации оптического поля квадрантным фотоприемником гартмановского датчика в следующей постановке. Будем вести речь о случайных величинах. При этом полученные основные результаты можно будет легко обобщить на случайные процессы.

Пусть на квадрантный фотоприемник падает сфокусированный линзой световой поток малой интенсивности. При наличии наклона фазового фронта для вычисления его величины предполагается суммарно-разностная обработка сигналов. В этом случае в результате суммирования и вычитания получают сигналы вида

$$\begin{aligned} U &= (u_1 + m_1 + u_2 + m_2) - (u_3 + m_3 + u_4 + m_4); \\ V &= (u_1 + m_1 + u_3 + m_3) - (u_2 + m_2 + u_4 + m_4), \end{aligned} \tag{2}$$

m_i – аддитивные пуассоновские шумы с параметром λ; u_i – полезный пуассоновский сигнал, соответствующий i-му квадранту фотоприемника.

С учетом того, что как u_i, так и m_i являются пуассоновскими, в дальнейшем целесообразно рассмотреть выражение (2), представленное в виде

$$\begin{aligned} n_x &= (n_1 + n_2) - (n_3 + n_4); \\ n_y &= (n_1 + n_3) - (n_2 + n_4), \end{aligned} \tag{3}$$

где $n_i = m_i + u_i$– пуассоновская случайная величина с параметром λ.

Так как сумма двух пуассоновских величин с параметром λ является также пуассоновской величиной с параметром 2λ, примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= N_1; \qquad n_1 + n_3 = N_3; \\ n_3 + n_4 &= N_2; \qquad n_2 + n_4 = N_4, \end{aligned} \tag{4}$$

где N_j – пуассоновская случайная величина с параметром 2λ.

Математическое ожидание величин n_x и n_y будет равно:

$$M[n_x] = M[N_1 - N_2] = M[N_1] - M[N_2] = 0; \tag{5}$$

$$M[n_y] = M[N_3 - N_4] = M[N_3] - M[N_4] = 0, \tag{6}$$

где $M[\,\cdot\,]$ – символ математического ожидания.

Начальные моменты после несложных преобразований с учетом соотношений (5), (6) запишутся в следующем виде:

$$M[n_x n_y] = M[(N_1 - N_2)(N_3 - N_4)] = 0; \tag{7}$$

$$M[n_x n_x] = M[(N_1 - N_2)(N_1 - N_2)] = 4\lambda - k_1, \tag{8}$$

где k_1 – коэффициент корреляции случайных величин N_i.

Учитывая природу пуассоновских шумов, коэффициент корреляции необходимо положить равным 0.

Моменты более высокого порядка для случайных величин n_x и n_y запишутся в виде:

$$M[n_x^n] = M[(N_1 - N_2)^n] = M\left[\sum_{k=0}^{n} c_n^k (-1)^k N_1^{n-k} N_2^k\right] = \sum_{k=0}^{n} c_n^k (-1)^k m_{n-k,\,k}^{1,2}, \tag{9}$$

где $m^{1,2}_{n-k}$ – совместные моменты случайных величин N_1 и N_2 порядка $n - k$, k.

Здесь и в дальнейшем при обозначении порядка моментов и кумулянтов случайных величин нижние индексы будут соответствовать порядку моментов, а верхние обозначать соответствующую случайную величину.

Из (9) видно, что все нечетные моменты m^{x}_{2n+1} случайной величины n_x равны нулю, а совместные моменты случайных величин N_1 и N_2 $m^{1,2}_{n-k,k}$, входящие в состав выражения (10), для четных моментов m^{x}_{2n} не могут быть определены в общем случае как нулевые.

Из теории кумулянтного анализа известно [6], что в случае независимости двух случайных величин N_1 и N_2 все их совместные кумулянты будут равны нулю. Что нельзя сказать однозначно о соответствующих моментах. Поэтому в дальнейшем целесообразно воспользоваться этим фактом и перейти к рассмотрению системы кумулянтов случайной величины n_x. Искомые кумулянты могут быть найдены на основе свойства линейности и инвариантности [6] из выражения (9).

$$\chi^x_n = \sum_{k=0}^{n} c^k_n (-1)^k \chi^{1,2}_{n-k,k}; \quad n = 0, 2 \ldots, \tag{10}$$

где χ^x_n – кумулянты порядка n случайной величины n_x; $\chi^{1,2}_{n-k,k}$ – совместные кумулянты случайных величин N_1, N_2.

Анализ выражения (10) показывает, что случайные величины n_x описываются системой только четных кумулянтов, равных

$$\chi^x_n = 4\lambda, \quad n = 0, 2, 4, \ldots . \tag{11}$$

С помощью (10) запишем выражение для характеристической функции искомого распределения плотности вероятности с учетом того, что существуют только четные кумулянты:

$$\theta(iv) = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\lambda}{(2k)!}(iv)^{2k}\right]. \tag{12}$$

Суммируя ряд в квадратных скобках, получим

$$\theta(iv) = \exp\{4\lambda(\mathrm{ch}(iv) - 1)\} = \exp\{4\lambda(\cos(v) - 1)\}. \tag{13}$$

Преобразуем по Фурье выражение(13):

$$P(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{4\lambda(\cos(v) - 1) - ivx_n\}\, dv. \tag{14}$$

С учетом известного выражения разложения показательной функции в ряд вида [7]

$$\exp\{\pm iz\sin(v)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z)\exp\{\pm inv\}, \tag{15}$$

где $I_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя n-го порядка, после несложных преобразований получим

$$P(x_n) = \exp\{-4\lambda\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(4\lambda)\,\delta[x_n - n], \tag{16}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция.

Так как случайная величина n_x принимает только дискретные значения, окончательное выражение для искомой плотности запишется в виде

$$P(n) = \exp\{-4\lambda\}\, I_n(4\lambda). \tag{17}$$

Видно, что полученная плотность (18) нормирована с весом 1.

Рассмотрим физический смысл полученных результатов. Во-первых, равенство нулю нечетных моментов распределения, как это следует из (11), говорит о том, что полученная априорная плотность распределения сигналов на выходе квадрантного фотоприемника датчика Гартмана является симметричной. Существование высших кумулянтов при конкретном значении параметра 4λ позволяет сделать вывод об отличии полученного распределения от гауссова.

3. Случай наклона фазового фронта (апостериорная плотность распределения)

Очевидно, что при наличии наклона фазового фронта кружок Эйри на квадрантном фотоприемнике будет смещен, при этом параметры пуассоновских распределений, соответствующих случайным величинам N_1 и N_2, не равны:

$$\lambda \neq \mu, \tag{18}$$

где λ и μ – параметры распределения случайных величин N_1 и N_2.

В этом случае

$$M[n_x] = M[N_1 - N_2] = M[N_1] - M[N_2] = \lambda - \mu. \tag{19}$$

Для системы кумулянтов случайной величины n_x в общем виде будет верно выражение (10). Все совместные кумулянты также равны нулю. Нечетные кумулянты χ^x_{2n+1} равны $\lambda - \mu$, четные χ^x_{2n} равны $\lambda + \mu$. Это связано с тем, что (-1^k) при четных k в выражении (10) дает только положительные члены, а при нечетных k – знакочередующиеся. Отсюда характеристическая функция такого распределения запишется в виде

$$\theta(iv) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda+\mu}{(2k)!}(iv)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda-\mu}{(2k+1)!}(iv)^{2k+1}\right\}. \tag{20}$$

С учетом разложения функций $\cos v$ и $\sin v$ в степенной ряд запишем

$$\theta(iv)\, \exp\left[(\lambda+\mu)(\cos(v)-1) + i(\lambda-\mu)\sin(v)\right]. \tag{21}$$

Используя известные соотношения для функции Бесселя [7], выражение (21) преобразуем к виду

$$\theta(iv) = \exp\{-(\lambda+\mu)\} \sum_{m=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_m(\lambda+\mu)\, J_n(\lambda-\mu)\, \exp\{i(n-m)v\}. \tag{22}$$

Для получения аналитического выражения для плотности распределения случайной величины n_x вычислим преобразование Фурье выражения (22):

$$P(x) = \exp\{-(\lambda+\mu)\} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\lambda+\mu)\, J_n(\lambda-\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(n-m)v - ivx\}\, dv. \tag{23}$$

В результате получим

$$P(x) = \exp\{-(\lambda+\mu)\} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\lambda+\mu)\, J_n(\lambda-\mu)\, \delta\{x-(n-m)\}. \tag{24}$$

Для фиксированных значений величины n_x, а именно этот момент нас интересует, исходя из физической постановки задачи, при $n - m = k$ имеем

$$P(k) = \exp\{-(\lambda+\mu)\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\lambda+\mu)\, J_{n-k}(\lambda-\mu)\,. \tag{25}$$

Рассмотрим некоторые свойства выражения (25). Дя этого воспользуемся разложением модифицированной функции Бесселя в ряд:

$$I_n(\lambda+\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^l}{l!} J_{n+1}(\lambda+\mu)\,. \tag{26}$$

Тогда

$$P(k) = \exp\{-(\lambda+\mu)\} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^l}{l!} J_{n-l}(\lambda+\mu)\, J_{n-k}(\lambda-\mu)\,. \tag{27}$$

Применив теорему сложения Неймана

$$J_m(U-V) = \sum_{p=0}^{\infty} J_{m+p}(U)\, J_p(V)\,, \tag{28}$$

при $m+p = n+l$ ($p = n-k$; $m = l-k$) и $U = \lambda+\mu$; $V = \lambda-\mu$, получим в окончательном виде

$$P(k) = \exp\{-(\lambda+\mu)\} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^l}{l!} J_{l+k}(2\mu)\,. \tag{29}$$

Очевидно, что

$$\lim_{\mu\to 0} P(k) = \lim_{\mu\to 0}\left[\exp\{-(\lambda-\mu)\} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^l}{l!} J_{l+k}(2\mu)\right] = \frac{\lambda^l}{l!}\exp(-\lambda), \tag{30}$$

т.к. $J_{l+k}(0) = 0$ только при $l = -k$.

Таким образом, при отсутствии сигнала в одном канале квадрантного фотоприемника датчика Гартмана на его выходе будет только пуассоновский сигнал (смесь пуассоновского сигнала и пуассоновского шума).

Аналогично можно получить

$$\lim_{\mu\to 0} P(k) = \lim_{\mu\to 0}\left[\exp\{-(\lambda+\mu)\} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^l}{l!} J_{l+k}(2\mu)\right] = \exp(-2\lambda)\, I_n(2\lambda)\,. \tag{31}$$

Выражения (30), (31) позволяют доказать достоверность полученных результатов. Таким образом, распределение Пуассона вытекает из (29), анализируя это выражение, можно сделать вывод, что в силу неравенства нулю нечетных кумулянтов плотность распределения уже не будет симметричной. При этом максимум плотности будет лежать в области математического ожидания $m_x = \lambda - \mu$, но в общем случае не равен ему. При $\mu \to 0$ плотность вырождается в пуассоновскую, при $\mu \to \lambda$ получаем плотность распределения разности двух пуассоновских величин с одинаковыми параметрами распределения, соответствующую случаю плоского фазового фронта, падающего на субапертуру датчика Гартмана.

4. Вычисление логарифма отношения правдоподобия

Для получения оптимальной оценки величины $\lambda - \mu$ необходимо вычислить логарифм отношения правдоподобия. Преобразуем полученную плотность (29) в соответствии с теоремой умножения функций Бесселя [7]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (y^2-1)^k (z/2)^k}{k!} J_{n+k} = \frac{J_n(yz)}{y^n}\,. \tag{32}$$

Положим $y = i\sqrt{l/m}$, тогда

$$P(n) = \exp\{-(\lambda+\mu)\}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\lambda+\mu)^l}{l!}J_{l+n}(2\mu) = \exp\{-(\lambda+\mu)\}\frac{J_n\left(i2\sqrt{\lambda\mu}\right)}{\left(i\sqrt{\lambda/\mu}\right)^n} = \frac{\exp\{-(\lambda+\mu)\}I_n\left(2\sqrt{\lambda\mu}\right)}{(\lambda/\mu)^{n/2}}. \quad (33)$$

Многомерная плотность распределения в силу независимости различных отсчетов запишется в виде

$$P(n_1, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^{N}\frac{\exp\{-(\lambda+\mu)\}I_{n_i}\left(2\sqrt{\lambda\mu}\right)}{(\lambda/\mu)^{n_i/2}}. \quad (34)$$

Оптимальную оценку $\lambda - \mu$ получим из решения уравнения вида

$$\frac{\partial \ln \Lambda(n_1, \dots, n_N)}{\partial \mu} = 0, \quad (35)$$

где

$$\Lambda(n_1, \dots, n_N) = \frac{\prod_{i=1}^{N}\exp\{-(\lambda+\mu)\}I_{n_i}\left(2\sqrt{\lambda\mu}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\exp\{-2\lambda\}I_{n_i}(2\lambda)(\lambda/\mu)^{n_i/2}}. \quad (36)$$

С учетом того что $\lambda \ll 0$, $\mu \ll 0$, функции Бесселя можно представить в виде [7]

$$I_n(z) = (z/2)^n/n!. \quad (37)$$

Тогда, подставив (36) и (37) в выражение (35), после несложных преобразований получим

$$(\lambda \hat{-} \mu) = \sum_{i=1}^{N} n_i \frac{\ln\mu - \ln\lambda}{N}. \quad (38)$$

Таким образом, выражение (38) определяет оптимальный алгоритм обработки сигналов в одном канале датчика Гартмана.

В рекуррентном виде выражение (38) можно определить как

$$\begin{aligned} (\lambda \hat{-} \mu)_j &= \frac{\ln\mu_j - \ln\lambda_j}{j}\sum_{i=1}^{j} n_i; \\ (\lambda \hat{-} \mu)_{j+1} &= \frac{(\lambda-\mu)_j j}{j+1} + \frac{\ln\hat{\mu}_j - \ln\hat{\lambda}_{j+1}}{j+1} n_{j+1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Оценки параметров μ_j и λ_j могут быть получены известными способами, т.к., по сути, они являются пуассоновскими.

5. Выводы

Таким образом, в результате проделанных аналитических выкладок получено выражение (38) для оптимальной оценки сигнала на выходе одного канала датчика Гартмана. Анализ выражения (38) показывает, что используемый в настоящее время алгоритм обработки, предусматривающий простое суммирование отсчетов фотоэлектронов, является, по существу, квазиоптимальным. При этом он дает несколько завышенное значение величины наклонов. Плотность распределения сигнала на выходе одного канала датчика Гартмана в случае наличия плоского фазового фронта является симметричной и унимодальной, однако при этом она существенно отличается от гауссовской вследствие неравенства нулю высших кумулянтов. При наличии наклона фазового фронта плотность распределения остается унимодальной, однако смещается по оси абсцисс, и оптимальная оценка фазового фронта в этом случае должна находиться в виде (38).

Полученные выражения для характеристических функций вида (13), (22) могут быть также использованы при анализе качества функционирования адаптивных оптических систем фазового сопряжения. В заключение следует особо подчеркнуть, что предложенный подход является оптимальным только для слабых сигналов, когда и сигнал, и шум хорошо аппроксимируются пуассоновскими распределениями. Однако в случае отличия плотности распределения шума и сигнала от пуассоновского получение аналогичных выражений для оптимальных оценок возможно на базе предложенного подхода анализа кумулянтов соответствующих случайных величин и процессов.

1. Устинов Н.Д., Матвеев И.Н., Протопопов В.В. Методы обработки оптических полей в лазерной локации. М.: Наука, 1983. 272 с.
2. Лукин В.П. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. N 6. С. 563 – 573.
3. Безуглов Д.А. // Автометрия. 1990. N 2. С. 21.
4. Безуглов Д.А., Мищенко Е.Н., Серпенинов О.В. // Оптика атмосферы. 1991. N 2. С. 161 – 166.
5. Гальярди Р.М., Карп Ш. Оптическая связь: Пер. с англ. / Под ред. А.Г. Шереметьева. М.: Связь, 1978. 424 с.
6. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 376 с.
7. Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовица и К. Стиган. М. Наука, 1979. 832 с.

Ростовское высшее военное командно-инженерное училище ракетных войск им. М.И. Неделина

Поступила в редакцию 20 июня 1994 г.

D.A. Bezuglov, E.H. Mishchenko. **Optimal Estimation of Phase Local Sloping by Hartmann Sensors on the Background of Poisson Noise.**

Based on analysis of a system of random values cumulants the analitical expressions are obtained for characteristic functions and distribution densities, which describe signals in a channel of Hartmann sensor. Probability ratio equation is solved and an expression is obtained for statistically optimal estimation of local sloping by sensor of Hartmann type.