

**А.А. Землянов, В.В. Колосов**

## **ИССЛЕДОВАНИЕ УСИЛЕНИЯ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АКТИВНОЙ РЕФРАКЦИОННОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА**

Рассматривается лучевой метод описания усиления спонтанного излучения в активной среде на основе уравнения переноса излучения. В рамках данного подхода получены аналитические решения для распределения интенсивности и функции когерентности в выходной плоскости активной среды с параболическими профилями распределения диэлектрической проницаемости и коэффициента излучения в поперечном сечении. Произведен анализ применимости приближения, при котором полагается, что вклад в выходное излучение вносится только спонтанными источниками, прилегающими к дальней торцевой области активной среды. Показано, что для многих реальных ситуаций данное приближение является неприемлемым, и требуется учитывать источники во всем объеме активной среды.

Исследование усиления спонтанного излучения в активных средах с неоднородным распределением плотности инверсной населенности является важным для создания безрезонаторных лазеров, т.е. лазеров, у которых отсутствуют торцевые отражатели (зеркала). В отличие от традиционных лазеров, для которых когерентные свойства выходного излучения в существенной степени определяются типом и качеством резонатора, для данного типа лазеров выходное излучение полностью определяется пространственным распределением рефракционных и усиливающих свойств активной среды.

Существует несколько подходов к теоретическому описанию выходного излучения данных лазеров. Все они базируются на параксиальном приближении волнового уравнения. Наибольшее распространение получил подход, основанный на разложении волнового поля в бесконечный ряд по поперечным модам [1, 2].

Данный подход близок к традиционным методам оптики лазеров. Однако практически он может быть использован для ограниченного набора профилей диэлектрической проницаемости и коэффициента усиления активной среды, для которых поперечные моды могут быть найдены аналитически. Другой подход [3] основан на численном решении параксиального волнового уравнения с использованием метода операторного расщепления и метода быстрого преобразования Фурье. Спонтанное излучение моделируется методом Монте-Карло путем введения случайной начальной фазы. Функция когерентности вычисляется посредством временного усреднения по 100 – 200 временным шагам. Третий подход основан на решении уравнения для поперечной функции когерентности [4, 5]. В рамках этого подхода удалось получить аналитические решения данной задачи для ряда профилей распределения диэлектрической проницаемости, в том числе для случая насыщения усиления излучения.

В настоящей статье излагается подход, основанный на решении уравнения переноса излучения. Данное уравнение является приближенным следствием уравнения для поперечной функции когерентности и позволяет не только реализовать эффективные численные алгоритмы решения данной задачи, но и получить аналитические решения для неоднородного распределения диэлектрической проницаемости и коэффициента усиления в активной среде.

1. В качестве исходного уравнения будем рассматривать параксиальное волновое уравнение

$$2 i k \frac{\partial E}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 E + k^2 \Delta \varepsilon(z, \rho) E(z, \rho) = P_{sp}(z, \rho), \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число;  $\Delta \varepsilon$  – относительное возмущение комплексной диэлектрической проницаемости;  $P_{sp}$  – член, обусловленный наличием спонтанной поляризации в среде;  $\mathbf{r} = (z, \rho)$ .

Рассмотрим активную среду с относительным распределением диэлектрической проницаемости

$$\Delta \varepsilon(z, \rho) = \varepsilon(z, \rho) + i \sigma(z, \rho), \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – реальная составляющая;  $\sigma$  – мнимая часть диэлектрической проницаемости, связанная с коэффициентом усиления среды  $g$  следующим соотношением:

$$\sigma(z, \rho) = -k^{-1} g(z, \rho).$$

Вид функций  $\varepsilon$  и  $\sigma$  определяется пространственным распределением плотности инверсной населенности в среде. Спонтанное излучение обусловлено наличием случайной поляризации в среде, которая, считаем, подчинена гауссовой статистике и удовлетворяет условию

$$\langle P_{sp}(\mathbf{r}) P_{sp}^*(\mathbf{r}') \rangle = W_{ef}(\mathbf{r}) g_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3)$$

где  $W_{ef}$  – эффективная интенсивность спонтанной эмиссии;  $g_0$  – значение коэффициента усиления в начале координат. Тогда в приближении параксиальной оптики мы можем записать уравнение для функции когерентности

$$2 i k \frac{\partial \Gamma_2}{\partial z} + 2 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho} \Gamma_2 + k^2 [\Delta \varepsilon(z, \mathbf{R} + \rho/2) - \Delta \varepsilon^*(z, \mathbf{R} - \rho/2)] \Gamma_2(z, \mathbf{R}, \rho) = \frac{i g_0}{k} W_{ef}(z, \mathbf{R}) \delta(\rho), \quad (4)$$

где введены суммарная  $\mathbf{R} = (\rho_1 + \rho_2)/2$  и разностная  $\rho = \rho_1 - \rho_2$  поперечные координаты.

Функция когерентности обращается в ноль для значений  $\rho$ , больших радиуса когерентности  $\rho_c$ . Тогда при условии  $\rho_c < a_t$  ( $a_t$  – характерный масштаб изменения  $\Delta \varepsilon$  по поперечной координате  $\rho$ ) мы можем использовать приближенное разложение Тейлора

$$\Delta \varepsilon(z, \mathbf{R} + \rho/2) - \Delta \varepsilon^*(z, \mathbf{R} - \rho/2) \approx \rho \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(z, \mathbf{R}) + 2 i \sigma(z, \mathbf{R}). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем уравнение

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial z} + \left[ \frac{1}{i k} \nabla_{\rho} \nabla_{\mathbf{R}} + \frac{k}{2 i} \rho \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(z, \mathbf{R}) + k \sigma(z, \mathbf{R}) \right] \Gamma_2(z, \mathbf{R}, \rho) = \frac{g_0}{2 k^2} W_{ef}(z, \mathbf{R}) \delta(\rho). \quad (6)$$

Уравнение (6) отличается от соответствующего уравнения [4] наличием функции источника в правой части.

Далее, выполняя преобразование Фурье по  $\rho$ , получим уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial z} + \left[ \frac{\mathbf{n}_{\perp}}{k} \nabla_{\mathbf{R}} + \frac{k}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon \nabla_{\mathbf{n}_{\perp}} + k \sigma(z, \mathbf{R}) \right] J(z, \mathbf{R}, \mathbf{n}_{\perp}) = \frac{g_0}{8 \pi^2 k^2} W_{ef}(z, \mathbf{R}), \quad (7)$$

где  $J$  – яркость излучения, которая определяется как Фурье-образ функции когерентности

$$J(z, \mathbf{R}, \mathbf{n}_{\perp}) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_2(z, \mathbf{R}, \rho) \exp(-i \mathbf{n}_{\perp} \rho) d\rho. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) можно представить в виде

$$J(z, \mathbf{R}, \mathbf{n}_{\perp}) = \frac{g_0}{8 \pi^2 k^2} \int_0^z dz' W_{ef}(z', \mathbf{R}(z')) \exp \left[ \int_{z'}^z dz'' g(z'', \mathbf{R}(z'')) \right], \quad (9)$$

где характеристика  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(z')$  подчинена уравнению

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dz^2} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(z, \mathbf{R}(z)) \quad (10)$$

и начальным условиям  $\mathbf{R}(z' = z) = \mathbf{R}$ ;  $d\mathbf{R}(z' = z)/dz' = \mathbf{n}_{\perp}$ .

Система уравнений (9), (10) может быть решена численно для произвольного вида функций  $\varepsilon$  и  $g$ . Алгоритм численного решения и анализ точности данного метода представлены в [6–8].

2. Рассмотрим аналитическое решение для параболического распределения плотности инверсной населенности. Будем считать, что для данного случая функции  $\varepsilon$  и  $g$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{R}) &= 1 + (R^2 - a^2)/L_R^2, \quad |\mathbf{R}| < a, \quad \varepsilon(\mathbf{R}) = 1, \quad |\mathbf{R}| > a, \\ g(\mathbf{R}) &= g_0(1 - R^2/a^2), \quad |\mathbf{R}| < a, \quad g(\mathbf{R}) = 0, \quad |\mathbf{R}| > a. \end{aligned} \quad (11)$$

Первоначально определим вклад в выходную яркость от бесконечно тонкого слоя излучателей, расположенных в плоскости  $z = z_0$ , т.е. положим

$$W_{ef}(z, \mathbf{R}) = W_{\delta ef}(\mathbf{R}) \delta(z - z_0).$$

Тогда из (9) следует

$$J_{\delta}(z, \mathbf{R}, \mathbf{n}_{\perp}) = \frac{g_0}{8\pi^2 k^2} W_{\delta ef}(\mathbf{R}_0) \exp \left[ \int_{z_0}^z dz' g(z, \mathbf{R}(z')) \right], \quad (12)$$

где характеристика  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(z')$  определяется выражением

$$\mathbf{R}(z') = \mathbf{R}_0 / \text{ch}((z' - z_0)/L_R) + \frac{\mathbf{n}_{\perp}}{k} L_R \frac{\text{sh}((z' - z_0)/L_R)}{\text{ch}((z' - z_0)/L_R)} \quad (13)$$

и удовлетворяет граничным условиям:  $\mathbf{R}(z' = z_0) = \mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}(z' = z) = \mathbf{R}$ . Подставляя (13) в (12) и выполняя интегрирование по  $z'$ , для  $|\mathbf{R}| < a$  получаем

$$\begin{aligned} J_{\delta}(z, \mathbf{R}, \mathbf{n}_{\perp}) &= \frac{W_{\delta ef}(\mathbf{R}_0)}{8\pi^2 k^2} \exp(g_0(z - z_0)) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{g_0 L_R}{4a^2} \left[ \mathbf{R}^2 (\text{sh}(2\bar{z}) + 2\bar{z}) + \frac{\mathbf{n}_{\perp}^2 L_R^2}{k^2} (\text{sh}(2\bar{z}) - 2\bar{z}) - \frac{2\mathbf{Rn}_{\perp} L_R}{k} (\text{ch}(2\bar{z}) - 1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\bar{z} = \frac{z - z_0}{L_R}$ . Тогда для функции когерентности мы можем записать

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\delta}(z, \mathbf{R}, \rho) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{n}_{\perp} J(z, \mathbf{R}, \mathbf{n}_{\perp}) \exp(i \mathbf{n}_{\perp} \rho) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{R}_0 \left| \frac{d\mathbf{n}_{\perp}}{d\mathbf{R}_0} \right| J_{\delta}(\mathbf{R}(z, \mathbf{R}, \mathbf{n}_{\perp}(z - z_0, \mathbf{R}, \mathbf{R}_0)) \exp[i \rho \mathbf{n}_{\perp}(z - z_0, \mathbf{R}, \mathbf{R}_0)], \end{aligned} \quad (15)$$

где мы перешли от интегрирования по угловым координатам в выходной плоскости к интегрированию по пространственным координатам в плоскости излучения. Детерминант данного перехода равен

$$\left| \frac{d\mathbf{n}_{\perp}}{d\mathbf{R}_0} \right| = \frac{k^2}{L_R^2 \text{sh}^2(\bar{z})}, \quad (16)$$

где принято во внимание выражение

$$\mathbf{n}_{\perp} = k[\mathbf{R} \text{ch}(\bar{z}) - \mathbf{R}_0] / [L_R \text{sh}(\bar{z})], \quad (17)$$

которое следует из (13). Будем считать, что эффективная интенсивность источников в плоскости излучения  $z = z_0$  распределена по закону

$$W_{\delta_{ef}}(\mathbf{R}_0) = W_{\delta_0} \exp(-R_0^2 / a^2). \quad (18)$$

Данное выражение следует рассматривать как аппроксимацию, т.к. в строгой постановке задачи распределение интенсивности источников должно повторять распределение коэффициента усиления, т.е. иметь параболический профиль. Подставляя (16), (17) и (18) в (15), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\delta}(z, \mathbf{R}, \rho) &= \frac{W_{\delta_0} g_0 \exp(g_0(z - z_0))}{8\pi^2 L_R^2 \text{sh}^2(\bar{z})} \exp\left(\frac{ik\mathbf{R}\rho}{L_R \text{th}(\bar{z})}\right) \exp\left(-\frac{R^2}{a^2} A\right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{R}_0 \exp\left(-\frac{R_0^2}{a^2} [1 + A]\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{R}_0}{a^2} [2\mathbf{R} B - i\rho C]\right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{где } A = \frac{g_0 L_R \text{sh}(\bar{z}) \text{ch}(\bar{z}) - \bar{z}}{2 \text{sh}^2(\bar{z})}; \quad B = \frac{g_0 L_R \text{sh}(\bar{z}) - \bar{z} \text{ch}(\bar{z})}{2 \text{sh}^2(\bar{z})}; \quad C = \frac{L_D}{L_R \text{sh}(\bar{z})}.$$

Интеграл по  $\mathbf{R}_0$  в (19) легко вычисляется аналитически. Тогда мы можем записать следующие выражения для выходной интенсивности излучения:

$$W_{\delta}(z, \mathbf{R}) = \Gamma_{2\delta}(z, \mathbf{R}, \rho = 0) = \frac{W_{\delta_0} a^2 g_0 \exp(g_0 z)}{8\pi L_R^2 \text{sh}^2(\bar{z}) (1 + A)} \exp\left(-\frac{\mathbf{R}^2}{a_w^2}\right) \quad (20)$$

и для выходной функции когерентности на оси активной среды

$$\Gamma_{2\delta}(z, \mathbf{R} = 0, \rho) = \frac{W_{\delta_0} g_0 \exp(g_0 z) a^2}{8\pi L_R^2 \text{sh}^2(\bar{z}) (1 + A)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4 a_\rho^2}\right), \quad (21)$$

$$\text{где } a_w^2 = a^2(1 + A) / (A + A^2 - B^2); \quad a_\rho^2 = a^2(1 + A) / C^2.$$

Таким образом, для получения окончательного результата остается только проинтегрировать по всем излучающим плоскостям, т.е. по  $z_0$

$$\Gamma_2(z, \mathbf{R}, \rho) = \int_0^z dz_0 \Gamma_{2\delta}(z - z_0, \mathbf{R}, \rho). \quad (22)$$

Однако для активных сред с большим коэффициентом усиления  $G = g_0 z > 10$  (что характерно, например, для рентгеновских лазеров) можно считать, что основной вклад в выходное излучение вносит узкая торцевая область активной среды  $0 < z_0 < z_{ef}$ . В этом случае окончательно получаем

$$\Gamma_2(z, \mathbf{R}, \rho) = z_{ef} \Gamma_{2\delta}(z - z_0, \mathbf{R}, \rho) \Big|_{z_0=0}, \quad (23)$$

где  $z_{ef}$  определяем из выражения

$$z_{ef} = \int_0^z \exp(-g_0 z_0) dz_0 = 1/g_0 \ll z. \quad (24)$$

Строго говоря, приближение (23), (24) является оправданным для случая, когда в решении (21), (22) все функции изменяются медленно с ростом  $z$  по сравнению с  $\exp(g_0 z)$ . Однако в знаменателях (21) и (22) присутствует функция  $\text{sh}(\bar{z})$ , изменения которой при малых значениях  $L_R$  ( $L_R \approx 2/g_0$ ) будут сравнительны с  $\exp(g_0 z)$ . В этом случае требуется учитывать влияние источников излучения во всем объеме активной среды.

3. Для того чтобы определить, насколько существен вклад источников излучения, расположенных вне торцевой области активной среды, необходимо выполнить интегрирование по  $z_0$  в соответствии с (22) и сравнить полученный результат с приближением (23), (24). Однако если нас интересует только значение поперечного радиуса когерентности выходного излучения, то задача существенно упрощается. Введем следующее определение для поперечного радиуса когерентности  $\rho_c$ :

$$\rho_c^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int d\rho \mu(\rho), \quad (25)$$

где  $\mu$  – есть модуль степени когерентности на оси

$$\mu(\rho) = \frac{|\Gamma_2(z, \mathbf{R} = 0, \rho)|}{W(z, \mathbf{R} = 0)} = \frac{|\Gamma_2(z, \mathbf{R} = 0, \rho)|}{\Gamma_2(z, \mathbf{R} = 0, \rho = 0)}. \quad (26)$$

Для приближения (23) из (21), (25) и (26) получаем

$$\rho_c = a_\rho(z - z_0) \Big|_{z_0=0} = \frac{1}{F_x \bar{z}} \sqrt{\text{sh}(\bar{z}) + \frac{G}{2\bar{z}} (\text{sh}(\bar{z}) \text{ch}(\bar{z}) - \bar{z})}, \quad (27)$$

где  $F_x = ka^2/z$  – число Френеля. Данный результат хорошо согласуется с оценками, выполненными в рамках геометрической оптики [9]. Используя выражение (22), из (25) и (26) получаем

$$\rho_c^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int d\rho \int_0^z dz_0 \Gamma_{2\delta}(z - z_0, \mathbf{R} = 0, \rho)}{\int_0^z dz_0 W_\delta(z - z_0)}. \quad (28)$$

Из (21) и (22) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int d\rho \Gamma_{2\delta}(z - z_0, \mathbf{R} = 0, \rho) = a_r^2(z - z_0) W_\delta(z - z_0, \mathbf{R} = 0) = P_{c0} \exp(-g_0 z_0), \quad (29)$$

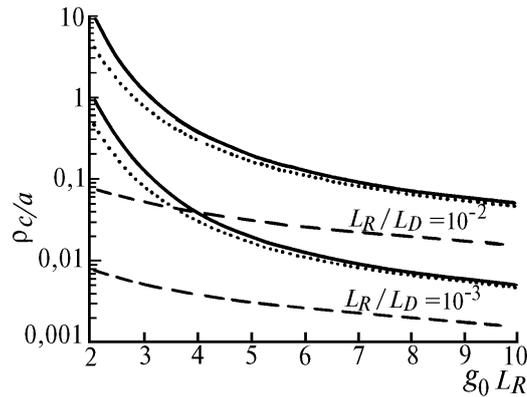
где  $P_{c0} = W_{\delta 0} g_0 / (8\pi k^2) \exp(g_0 z)$ . Отметим, что  $P_{c0}$  не зависит от поперечных размеров активной среды. Тогда с учетом (29) из (28) для поперечного радиуса когерентности получаем

$$\rho_c = [g_0 \int_0^z dz_0 a_r^2(z - z_0) \exp(-g_0 z_0)]^{-1/2}. \quad (30)$$

На рисунке представлены результаты расчетов поперечных радиусов когерентности, рассчитанных по формулам (27) и (30) в зависимости от значений  $G_R = g_0 L_R$ . Штриховыми линиями представлены значения радиуса когерентности, вычисляемое согласно теореме Ван – Циттерта – Цернике

$$\rho_c = z/ka. \quad (31)$$

Данные значения радиуса когерентности соответствуют случаю активной среды с однородным распределением инверсной населенности в цилиндрической области  $|\mathbf{R}| \leq a$ . Видно, что в области больших значений  $G_R$ , когда выполняется условие  $z_{\text{ef}} \ll z$ , расчеты по формулам (27) и (30) практически совпадают. При уменьшении  $G_R$  данное условие нарушается и результаты становятся отличными. При  $G_R \approx 2$  результаты могут отличаться более чем в 2 раза. Это указывает на неприменимость приближения (23), (24) для данных ситуаций, которые являются достаточно распространенными для рентгеновских лазеров.



Зависимость нормированного поперечного радиуса когерентности от параметра  $G_R = g_0 L_R$ . Сплошные линии – расчет по формуле (27), точки – по формуле (30), штриховая линия – по формуле (31). Расчеты выполнены для коэффициента усиления  $G = g_0 z = 15$

### Заключение

Таким образом, в работе получено аналитическое решение задачи усиления спонтанного излучения в активной среде с параболическими профилями распределения диэлектрической проницаемости и коэффициента усиления в поперечном сечении. Полученные решения для распределения интенсивности (20) и функции когерентности (21) в выходной плоскости активной среды являются достаточно строгими решениями уравнения переноса излучения (7), а следовательно, и тождественного ему уравнения для функции когерентности (6). При выводе (20) и (21) было сделано только одно приближение – параболический профиль интенсивности спонтанных источников был аппроксимирован гауссовым распределением (18).

Однако сами уравнения (6) и (7) получены из точного уравнения для функции когерентности (4) с использованием аппроксимации (5). Несложно убедиться, что для параболических профилей  $\epsilon$  и  $g$  (11) аппроксимация (5) является точной для реальной части диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и приближенной для мнимой части  $\sigma$ . При использовании (5) мы теряем слагаемое  $i(\rho^2/4) \nabla_{\mathbf{R}}^2 \sigma(z, \mathbf{R})$ , которое отвечает за описание <дополнительной> дифракции, обусловленной искажениями волны за счет неоднородного поглощения ее энергии в поперечном сечении. Роль данного слагаемого может быть определена путем сравнения решений (20), (21) с решениями точного уравнения (4) для параболических профилей  $\epsilon$  и  $\sigma$  (11). Такое решение уравнения (4) существует, но его рассмотрение выходит за рамки этой статьи. Отметим только, что аппроксимация (5) применима при условии  $z \ll 2L_D/(g_0 L_R)$ , которое выполняется для большинства реальных ситуаций. Отметим также, что использование аппроксимации (5) вынуждает нас при определении радиуса когерентности брать определение (26) вместо точного определения

$$\mu(\rho) = \frac{|\Gamma_2(z, \mathbf{R} = 0, \rho)|}{\sqrt{W(z, \mathbf{R} = \rho/2) W(z, \mathbf{R} = -\rho/2)}}$$

т.к. последнее приводит к неверным результатам в данном случае.

1. Sieqman A. E. // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. P. 1253.
2. London R. A., Strauss M., Rozen M. D. // Phys. Rev. Letters. 1990. V. 65. P. 563.
3. Feit M. D., Fleik I. A. // IOA – B. 19. V. 7. №3. P. 2048 – 2060.
4. Стариков Ф. А. // Квантовая электроника. 1993. Т. 20. №5. С. 477 – 481.
5. Ладагин В. К., Стариков Ф. А., Урлин В. Д. // Квантовая электроника. 1993. Т. 20. №5. С. 471–476.
6. Колосов В. В., Кузиковский А. В. // Квантовая электроника. 1981. Т. 8. №3. С. 490 – 494.
7. Землянов А. А., Синев С. Н. // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. №1. С. 44 – 50.
8. Колосов В. В., Кузнецов М. Ф. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. N 9. С. 1099 – 1105.
9. London R. A. // Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 184 – 192.

Институт оптики атмосферы  
СО РАН, Томск

Поступила в редакцию  
15 июля 1994 г.

**A . A . Z e m l y a n o v , V . V . K o l o s o v . Description of a Spontaneous Emission Gain inside Active Refraction Media within the Limits of Transfer Equation.**

Ray method of a description of the spontaneous emission gain inside an active media based on radiation transfer equation is observed in the paper. In the context of the approach the analytical values are obtained of an intensity distribution and the coherence function in the active media output plane with cross-sectional parabolic profiles of dielectric penetrability and radiation coefficient distribution. An analysis of an approach applicability is presented when only spontaneous sources adjacent to the far end region of the active media are meant to contribute to the output radiation. This approach is shown to fail in many actual situations, so the sources all over the active media volume should be taken into account.