

В.П. Аксенов, В.А. Банах, Е.В. Захарова, Ю.Н. Исаев

**ОПТИМАЛЬНОЕ МОДОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФАЗЫ, ВОССТАНОВЛЕННОЙ ПО ИЗМЕНЕНИЯМ НАКЛОНОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ.
Ч. II. ПОГРЕШНОСТЬ АЛГОРИТМОВ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ**

Описаны алгоритмы и результаты построения оптимального модового разложения случайной фазы оптической волны в турбулентной атмосфере. Приведен аналитический вид основных мод Карунена – Лозва – Обухова в представлении через базис Цернике.

В первой части настоящей статьи [1] нами предложен полуаналитический подход к проблеме получения модовых разложений случайной фазы, регистрируемой датчиками волнового фронта в системах атмосферной адаптивной оптики. Использование таких разложений минимизирует ошибку аппроксимации случайной фазы, усредненную по ансамблю ее реализаций. Подход базируется на теории статистически ортогональных разложений Карунена – Лозва – Обухова и позволяет использовать для построения разложения функции в конечной области статистическую информацию об этой функции, заключенную в ее пространственной корреляции.

Данный подход, в отличие от чисто численного метода, продемонстрированного в [2], позволяет оптимизировать модовое разложение по любой заданной системе функций, будь то широко используемые полиномы Цернике, при которых абберации волнового фронта представляются через наклоны, дефокусировку, дисторсию, кому и др., или функции Уолша [3], являющиеся базисными при зональной ступенчатой компенсации. Подход, предлагаемый нами, не является полностью аналитическим.

На разных этапах построения оптимального разложения используются численные методы, возникают погрешности, связанные с использованием конечного числа членов разложений функций в бесконечные ряды.

В данной статье обсуждаются вопросы точности и результаты численного эксперимента по построению оптимального базиса для представления фазы оптической волны в турбулентной атмосфере со степенным спектром Колмогорова – Обухова.

Остановимся вначале на проблеме погрешности представления ядра адаптивного интегрального уравнения (формула (8) в [1]). В большинстве интересных случаев ядром этого уравнения является структурная функция фазы $D_s(\rho)$. Мы используем в [1] разложение структурной функции фазы по функциям Бесселя

$$D_s(\rho) = \sum_{p=0}^P a_p J_0\left(\mu_p \frac{\rho}{2R}\right); \quad (1)$$

$$a_p = \frac{2}{R^2 [J_0'(\mu_p)]^2} \int_0^{2R} \rho D_s(\rho) J_0\left(\mu_p \frac{\rho}{2R}\right) d\rho. \quad (2)$$

Все обозначения данной статьи в формуле (1) совпадают с обозначениями [1]. Для Колмогоровского спектра атмосферной турбулентности [3] запишем

$$D_s(\rho) = 6,88 (\rho/r_0)^{5/3}, \quad (3)$$

где $r_0 = 0,1851371(C_n^2 L/\lambda^2)^{-3/5}$ – радиус Фрида, связанный со структурной постоянной коэффициентом преломления C_n^2 , длиной трассы распространения оптической волны L и длиной волны λ . Для расчетов коэффициентов разложения a_p нами использовалась стандартная процедура вычисления интегралов методом Гаусса. При этом погрешность вычисления интеграла (2) не превышала 10^{-8} .

Погрешность вычисления аппроксимации (1) Δ определялась по следующей формуле:

Оптимальное модовое разложение фазы

$$\Delta \leq \max_{0 \leq \theta \leq 2R} \left| D_S(\rho) - \sum_{p=0}^P a_p J_0 \left(\mu_p \frac{\rho}{2R} \right) \right|. \quad (4)$$

Например, при условии $\Delta = 10^{-6}$ число членов в разложении (1) P равнялось 30. В соответствии с формулой (13) [1] это же число определяло размерность квадратной матрицы Грама. Для диагонализации матриц использовался метод Якоби [4]. Это дало возможность определить спектр собственных чисел Λ_k и вычислить коэффициенты разложения $K(\rho)$ по функциям Бесселя. В соответствии с порядком возрастания Λ_k , была выбрана последовательность функций, которая представляла собой адаптивные моды (полиномы) Карунена – Лоэва – Обухова. Вид Ψ_k для $k=2, \dots, 13$ представлен на рис. 1. Радиальные части первых полиномов в сравнении с радиальными частями полиномов Цернике приведены на рис. 2.

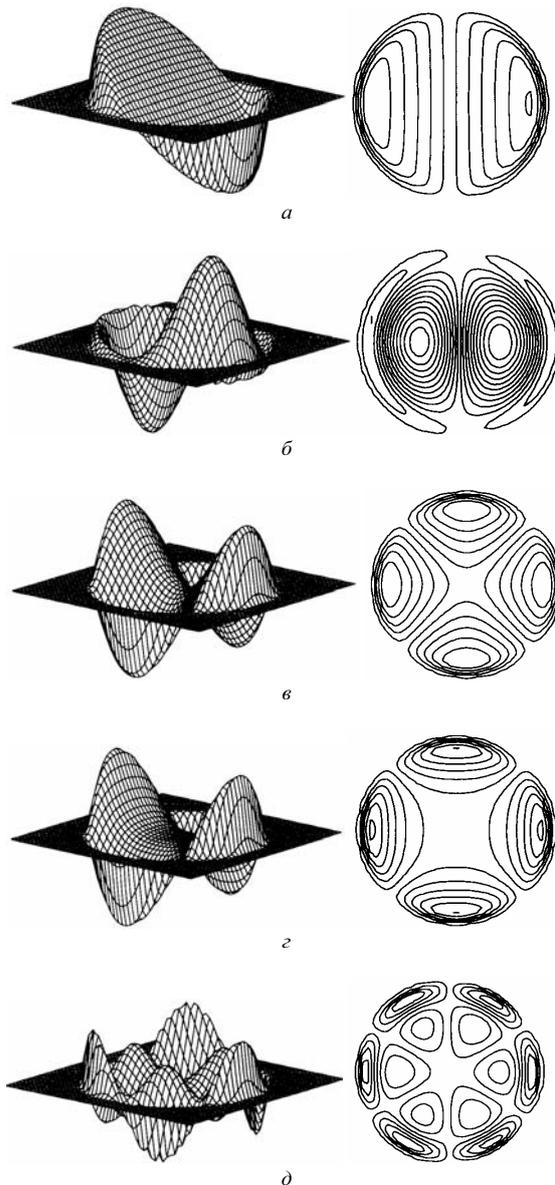


Рис. 1. Изометрии и изолинии мод Карунена – Лоэва – Обухова; Ψ_k для $k=2(a)$; $8(б)$; $4(в)$; $13(г)$; $7(д)$

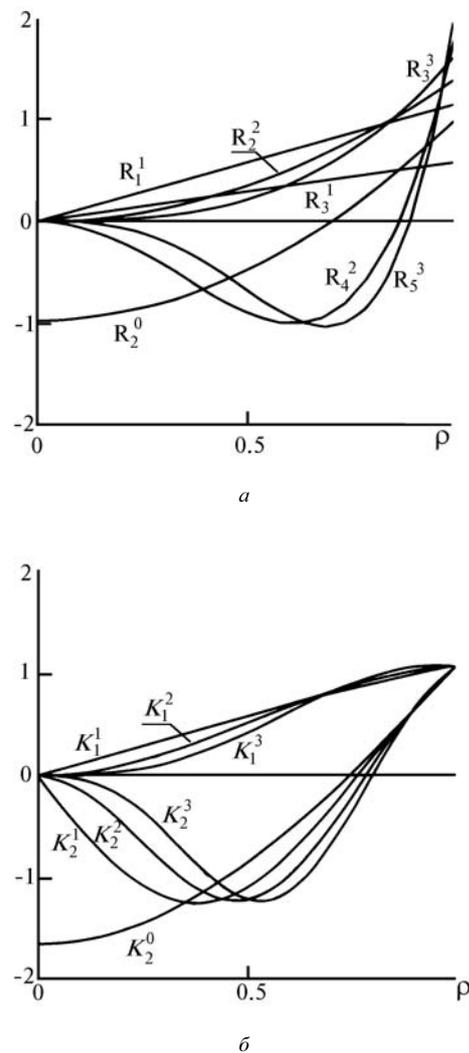


Рис. 2. Радиальные части полиномов: a – полиномы Цернике; b – полиномы Карунена – Лоэва – Обухова

Из рисунков следует, что полиномы Цернике близки к адаптивным полиномам только лишь в случае мод низкого порядка. Очевидно, что если в качестве базиса разложения выбрать базис Цернике, то заданная точность представления будет достигаться уже с помощью нескольких первых членов нового ряда.

В первой части статьи мы описали способ перехода от представления функции в обычном базисе Цернике к адаптивному представлению в том же базисе по формуле

$$K_j^l(\rho) = \sum_{n=1}^N w_{jn}^l R_n^l(\rho). \quad (5)$$

Приведем явный вид матриц такого преобразования w_{jn}^l для пяти последовательных значений азимутальных индексов l и индексов радиального расщепления j . Выбор этого числа индексов (а следовательно, и выбор размерности вектор-строк $\mathbf{w}_j^l \{w_{jn}^l\}$) вполне достаточен для того, чтобы средняя квадратичная ошибка аппроксимации случайной фазы $\langle \varepsilon^2 \rangle$ не превышала 10^{-6} . Ниже значения радиальных компонент функции Карунена – Лозва – Обухова и полиномов Цернике для различных значений индекса j объединены в матрицы-столбцы, а матрицы-строки \mathbf{w}_j^l объединены в квадратные матрицы. При этом

$$\begin{pmatrix} K_1^0 \\ K_2^0 \\ K_3^0 \\ K_4^0 \\ K_5^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9754 & 0,2205 & -0,0014 & -0,0001 & 0,0000 \\ -0,2203 & 0,9739 & -0,0554 & 0,0043 & 0,0000 \\ -0,0104 & 0,0518 & 0,9218 & -0,3761 & 0,0777 \\ -0,0030 & 0,0157 & 0,3451 & 0,7250 & -0,5958 \\ -0,0012 & 0,0067 & 0,1677 & 0,5770 & 0,7993 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_0^0 \\ R_2^0 \\ R_4^0 \\ R_6^0 \\ R_8^0 \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} K_1^{\pm 1} \\ K_2^{\pm 1} \\ K_3^{\pm 1} \\ K_4^{\pm 1} \\ K_5^{\pm 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9995 & -0,0319 & 0,0018 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0310 & 0,9540 & -0,2945 & 0,0472 & -0,0034 \\ 0,0072 & 0,2677 & 0,7790 & -0,5428 & 0,1637 \\ 0,0029 & 0,1187 & 0,4794 & 0,5413 & -0,6805 \\ 0,0013 & 0,0563 & 0,2768 & 0,6404 & 0,7142 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_1^{\pm 1} \\ R_3^{\pm 1} \\ R_5^{\pm 1} \\ R_7^{\pm 1} \\ R_9^{\pm 1} \end{pmatrix}; \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} K_1^{\pm 2} \\ K_2^{\pm 2} \\ K_3^{\pm 2} \\ K_4^{\pm 2} \\ K_5^{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9838 & -0,1784 & 0,0192 & -0,0007 & 0,0000 \\ 0,1675 & 0,8758 & -0,4406 & 0,1030 & -0,0125 \\ 0,0563 & 0,3794 & 0,6201 & -0,6331 & 0,2535 \\ -0,0256 & -0,1908 & -0,4715 & -0,2655 & 0,6808 \\ -0,0140 & -0,1101 & -0,3200 & -0,4065 & 0,0827 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_2^{\pm 2} \\ R_4^{\pm 2} \\ R_6^{\pm 2} \\ R_8^{\pm 2} \\ R_{10}^{\pm 2} \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} K_1^{\pm 3} \\ K_2^{\pm 3} \\ K_3^{\pm 3} \\ K_4^{\pm 3} \\ K_5^{\pm 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9599 & -0,2770 & 0,0429 & -0,0029 & 0,0002 \\ 0,2523 & 0,7898 & -0,5348 & 0,1609 & -0,0265 \\ 0,1028 & 0,4371 & 0,4741 & -0,6743 & 0,3322 \\ -0,05212 & -0,2503 & -0,4601 & -0,1023 & 0,6468 \\ -0,0308 & -0,1583 & -0,3361 & -0,3328 & 0,2137 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_3^{\pm 3} \\ R_5^{\pm 3} \\ R_7^{\pm 3} \\ R_9^{\pm 3} \\ R_{11}^{\pm 3} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Отметим, что сумма квадратов элементов в каждой строчке и столбце равняется одному и тому же числу. Это должно совпадать с величиной нормы функции $K_j^l(\rho)$. В нашем случае эта норма равна единице. Очевидно, что близость к единице может служить критерием точности вычисления коэффициентов разложения базиса Карунена – Лозва – Обухова по базису Цернике. Приведем аналитический вид первых пяти полиномов Карунена – Лозва – Обухова, полученных на основе расчета матриц-строк \mathbf{w}_j^l для структурной функции вида (3). Выбор этих функций произведен из элементов $K_j^l(\rho)$ матриц-столбцов (6) – (9) после расстановки в порядке убывания собственных чисел λ_j^l .

$$\Psi_{1,2}(\rho, \theta) = K_1^1(\rho) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} = [0,9995 \cdot 2\rho - 0,03195(3\rho^3 - 2\rho)\sqrt{8}] \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix},$$

$$\Psi_{3,4}(\rho, \theta) = K_1^2(\rho) \begin{Bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{Bmatrix} = [0,9838\rho^2\sqrt{6} - 0,1784(4\rho^4 - 3\rho^2)\sqrt{10} + 0,0192\sqrt{14}(15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2)] \begin{Bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{Bmatrix},$$

$$\Psi_5(\rho, \theta) = K_1^0(\rho) = [0,9754 \cdot 2\rho - 0,2205(2\rho^2 - 1)\sqrt{3} + 0,0014(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)\sqrt{5}].$$

В настоящей статье исследована эффективность предлагаемого авторами полуаналитического подхода к решению проблемы построения оптимального для турбулентной атмосферы базиса в представлении случайной фазы в системах когерентной адаптивной оптики. Описаны алгоритмы численной реализации предлагаемого подхода, оценена погрешность, допускаемая при замене бесконечных рядов в представлении функции Карунена – Лоэва – Обухова рядом с конечным числом членов. Приведены результаты численного эксперимента и аналитический вид основных мод Карунена – Лоэва – Обухова в представлении через базис Цернике. Разработанные подходы и алгоритм могут послужить основой для построения программных комплексов, обеспечивающих управление корректорами волнового фронта, функционирующими по принципам модовой или зональной коррекции.

1. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 7. С. 947 –954.
2. Wang J.Y., Markey J.K. // J. Opt. Soc. Amer. 1978. V. 68. N 1. P. 78.
3. Лукьянов Д.П., Корниенко А.А., Рудницкий Б.Е. Оптические адаптивные системы. М.: Радио и связь, 1989. 238 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.

Институт оптики атмосферы
СО РАН, Томск

Поступила в редакцию
7 апреля 1994 г.

V.P. Aksenov, V.A. Banakh, E.V. Zakharova, Yu.N. Isaev. **Optimal Mode Expansion of Phase Reconstructed from Measurements of Wave Front Slopes in Turbulent Atmosphere. Part II Errors of Algorithms and Numerical Simulations.**

We describe in this paper algorithms and some results of constructing optimal mode expansion of random phase of an optical wave in turbulent atmosphere. We also present the obtained analytical form of the fundamental Karunen-Lowe-Obukhov modes represented in Zernike basis.