<Оптика атмосферы и океана>, **7**, N 6 (1994)

УДК 621.378

А.А. Ковалев

ВАРИАЦИОННЫЙ СИНТЕЗ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧЕ АКТИВНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Получены соотношения, показывающие, что оптимальным, с точки зрения минимума среднеквадратической ошибки оценки фазы, пространственным распределением зондирующего сигнала в картинной плоскости цели является финитная функция, ненулевая лишь в области, ограниченной контуром цели. Указанное обстоятельство создает предпосылки для последующего совершенствования метода активного восстановления изображений и служит побудительным мотивом для эвристического, а не регулярного синтеза алгоритмов восстановления изображений, поскольку никаких иных ограничений на пространственную структуру зондирующего сигнала не накладывает.

В работах [1, 2] предложен метод, позволяющий с помощью ортогональных пространственно-временных распределений излучаемого сигнала на раскрыве передающей апертуры восстановить при приеме изображение цели в условиях фазовых искажений пространственного спектра сигнала без наличия или формирования опорного источника в картинной плоскости цели.

В этой связи существенным представляется вопрос о том, наблюдается ли некое оптимальное распределение зондирующего сигнала независимо от того, рассматривать ли таковое в картинной плоскости цели или на раскрыве излучающей апертуры в силу взаимно однозначной связи, обусловленной интегральной формой записи дифракции Фраунгофера (Френеля). Важно также установить, как соотносится предложенное в [1, 2] решение с оптимальным, если таковое будет найдено.

Используя в дальнейшем для определенности модель Фраунгоферовой дифракции, будем искать такое пространственное распределение зондирующего сигнала в картинной плоскости цели, которое доставило бы выбранному показателю качества наилучшее значение. При этом сигнал в картинной плоскости цели после ее облучения можно представить в следующем факторизованном виде:

$$E_c(\mathbf{r}) = E_з(\mathbf{r})\, E(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}$ – пространственная координата в картинной плоскости цели; $E_з(\mathbf{r})$ – зондирующий сигнал, а $E(\mathbf{r})$ – искомое при восстановлении изображение.

Однако прежде необходимо задаться критерием оптимальности. Поскольку речь идет о необходимости компенсировать деструктивное действие фазовых искажений пространственного спектра сигналов на задачу восстановления изображений, то представляется целесообразным на роль показателя качества выбрать среднеквадратическую ошибку ($\sigma^2_{\varphi_n}$) оценки фазовых искажений пространственного спектра анализируемого сигнала.

Таким образом, <хорошей> модулирующей функцией в выбранном смысле будет та, которая позволит с максимально возможной точностью оценить фазовые искажения среды распространения. Тем самым необходимо обратиться к синтезу алгоритмов оптимальной оценки фазовых искажений, вносимых, как это чаще всего бывает в оптических задачах, средой распространения.

Функционал плотностей вероятностей поля, наблюдаемого в δ-коррелированном аддитивном шуме, запишется в виде [3]

$$F(\varepsilon(\rho, t) / A_0, \varphi) = K_\varphi \exp\Big(-\frac{1}{2N_0}\int_0^T\int_\Omega d\rho\, dt\, \varepsilon^2(\rho, t) - q_0 A_0^2 + \frac{A_0}{N_0}\,\mathrm{Re}\int_\Omega d\rho\, \varepsilon_0^*(\rho)\, \varepsilon(\rho)\, e^{-j\varphi(\rho)}\Big), \quad (2)$$

где

$$q_0 = \frac{T}{4\,N_0}\int\limits_{\Omega} d\,\rho\;\left|\,\varepsilon(\rho)\right|^2; \tag{3}$$

$$\varepsilon_0(\rho) = \int\limits_0^T d\,t\;\varepsilon(\rho, t)\;e^{j\omega_0 t}; \tag{4}$$

$$\varepsilon_c(\rho, t) = \mathrm{Re}\;(\,A_0\;\varepsilon(\rho)\;\exp\;(\,j\;(\varphi(\rho) - \omega_0))); \tag{5}$$

$$\varepsilon(\rho, t) = \varepsilon_c(\rho, t) + n(\rho, t); \tag{6}$$

ρ – пространственная координата в плоскости апертуры; T – временной интервал наблюдения; Ω – область интегрирования в плоскости апертуры; ω_0 – несущая частота; A_0 – амплитуда принятого сигнала, в общем случае – недетерминированная, а N_0 и $n(\rho, t)$ связаны соотношением:
$\langle n(\rho_1, t_1)\; n(\rho_2, t_2)\rangle = N_0\;\delta(\rho_1 - \rho_2)\;\delta(t_1 - t_2)$. (7)

В дальнейшем в литературе [3] исследование возможностей построения алгоритмов оценок параметров лоцируемых целей в условиях фазовых искажений существенным образом опиралось на одну из двух аппроксимаций функции, описывающей фазовые искажения. Именно первый класс аппроксимирующих функций включает в себя функции вида

$$\varphi(\rho) = \sum_{l=1}^{L} \varphi_l\;\chi_l\;(\rho - \rho_l), \tag{8}$$

где φ_l принимает любое значение, а

$$\chi_l\;(\rho - \rho_l) = \begin{cases} 1, & \forall\;\rho \in \Delta_r\,, \\ 0, & \forall\;\rho \notin \Delta_r\,; \end{cases} \tag{9}$$

второй же класс описывается равенством

$$\varphi(\rho) = \sum_{l=1}^{L} (\varphi_l - \kappa_l\;(\rho - \rho_l))\;\chi_l\;(\rho - \rho_l), \tag{10}$$

где κ_l – произвольный вектор; ρ_l – радиус-вектор центра корреляционной ячейки Δ_l. При этом область определения функции $\varphi(\rho)$ разбита на L отдельных областей Δ_l. Целью таких аппроксимаций является исключение явной зависимости оцениваемых при реализации адаптивных бейесовских алгоритмов фазовых искажений от подынтегрального ρ. Тем самым оценка континуального распределения $\varphi(\rho)$ сводится к оценке конечномерного вектора $\{\varphi_l\}$, $l = 1, \ldots, L$ в соответствии с выражением

$$\nabla_\varphi\;\ln F(\varepsilon(\rho, t)/A_0, \varphi) = 0, \tag{11}$$

которое для аппроксимации (8) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_l}\,\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{L} \exp\;(\,j\;\varphi_l)\int\limits_{\Delta_l} d\,\rho\;\varepsilon_0^*(\rho)\;\varepsilon(\rho) = 0, \tag{12}$$

откуда следует алгоритм оценки:

$$\hat{\varphi}_l = -\arg \int_{\Delta_l} d\rho\, \varepsilon_0^*(\rho)\, \varepsilon(\rho) \pm 2\pi n\,, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \quad l = 1, \ldots, L. \tag{13}$$

Вместе с тем с точки зрения синтеза адаптивных алгоритмов выбор класса функций, аппроксимирующих фазовые искажения $\varphi(\rho)$, не является принципиальным, т.к. аппарат вариационного исчисления позволяет определить экстремаль функционала (2), варьируя непосредственно оцениваемую функцию. В этом случае выражению (11) соответствует:

$$\frac{\delta}{\delta\, \varphi(\rho)} \ln F(\varepsilon\,(\rho', t) \,/\, A_0, \varphi(\rho')) = 0. \tag{14}$$

Руководствуясь правилами вариационного исчисления, изложенными, например, в [4], из (14) и (2) имеем

$$\frac{\delta}{\delta\, \varphi(\rho)} \ln F(\varepsilon\,(\rho', t) \,/\, A_0, \varphi(\rho')) = \frac{A_0}{N_0} \operatorname{Re} \int_{\Omega} d\rho' \frac{\delta}{\delta\, \varphi(\rho)} \varepsilon_0^*(\rho')\, \varepsilon(\rho')\, e^{j\varphi(\rho')} =$$

$$= \frac{A_0}{N_0} \operatorname{Re} \int_{\Omega} d\rho'\, \varepsilon_0^*(\rho')\, \varepsilon\,(\rho')\, \delta\,(\rho - \rho')\, e^{\,j\varphi(\rho')} = \frac{A_0}{N_0} \operatorname{Re} j\, \varepsilon_0^*(\rho)\, \varepsilon\,(\rho)\, e^{\,j\varphi(\rho)} = 0. \tag{15}$$

Из (15) следует, что

$$\hat{\varphi}(\rho) = \arg \varepsilon_0^*(\rho)\, \varepsilon(\rho) \pm 2\pi n\,, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \quad l = 1, \ldots, L. \tag{16}$$

Сравнивая (13) и (16), можно заметить, что (16) есть предельный переход от (13) при условии, что Δ_l стягивается в точку. Действительно, домножим (12) слева и справа на $1/S_l$, где $S_l = \int_{\Delta_l} d\rho$ – площадь области Δ_l. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_l} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{S_l} \exp\,(j\, \varphi_l) \int_{\Delta_l} d\rho\, \varepsilon_0^*(\rho)\, \varepsilon(\rho) = 0. \tag{17}$$

Дифференцируя и используя теорему о среднем [5], имеем:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{S_l} j\, \varepsilon_0^*(\rho_l')\, \varepsilon\,(\rho_l')\, e^{j\varphi(\rho_0')} \int_{\Delta_l} d\rho = 0, \tag{18}$$

где $\rho_l' \in \Delta_l$. Далее, стягивая Δ_l в точку, получаем:

$$\lim_{S_l \to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{S_l} j\, \varepsilon_0^*(\rho_l')\, \varepsilon(\rho_l')\, \varepsilon^{j\varphi(r_0')} \int_{\Delta_l} d\rho = \frac{A_0}{N_0} \operatorname{Re} j\, \varepsilon_0^*(\rho)\, \varepsilon(\rho)\, e^{j\varphi(\rho)} = 0, \tag{19}$$

что в точности совпадает с (15), ибо $\rho_l' \to \rho$ при $\Delta_l \to 0$.

Таким образом, аппроксимации (8) и (10) выступают не в виде принципиального ограничения на синтез оптимальных схем обработки, а в виде дискретизации, которая при реализации синтезированных алгоритмов аналоговыми устройствами в общем случае не обязательна.

Смысл же оптимальной схемы оценки фазовых искажений непосредственно следует из (16), сводясь к вычислению разности фаз принятого поля и известного при отсутствии фазовых искажений поля заданного источника.

Найдем теперь такое распределение $E_з(\mathbf{r})$, которое доставило бы алгоритму оценки (16) наибольшую точность.

Предельную точность оценки фазовых искажений определим, используя функциональный аналог матрицы Фишера – предельный переход к континууму:

$$-\left\langle \frac{\delta^2 \ln F(\varepsilon(\rho, t) / A_0, \varphi)}{\delta\, \varphi(\rho')\, \delta\, \varphi(\rho'')} \right\rangle . \tag{20}$$

Дифференцируя (2), получим

$$\frac{\delta^2 \ln F(\varepsilon(\rho, t) / A_0, \varphi)}{\delta\, \varphi(\rho')\, \delta\, \varphi(\rho'')} = \frac{A_0}{N_0} \operatorname{Re}(j)^2\, \varepsilon_0^*(\rho')\, \varepsilon(\rho')\, \delta\,(\rho' - \rho'')\, e^{j\varphi(\rho')} . \tag{21}$$

Проинтегрируем (21) по апертуре, что в силу предположения пространственной эргодичности случайного поля $\varphi(\rho)$ эквивалентно в статистическом смысле усреднению по ансамблю при высоком угловом разрешении (когда апертура много больше, чем интервал фазовых флуктуаций). Тогда предельную точность имеем в виде

$$\sigma_\varphi^{-2} = (A_0 / N_0) \operatorname{Re} \int_\Omega d\,\rho\, \varepsilon_0^*(\rho)\, \varepsilon(\rho)\, e^{j\varphi(\rho)} . \tag{22}$$

С учетом принятой математической модели:

$$\varepsilon_c(\rho) = e^{j\varphi(\rho)} \int_{\Omega_0} d\,\mathbf{r}\, E_з(\mathbf{r})\, E(\mathbf{r})\, e^{j\,(k/R)\mathbf{r}\,\rho} , \tag{23}$$

выражающей собой приближение Фраунгофера в предположении наличия тонкого фазового экрана, из (22) получим

$$\sigma_\varphi^{-2} = (A_0 / N_0) \operatorname{Re} \int_\Omega d\,\rho\, \varepsilon_0^*(\rho)\, e^{j\varphi(\rho)} \int_{\Omega_0} d\,\mathbf{r}\, E_з(\mathbf{r})\, E(\mathbf{r})\, e^{j\,(k/R)\mathbf{r}\,\rho} . \tag{24}$$

Здесь k – волновое число, а R – расстояние между плоскостью апертуры и картинной плоскостью цели. Из (24) следует, что предельная точность линейна по варьируемой функции $E_з(\mathbf{r})$. Следовательно, вопрос об ее наилучшем виде можно ставить лишь при наличии каких-то ограничений нелинейного вида, например энергетических,

$$\int_{\Omega_0} d\,\mathbf{r}\, E_з(\mathbf{r})\, E(\mathbf{r})\, E_з^*(\mathbf{r})\, E^*(\mathbf{r}) = Э_0 , \tag{25}$$

где $Э_0$ – энергия в картинной плоскости цели. Тогда, пользуясь методом множителей Лагранжа [5], составим вспомогательный функционал

$$\Phi(E_з(\mathbf{r})) = \frac{A_0}{N_0} \operatorname{Re} \int_\Omega d\,\rho\, \varepsilon_0^*(\rho)\, e^{j\varphi(\rho)} \int_{\Omega_0} d\,\mathbf{r}\, E_з(\mathbf{r})\, E(\mathbf{r})\, e^{j\,(k/R)\mathbf{r}\,\rho} + \lambda\Big(\int_{\Omega_0} d\,\mathbf{r}\, \left| E_з(\mathbf{r})\, E(\mathbf{r}) \right|^2 - Э_0\Big), \tag{26}$$

где λ – множитель Лагранжа. Дифференцируя (26) по $|E_з(\mathbf{r})|$ и по $\arg E_з(\mathbf{r})$, получим

$$\frac{\delta\, \Phi(E_з(\mathbf{r}))}{\delta \left| E_з(\mathbf{r}) \right|} = \frac{A_0}{N_0} \operatorname{Re} \int_\Omega d\,\rho\, \varepsilon_0^*(\rho)\, e^{j\varphi(\rho)}\, E(\mathbf{r})\, e^{j \arg E_з(\mathbf{r})}\, e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} + 2\lambda \left| E(\mathbf{r}) \right|^2 \left| E_з(\mathbf{r}) \right| = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\delta\,\Phi(E_з(\mathbf{r}))}{\delta \arg E_з(\mathbf{r})} = \frac{A_0}{N_0}\,\mathrm{Re}\, j \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho}\, E(\mathbf{r})\, E_з(\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{A_0}{N_0}\,\mathrm{Re}\; e^{j(\pi/2-2\pi n)}\, E(\mathbf{r})\, E_з(\mathbf{r}) \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} = 0. \tag{28}$$

Решая (27) и (28) относительно $|E_з(\mathbf{r})|$ и $\arg E_з(\mathbf{r})$, имеем:

$$\arg E_{з\,opt}(\mathbf{r}) = -\arg E(\mathbf{r}) - \arg \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} + 2\,\pi\, n\,, \tag{29}$$

$$\left| E_{з\,opt}(\mathbf{r}) \right| = -\frac{A_0}{N_0}\frac{1}{2\,\lambda}\frac{1}{\left|E(\mathbf{r})\right|} \left| \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} \right|, \tag{30}$$

$n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots;\quad l = 1, \ldots, L.$

Подставляя (30) в ограничение (25), получим:

$$\frac{A_0^2}{N_0^2}\frac{1}{4\,\lambda^2} \int\limits_{\Omega_0} d\,\mathbf{r} \left| \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} \right|^2 = Э_0\,, \tag{31}$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{A_0}{2\,N_0} \sqrt{\frac{1}{Э_0} - \int\limits_{\Omega_0} d\,\mathbf{r} \left| \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} \right|^2}\,, \tag{32}$$

Сравнивая (30) и (32), заметим, что пригодным оказывается лишь решение, соответствующее $\lambda < 0$ (по условию физической реализуемости $|E_з(\mathbf{r})| > 0$). Тогда окончательно имеем:

$$\left| E_{з\,opt}(\mathbf{r}) \right| = \frac{\sqrt{Э_0}}{\left|E(\mathbf{r})\right|} \sqrt{\frac{\left| \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} \right|^2}{\int\limits_{\Omega_0} d\,\mathbf{r} \left| \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} \right|^2}}\,. \tag{33}$$

Поскольку функционал квадратичный, то можно показать, что найденное решение и есть искомое.

Далее, пусть интегрирование ведется на неограниченных плоскостях, а $\varepsilon_0(\rho)$ – идеальная оценка спектра сигнала, домноженного на фазовые искажения среды распространения. Очевидно, что в этом случае из (33) имеем

$$E_{з\,opt}(\mathbf{r}) = \mathrm{const}, \tag{34}$$

ибо тогда

$$\lim_{\substack{\Omega_0\to\infty \\ \Omega\to\infty \\ N_0\to\infty}} \int\limits_{\Omega_0} d\,\mathbf{r} \left| \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} \right|^2 \sim Э_0\,, \tag{35}$$

$$\lim_{\substack{\Omega_0\to\infty \\ \Omega\to\infty \\ N_0\to\infty}} \int\limits_{\Omega} d\,\rho\; \varepsilon_0^*(\rho)\; e^{j\varphi(\rho)}\; e^{j(k/R)\mathbf{r}\,\rho} = E(\mathbf{r}). \tag{36}$$

Тем самым показано, что с точки зрения наиболее точной оценки фазовых искажений безразлично, какой вид имеет сигнал в плоскости цели, поскольку никаких априорных предположений об изображении цели $E(\mathbf{r})$ заранее не делалось; желательно лишь, что вполне естественно, чтобы сигнал концентрировался в области, занимаемой целью. Следовательно, дальнейший поиск решений задачи восстановления изображений, искаженных турбулентной средой распространения, в значительной мере свободен от критики на предмет: оптимален или нет предложенный [1, 2] метод в смысле максимума точности оценки (компенсации) фазовых искажений.

Тем не менее так как алгоритм активного восстановления оказывается неоптимальным постольку, поскольку зондирующий сигнал рассеивается вне области дислокации цели, целесообразно в дальнейшем рассмотреть возможные варианты преодоления сформулированного в настоящей статье <энергетического кризиса>, применительно к исследуемому методу.

1. Иргизов Р.С., Ковалев А.А., Никитин В.М. // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. №10. С. 1054 –1060.
2. Иргизов Р.С., Ковалев А.А., Никитин В.М. Авторская заявка №4947864/22 053105/ с приоритетом от 25.06.1991.
3. Адаптация в информационных оптических системах / Под ред. Н.Д. Устинова. М.: Радио и связь, 1984.
4. Татарский В.И. // Известия вузов, Радиофизика, 1974, N4.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 16 февраля 1993 г.

A.A. Kovalev. **Variational Synthesis of Signals in the Problem on Active Image Reconstruction.**

In this paper we derive expressions which show that from the point of view of reaching minimum in the error of phase estimate the spatial distribution of sounding signal in the image plane is a finite function which differs from zero only in the region within the target image. This situation allows further development of the technique of active image reconstruction and stimulates euristic approach to synthesis of reconstruction algorithms in contrast to regular ones since it does not impose any other restrictions on sounding signals.