

**В.П. Аксенов**

**ДИСПЕРСИЯ ШУМОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ-ШУМ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФАЗЫ ОПТИЧЕСКОГО ПУЧКА ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ ЕГО ИНТЕНСИВНОСТИ**

Исследуется устойчивость ранее полученного решения фазовой проблемы в оптике к малым случайным ошибкам в измеренных распределениях интенсивности. На основе расчета отношения сигнал-шум анализируется практическая значимость расчетных формул для создания алгоритмов реконструкции фазы в датчиках волнового фронта и системах оптического контроля.

В [1] нами получено аналитическое решение задачи восстановления действительной фазы оптической волны  $S(x, z)$  по измерениям распределений ее интенсивности  $I(x, z)$ . Решение основывалось на параболической аппроксимации волнового уравнения [2] для поля  $u(x, z)$ , зависящего от одной поперечной координаты.

Преимущества аналитического решения любой обратной задачи по сравнению с решением, получаемым численными методами, для теоретического анализа очевидны. Однако применимость полученных точных соотношений для практического использования часто оказывается ограниченной из-за наличия шумов измерений. Целью настоящей работы является исследование устойчивости полученного решения фазовой проблемы к малым случайным ошибкам в измеренных значениях интенсивности. Анализ проведен на основе расчета дисперсии флуктуаций фазы. В соответствии с [1] для фазы запишем

$$S(x, z) = S(0, z) + \int_0^x dx' \frac{\partial S(x', z)}{\partial x'}, \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial S(x', z)}{\partial x'} = \frac{k}{2} \{I(x', z)\}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(x'' - x') \frac{\partial}{\partial z} I(x'', z) dx'' \tag{2}$$

– локальный наклон фазового фронта;  $k$  – волновое число;  $\text{sgn } x$  – знаковая функция. Будем интересоваться далее корреляционной функцией случайного поля фазы

$$K_S(x_1, x_2; z_1, z_2) = \overline{[S_r(x_1, z_1) - \overline{S_r(x_1, z_1)}] [S_r(x_2, z_2) - \overline{S_r(x_2, z_2)}]} . \tag{3}$$

Горизонтальная черта означает проведение операции усреднения по случайным реализациям. Случайность фазы обусловлена тем, что интенсивность  $I(x, z)$  измеряется с некоторой погрешностью и вместо  $I(x, z)$  известна функция

$$I_r(x, z) = I(x, z) + \delta_I(x, z), \tag{4}$$

где  $\delta_I(x, z)$  – случайная ошибка, вызванная несовершенством средств регистрации. Назовем эту аддитивную добавку шумом измерений. Будем считать, что  $\delta_I(x, z)$  – однородная случайная величина, у которой среднее значение

$$\overline{\delta_I(x, z)} = 0, \tag{5}$$

а корреляционная функция

$$K_f(x_1 - x_2; z_1 - z_2) = \overline{\delta_f(x_1, z_1) \delta_f(x_2, z_2)} . \quad (6)$$

Далее будем предполагать, что флуктуации интенсивности малы по сравнению со средним значением

$$\overline{|\delta_f(x, z)|} \ll I(x, z) . \quad (7)$$

Кроме того, будем считать, что

$$I(x', z) > 0, \quad x' \in [0, x],$$

не рассматривая области дислокаций фазового фронта [3].

В рамках сделанных предположений для функции корреляции фазы будем иметь

$$K_S(x_1, x_2; z_1, z_2) = \int_0^{x_1} dx'_1 \int_0^{x_2} dx'_2 K_{VS}(x'_1, x'_2; z_1, z_2), \quad (8)$$

где

$$K_{VS}(x'_1, x'_2; z_1, z_2) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx''_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx''_2 \operatorname{sgn}(x''_1 - x'_1) \operatorname{sgn}(x''_2 - x'_2) \frac{K_f(x''_1 - x''_2, z_1 - z_2)}{I_f(x''_1, z_1) I_f(x''_2, z_2)}. \quad (9)$$

Введем в (9) замену координат  $z_1 - z_2 = z$ ,  $z_1 + z_2 = \tilde{z}$ , в результате получим

$$K_{VS}(x'_1, x'_2; \tilde{z}, \tilde{z}) = -\frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx''_1 dx''_2 \operatorname{sgn}(x''_1 - x'_1) \operatorname{sgn}(x''_2 - x'_2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} K_f(x''_1 - x''_2, z) \Big|_{z=0} \{I(x'_1, \tilde{z}), I(x'_2, \tilde{z})\}^{-1}. \quad (10)$$

Введем одномерную спектральную плотность  $V(x, \kappa)$  соотношением

$$K_f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, \kappa) e^{-i\kappa z} d\kappa. \quad (11)$$

Тогда в соответствии со свойствами преобразования Фурье запишем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} K_f(x, z) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa^2 V(x, \kappa) d\kappa. \quad (12)$$

Будем считать, что вычисление продольной производной в (2) происходит посредством измерения распределений интенсивности в двух плоскостях, отстоящих друг от друга на  $\Delta z$  с последующим образованием конечной разности. Такой операции соответствует линейная интерполяция функции  $I(x, z)$  по переменной  $z$ . Частотная характеристика такого преобразования известна [4]

$$H(\kappa) = \{\sin(\kappa \Delta z/2) / (\kappa \Delta z/2)\}^2, \quad -\infty < \kappa < \infty. \quad (13)$$

Так как с учетом фильтрации сигнала

$$K_f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, \kappa) |H(\kappa)|^2 e^{-i\kappa z} d\kappa,$$

вместо (10) будем иметь

$$K_{VS}(x'_1, x'_2; \tilde{z}, \tilde{z}) = \frac{1}{2\pi} \frac{k^2}{4} \{I(x'_1, \tilde{z}), I(x'_2, \tilde{z})\}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x''_1 - x'_1) \operatorname{sgn}(x''_2 - x'_2) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa^2 \{\sin(\kappa \Delta z/2) / (\kappa \Delta z/2)\}^4 V(x''_1 - x''_2, \kappa) d\kappa dx''_1 dx''_2. \quad (14)$$

Конкретные расчеты проведем для функции

$$K_{\perp}(x_1 - x_2, z) = \sigma_I^2 \exp \left\{ - (x_1 - x_2)^2 / 2 l_{\perp}^2 - z^2 / 2 l_{\parallel}^2 \right\}, \quad (15)$$

считая измерения распределений интенсивности в разных плоскостях независимыми друг от друга. Рассмотрим вначале случай <белого шума> когда  $l_{\parallel}, l_{\perp} \rightarrow 0$ , а  $\sigma_I^2 = N_0 / (2\pi l_{\parallel} l_{\perp})$ ,  $N_0$  – спектральная плотность. После интегрирования (14) по переменной  $x$

$$K_{\text{v.s.}}(x'_1, x'_2; \tilde{z}, \tilde{z}) = k^2 \frac{N_0}{2} (\Delta z)^{-3} \{I(x'_1, \tilde{z}) I(x'_2, \tilde{z})\}^{-1} \int dx''_1 \operatorname{sgn}(x''_1 - x'_1) \operatorname{sgn}(x''_2 - x'_2). \quad (16)$$

Очевидно, что интеграл в (16), взятый в бесконечных пределах, дает <бесконечное> значение дисперсии случайных наклонов фазового фронта, обусловленных шумом измерений. На самом деле в процессе измерений пределы интегрирования будут конечными. Обозначим нижний и верхний пределы  $-\beta_x, \beta_x$  соответственно. Самое естественное ограничение диктуется размерами оптического пучка. Интегрирование (16) в конечных пределах дает

$$K_{\text{v.s.}}(x'_1, x'_2; \tilde{z}, \tilde{z}) = k^2 N_0 (\Delta z)^{-3} \{I(x'_1, \tilde{z}) I(x'_2, \tilde{z})\}^{-1} [\beta_x - |x'_1 - x'_2|], \quad |x'_{1,2}| \leq \beta_x. \quad (17)$$

Для корреляционной функции флуктуаций фазы, полагая

$$I(x', z) = I(0, z), \quad 0 \leq x' \leq x,$$

в соответствии с (8) получим

$$K_S(x_1, x_2; \tilde{z}, \tilde{z}) = k^2 N_0 (\Delta z)^{-3} \{I(0, z)\}^{-2} \left\{ \beta_x x_1 x_2 - \int_0^{x_1} dx'_1 \int_0^{x_2} dx'_2 |x'_1 - x'_2| \right\}. \quad (18)$$

Производя замену координат и меняя порядок интегрирования в (18), будем иметь

$$K_S(x_1, x_2; \tilde{z}, \tilde{z}) = k^2 N_0 \{I(0, z)\}^{-2} (\Delta z)^{-3} \left\{ \beta_x x_1 x_2 \left[ \int_0^{x_1} d\eta |\eta| (x_1 - \eta) + x_1 \int_0^{x_2 - x_1} d\eta |\eta| + \int_{x_2 - x_1}^{x_2} d\eta (x_2 - \eta) \right] \right\}. \quad (19)$$

Для дисперсии флуктуаций фазы получим

$$\sigma_S^2(x, z) = K_S(x, x; \tilde{z}, \tilde{z}) = k^2 N_0 \{I(0, z)\}^{-2} (\Delta z)^{-3} \{ \beta_x x^2 - |x|^3 / 3 \}, \quad |x| \leq \beta_x. \quad (20)$$

Следовательно, дисперсия флуктуаций фазы, восстановленной из измерений интенсивности с аддитивным шумом, линейно возрастает с увеличением базы измерений и достигает граничного значения

$$\sigma_S^2(\beta_x, z) = (2/3) k^2 N_0 \{I(0, z)\}^{-2} (\Delta z)^{-3} \beta_x^3.$$

Естественно предположить, что, если поле флуктуации интенсивности будет содержать области антикорреляции, где функция корреляций отрицательна, увеличение поперечной базы будет приводить к пространственному усреднению фазовых флуктуаций.

Формулы (17)–(20) выражают некорректность (неустойчивость) задачи восстановления, связанную с дифференцированием  $I(x, z)$ . Она проявляется как неограниченное возрастание  $\sigma_S^2$  при сближении плоскостей регистрации.

Для расчета  $\sigma_S^2(x, z)$  при произвольной спектральной плотности шума перепишем формулу (14) с учетом конечности поперечной базы

$$K_{\text{v.s.}}(x'_1, x'_2; z, z) = (2\pi)^{-1} k^2 (\Delta z)^{-2} \{I(x'_1, z) I(x'_2, z)\}^{-1} \int_{-\beta_x}^{\beta_x} dx''_1 \int_{-\beta_x}^{\beta_x} dx''_2 \operatorname{sgn}(x''_1 - x'_1) \times \\ \times \operatorname{sgn}(x''_2 - x'_2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \sin^4(\kappa \Delta z / 2) / (\kappa \Delta z / 2)^2 V(x''_1 - x''_2, \kappa). \quad (21)$$

Выделим в (21) преобразование свертки

$$J_1(x'_1) = \text{sgn } x'_1 \theta(\beta_x - x'_1) \theta(\beta_x + x'_1) * V_f(x'_1, \kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\beta_x - x''_2) \theta(\beta_x + x''_2) \text{sgn}(x''_2 - x'_1) V_f(x''_1 - x''_2, \kappa) dx''_2, \quad (22)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда, подействуем на него прямым  $\hat{F}$  и обратным  $\hat{F}^{-1}$  операторами Фурье и воспользуемся прямой теоремой свертки [5]

$$\hat{F}\{f(x) * V_f(x, \kappa)\} = \hat{F}\{f(x)\} \hat{F}\{V_f(x, \kappa)\}. \quad (23)$$

Здесь

$$\hat{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

– прямое преобразование Фурье по поперечной координате. Обратное преобразование Фурье записывается следующим образом:

$$f(x) = \hat{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Обозначим двумерный спектр флуктуации шума

$$\hat{F}\{V_f(x, \kappa)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_f(x, \kappa) e^{i\omega x} dx = \Phi_f(\omega, x).$$

Так как имеет место равенство

$$\hat{F}\{\theta(\beta_x - x'_2) \theta(\beta_x + x'_2) \text{sgn}(x''_2 - x'_2)\} = 2/(i\omega) \{\cos \omega \beta_x - \exp(i\omega x'_2)\},$$

после интегрирования (21) по переменной  $x'_1$  получим

$$K_{\text{vys}}(x'_1, x'_2; z, z) = (2\pi)^{-2} 4 k^2 (\Delta z)^{-2} \{I(x'_1 z) I(x'_2 z)\}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \sin^4(\kappa \Delta z/2) / (\kappa \Delta z/2)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \Phi_f(\omega, x) \omega^{-2} \times \\ \times \{\cos \omega \beta_x - \exp(i\omega x'_2)\} \{\cos \omega \beta_x - \exp(i\omega x'_1)\}. \quad (24)$$

Интегрируя (24) по переменным  $x'_1$  и  $x'_2$ , считая, что интенсивность оптического пучка на интервале реконструкции фазы постоянна, будем иметь

$$\sigma_S^2(x, z) = \pi^{-2} k^2 (\Delta z)^{-2} \{I(0, z)\}^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \sin^4(\kappa \Delta z/2) / (\kappa \Delta z/2)^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \Phi_f(\omega, x) \omega^{-2} \left\{ x^2 \cos^2 \omega \beta_x - 2 \frac{x}{\omega} \sin \omega x \cos \omega \beta_x + \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega x}{2} \right\}. \quad (25)$$

В качестве примера выберем корреляционную функцию вида (15) и будем считать, что  $l_{\parallel} \rightarrow 0$ . Спектральная плотность в этом случае запишется следующим образом:

$$\Phi_f(\omega, x) = 2\pi \sigma_l^2 l_{\perp} l_{\parallel} \exp\{-\omega^2 l_{\perp}^2/2\}$$

Вычисляя интеграл в (25), получим

$$\sigma_S^2(x, z) = \sqrt{2\pi} \Omega_B^2 (l_{\perp}/\beta_x)^2 (l_{\parallel}/\Delta z) \sigma_l^2 \{I(0, z)\}^2 \left\{ -(x/\beta_x)^2 [1 + {}_1F_1(-1/2, 1/2; -2\beta_x^2/l_{\perp}^2)] + 4/3 (l_{\perp}/\beta_x)^2 [1 - {}_1F_1(-3/2, 1/2; -x^2/2 l_{\perp}^2)] + 2 (x/\beta_x)(1+x/\beta_x) {}_1F_1(-1/2, 3/2; -(\beta_x+x)^2/2 l_{\perp}^2) - 2x/\beta_x (1-x/\beta_x) {}_1F_1(-1/2, 3/2; -(\beta_x-x)^2/2 l_{\perp}^2) \right\}, \quad x \leq \beta_x, \quad (26)$$

где  $\Omega_B = k\beta_x^2/\Delta z$ ,  ${}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$  – вырожденная гипергеометрическая функция.

Из (26) следует асимптотическая оценка (20) при  $l_{\perp} \rightarrow 0$ . Представляет интерес рассчитать распределение фазы оптического пучка для заданных значений  $\Delta z$  и  $\beta_x$  и оценить влияние вариации этих параметров на качество восстановления. Выбор конечных  $\beta_x$  и  $\Delta z$  позволяет ограничить рост дисперсии флуктуаций, обусловленных некорректностью обратной задачи. Однако ограничение поперечной базы измерений  $\beta_x$  и выбор конечного  $\Delta z$  при вычислении производной  $dI(x, z)/dz$  оказывает влияние на качество восстановления самой фазы. Рассчитаем  $S(x, 0)$  для гауссова пучка

$$U(x, 0) = U(0, 0) \exp \left\{ -\frac{1}{2a_t^2} x^2 - iS(x, 0) \right\} \quad (27)$$

с распределением

$$S(x, 0) = -\frac{k}{2j(0)} x^2. \quad (28)$$

Подставляя (27) в (1) с учетом конечных пределов интегрирования в (2) и заменяя производную конечной разностью  $\{I(z + \Delta z) - I(z)\}/\Delta z$ , получим регуляризованную формулу обращения

$$S_R(x, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Omega_a \int_0^{x/a_t} d\xi \exp(\xi^2) \left\{ \operatorname{erf}(\gamma \Omega_a \{1 + \Omega_a^2(1 - \Delta z/\varphi(0))^2\}^{-1/2}) - \right. \\ \left. - \operatorname{erf}(\xi \Omega_a \{1 + \Omega_a^2(1 - (\Delta z/\varphi(0))^2\}^{-1/2}) - \operatorname{erf}(\gamma) + \operatorname{erf}(\xi) \right\}, \Omega_a = \frac{ka_t^2}{\Delta z}, \gamma = \frac{\beta_x}{a_t}. \quad (29)$$

Для оптического диапазона длин волн и лазерных пучков выполняется  $\Omega_a \gg 1$ , тогда (29) трансформируется следующим образом:

$$S_R(x, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Omega_a \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{\gamma}{1 - \frac{\Delta z}{\varphi(0)}} \right) - \operatorname{erf}(\gamma) \right\} \int_0^{x/a_t} d\xi e^{\xi^2} + \int_0^{x/a_t} d\xi e^{\xi^2} \left[ \operatorname{erf}(\xi) - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{1 - \frac{\Delta z}{\varphi(0)}} \right) \right]. \quad (30)$$

Для дисперсии флуктуаций фазы в рамках модели «белого шума» получается следующая формула:

$$\sigma_S^2(x, 0) = \eta_I^2 \Omega_a^2 \left\{ (\pi/4) \gamma [\operatorname{erf} i(x/a_t)]^2 - \int_0^{x/a_t} d\xi_1 \int_0^{x/a_t} d\xi_2 \exp \{ \xi_1^2 + \xi_2^2 \} |\xi_1 - \xi_2| \right\}, |x/a_t| \leq \gamma, \gamma = \beta_x/a_t. \quad (31)$$

Здесь

$$\eta_I = \frac{I_0}{\sqrt{N_0} (\Delta z)^{-1/2} a_t^{-1/2}} \quad (32)$$

– отношение интенсивности сигнала и шума на оси пучка,  $I_0 = I(0, 0)$ ,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erf} i(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt$$

– интегралы вероятности действительного и мнимого аргументов. Для оценки возможности и эффективности восстановления распределения фазы на фоне шумов воспользуемся общим критерием сигнал-шум

$$\eta_S = \left| \frac{S_R(x, z)/\sigma_S(x, z)}{\sigma_S(x, z)} \right|.$$

В свою очередь, при заданном  $\eta_S$  можно для конкретных значений  $\beta_x$  и  $\Delta z$  найти максимально допустимое значение или при заданном уровне флуктуаций, используя эталонное рас-

пределение фазы, определить оптимальные значения  $\Delta z$  и  $\beta_x$ , а также значение интенсивности пучка, начиная с которой восстановление фазы оказывается возможным.

На основе соотношений (29)–(31) был осуществлен численный анализ дисперсии, отношения сигнал-шум при реконструкции  $S(x, 0)$ . В качестве критерия качества восстановления был выбран критерий Рэлея, согласно которому

$$\delta S = |S_R(x, 0) - S(x, 0)| \leq \pi/2. \quad (33)$$

Результаты расчетов для оптического пучка с параметрами  $\varphi(0) = 1$  м,  $a_t = 0,05$  м,  $\lambda_1 = 0,63 \cdot 10^{-6}$  м,  $\lambda_2 = 10,6 \cdot 10^{-6}$  м,  $\beta_x = 0,25$  м приведены на рис. 1–4.

Рис. 1, 2 иллюстрируют качество восстановления  $S_R(x, 0)$ . На рис. 1 показан общий вид реконструированного волнового фронта. Рис. 2 детализирует картину aberrаций, вызванную заменой точного решения (1) регуляризованным (29). Все кривые для  $\Delta z = 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}$  м, различающиеся на рис. 2 в масштабе длины волны, неразличимы на общем плане (рис. 1). Штриховая линия соответствует уровню  $\lambda/4$ . Ломаный характер всех кривых на рис. 2 связан с ошибками численного интегрирования и дифференцирования.

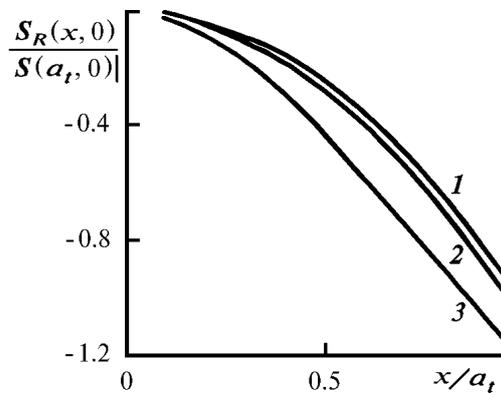


Рис. 1. Общий вид средней фазы одномодового гауссова пучка, восстановленной при различных значениях продольной базы измерений  $\Delta z$ : кривая 1 – точные значения фазы и  $\Delta z = 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$  м, 2 –  $\Delta z = 10^{-1}$  м, 3 –  $\Delta z = 5 \cdot 10^{-1}$  м,  $\gamma = 5$

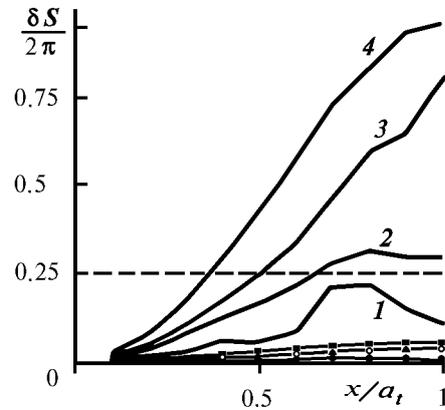


Рис. 2. Уклонение восстановленных значений фазы от модельных. Сплошная линия –  $\lambda_1 = 0,63 \cdot 10^{-6}$  м, значениями  $\bullet, \Delta, \circ, \blacksquare$  обозначено уклонение фазы для  $\lambda_2 = 10,6 \cdot 10^{-6}$  м. При этом кривые 1,  $\circ$  –  $\lambda \Delta z_2 = 10^{-4}$  м, 2,  $\Delta$  –  $\Delta z = 3 \cdot 10^{-4}$  м, 3,  $\circ$  –  $\Delta z = 5 \cdot 10^{-4}$  м, 4,  $\blacksquare$  –  $\Delta z = 10^{-3}$  м

Вид кривых на рис. 2 характерен для некорректных задач и отражает их противоречивость. С одной стороны, жесткость критерия (32) диктует сокращение продольной базы до  $\Delta z = 0,1$  мм, с другой стороны, это приводит к возрастанию  $\sigma_S^2$  и, как следствие, к снижению отношения сигнал-шум.

Соответствующие закономерности в поведении  $\sigma_S^2$  и  $\eta_S$  показаны на рис. 3 и 4. Величина, отложенная по оси ординат на рис. 4, представляет собой  $\eta_S$ , нормированное на величину  $I_0/\sqrt{N_0}$  [м<sup>-1</sup>]. Такая нормировка позволяет разделить дифракционные (геометрические) и энергетические параметры, входящие в определение  $\eta_S$  (32), и получить <универсальные> зависимости.

Хотя расчеты  $S_R(x, 0)$ ,  $\sigma_S^2$ ,  $\eta_S$  проведены для конкретных  $a_t$  и  $\varphi(0)$ , их результаты можно использовать для оценки соответствующих величин и при других значениях параметров. Так, для того чтобы оценить  $\eta_S$ , можно исходить из следующего приближенного соотношения:

$$\eta_S(x) = \frac{(1/2) \{\varphi(0)\}^{-1} (x/a_t)^2 (\Delta z)^{3/2} a_t^{1/2} I_0}{\{\gamma (x/a_t)^2 - (1/3)(x/a_t)^3\}^{1/2} \sqrt{N_0}}, \quad x \leq a_t.$$

По-видимому, точность восстановления волнового фронта для  $\lambda_1 = 0,63 \cdot 10^{-6}$  м, соответствующая критерию (32), оказывается труднодостижимой, так как требует для выполнения условия  $\eta_S > 1$  проведения измерений с практически недостижимым соотношением между ин-

тенсивностями оптической волны и шума. Для He-Ne-лазера, например, с мощностью  $P_0 = 50$  кВт пороговое значение  $\eta_S = 1$  достигается, если  $I_0/\sqrt{N_0} \sim 10^8$  м<sup>-1</sup>. Это означает, что спектральная плотность шума должна удовлетворять требованию  $N_0 < 4,1 \cdot 10^{-15}$  Вт<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>. Для  $\lambda_2 = 10,6 \cdot 10^{-6}$  м критерий Рэлея выполняется уже для  $\Delta z = 1$  мм. При этом пороговое значение  $\eta_S = 1$  осуществляется для  $I_0/\sqrt{N_0} = 10^6$  м<sup>-1</sup>, что, например, для  $N_0 = 10^{-4}$  Вт<sup>2</sup>/м<sup>2</sup> означает  $I_0 = 10^4$  Вт/м<sup>2</sup>. Такие интенсивности, насколько нам известно, не являются уникальными для излучения современных CO<sub>2</sub>-лазеров.

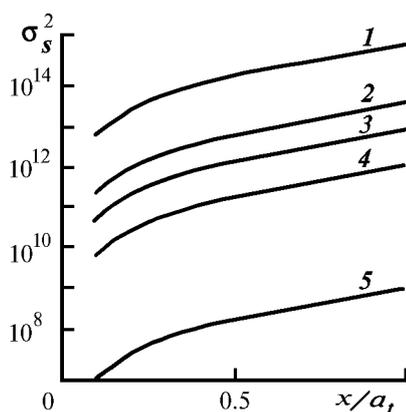


Рис. 3. Дисперсия флуктуаций восстановленной фазы по сечению пучка: кривая 1 –  $\Delta z = 10^{-4}$  м, 2 –  $\Delta z = 3 \cdot 10^{-4}$  м, 3 –  $\Delta z = 5 \cdot 10^{-4}$  м, 4 –  $\Delta z = 10^{-3}$  м, 5 –  $\Delta z = 10^{-2}$  м

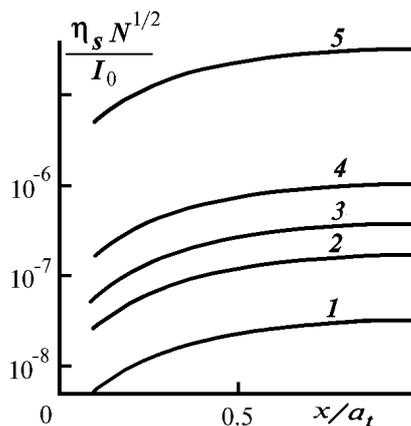


Рис. 4. Зависимость отношения сигнал-шум при восстановлении фазы от положения точки наблюдения. Нумерация кривых соответствует нумерации кривых на рис. 3

Таким образом, для измерения aberrаций волнового фронта, меньших длины волны в видимом диапазоне, вряд ли целесообразно и технически возможно использовать методы измерения, связанные с решением обратных задач. Здесь более эффективными являются методы прямых измерений. При менее жестких требованиях к точности (все зависит от конкретной задачи), а также в ближнем и тем более дальнем ИК-диапазонах длин волн использование рассмотренных методов измерения фазы становится оправданным, особенно если предметом исследования являются топология волновых фронтов, трансформация фазовых поверхностей в процессе распространения излучения, изучение которой с помощью интерферометрических методов [6] является, по-видимому, непреодолимой проблемой.

1. Аксенов В. П. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. N 11. С. 1200–1204.
2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. М.: Наука, 1985. 248 с.
4. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. 325 с.
5. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
6. Бобров Б. Д. // Квантовая электроника, 1991. Т. 18. N 7. С. 886–890.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
29 июля 1993 г.

V. P. Akseonov. SNR and Variance of an Optical Beam Phase Reconstructed from the Distributions of the Beam Intensity.

An earlier obtained solution of the phase problem in optics is investigated in this paper concerning its stability to the small random errors in measured intensity distributions. Based on calculations of the signal-to-noise ratio we analyze practicability of the calculational formulas when creating algorithms of the phase reconstruction to be used in wave-front sensors and in the systems of optical control.