<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 11 (1993)

УДК 621.373:535.317

А.Г. Боровой

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Метод плавных возмущений (МПВ), или метод Рытова, рассмотрен в рамках более строгой теории многократного рассеяния волн. Показано, что МПВ правильно описывает многократное рассеяние волн только на тех неоднородностях среды, для которых точка наблюдения находится в их ближней зоне.

Метод плавных возмущений, или метод Рытова, является одним из самых известных приближенных методов для расчета задач распространения оптических и акустических волн в случайно-неоднородных средах типа турбулентной атмосферы [1–3].

Граница применимости метода плавных возмущений (МПВ) обычно определяется условием малых флуктуаций амплитуды поля A

$$\left(\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\right)/\langle A\rangle^2 \ll 1 \,. \qquad (1)$$

Условие (1) носит формальный математический характер и не выявляет физическую природу ограничений, присущих этому методу.

В данном сообщении мы рассмотрим МПВ с точки зрения более наглядной теории многократного рассеяния волн и оценим границы применимости метода в терминах этой теории.

1. Вначале кратко сформулируем основные принципы теории многократного рассеяния волн [4]. Распространение волн в произвольной среде будем описывать общим операторным уравнением

$$(L - V)\Psi = 0 \,, \qquad (2)$$

где ψ – произвольное волновое поле; L – оператор, описывающий распространение волны в свободном пространстве; V – оператор, описывающий среду. Разобьем оператор V произвольным образом на сумму

$$V = \Sigma\, V_j \,, \qquad (3)$$

где каждое слагаемое будем называть j-м рассеивателем.

В теории многократного рассеяния волн решение задачи распространения волны в среде V выражается через решение задачи рассеяния на каждом отдельном рассеивателе

$$(L - V_j)\, \Psi_j = 0 \,. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4), как известно, является суперпозицией падающего и рассеянного полей

$$\Psi_j = \Psi_0 + \Psi_{sj} \,. \qquad (5)$$

Хотя вычисление рассеянного поля в каждом конкретном случае может представлять собой достаточно громоздкую математическую проблему, тем не менее его можно легко записать на уровне формальных операторных выражений. Обычно удобно записывать рассеянное поле через так называемую T-матрицу данного рассеивателя

$$\Psi_{sj} = L^{-1}\, T_j\, \Psi_0 \,, \qquad (6)$$

где T-матрица определяется борновским разложением:

$$T_j = V_j + V_j L^{-1} V_j + V_j L^{-1} V_j L^{-1} V_j + \ldots \qquad (7)$$

или соответствующим операторным уравнением, которое здесь нет необходимости приводить.

С учетом сделанных определений (4)–(7) легко найти решение задачи распространения или многократного рассеяния падающей волны в случайно-неоднородной среде (3) на уровне операторных соотношений. А именно, оно определяется разложением по кратности рассеяния

$$\Psi = \Psi_0 + \sum L^{-1} T_j \Psi_0 + \sum_{j \neq l} L^{-1} T_l L^{-1} T_j \Psi_0 + \ldots \qquad (8)$$

Физический смысл фундаментального разложения (8) совершенно прозрачен. Здесь второе слагаемое означает однократно рассеянное поле или суперпозицию волн, образующихся при рассеянии на каждом изолированном рассеивателе, третье слагаемое – это суперпозиция волн, рассеянных последовательно на двух рассеивателях и т.д.

Подчеркнем, что соотношения (4)–(8) являются совершенно общими, они не зависят ни от природы волнового поля, ни от способа разбиения среды на отдельные рассеиватели. В частности, рассеиватели могут быть как одномерными для слоисто-неоднородных сред, так и трехмерными. Они могут или не перекрываться в пространстве, как частицы аэрозоля в атмосфере, или быть вложенными друг в друга, как турбулентные вихри показателя преломления, и т.д. Разбиение среды на рассеиватели является только вопросом удобства при физической интерпретации или математическом описании.

2. Теперь обсудим применение теории многократного рассеяния к такой случайно-неоднородной среде, как турбулентная атмосфера. Ясно, что фиксированная реализация турбулентной атмосферы искажает, т.е. рассеивает распространяющуюся в ней волну за счет некоторых существующих в данный момент ограниченных в пространстве неоднородностей показателя преломления, которые и являются рассеивателями теории многократного рассеяния волн. Если провести разбиение турбулентной среды по какому-либо выбранному нами правилу на систему дискретных рассеивателей, то процесс распространения в ней волны можно интерпретировать как процесс многократного рассеяния и описывать рядом (8).

Чтобы построить таким образом количественную теорию распространения волн в турбулентной атмосфере, потребуется довольно громоздкая модель рассеивателей (3), которая учла бы их существенный разброс по размерам, начиная от внутреннего и кончая внешним масштабом турбулентности, вложение вихрей показателя преломления друг в друга и т.д. В нашем случае для качественной оценки границ применимости МПВ мы ограничимся простейшей моделью случайно-неоднородной среды.

Будем считать, что среда состоит из хаотически расположенных неоднородностей близкого размера a, которые могут перекрываться в пространстве (рис. 1). Кроме того, чтобы не разделять продольные и поперечные размеры, будем считать их (без ограничения общности) размерами одного порядка a. Сильный разброс неоднородностей по размерам, присущий турбулентной атмосфере, будет учитываться на качественном уровне.

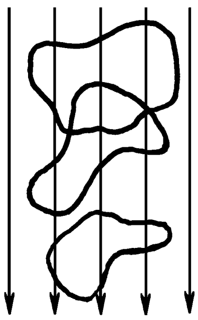

Рис. 1. Многократное рассеяние волн в ближней зоне рассеивателей эквивалентно экранированию рассеивателями друг друга

Как говорилось выше, разложение по кратности рассеяния (8) является совершенно общим. Поэтому любое приближение в задаче распространения или многократного рассеяния волн в неоднородных средах можно интерпретировать как некоторые приближения для членов разложения (8), т.е. для полей различной кратности рассеяния. Именно такая интерпретация и будет применена ниже к методу плавных возмущений.

3. Поле в приближении МПВ обычно записывается в рамках параболического уравнения

$$\left[(2\,i\,k\,(\partial/\partial z) + \Delta_\perp - \upsilon(\rho, z)\right] u(\rho, z) = 0\,, \tag{9}$$

где z – продольная и $\rho = x,\ y$ – поперечные координаты; $\Delta_\perp$ – лапласиан по ρ, $\upsilon(\rho, z) = k^2[n^2(\rho, z) - 1]$; k – волновое число; n – показатель преломления среды. Сравнивая уравнение (9) с общим уравнением (2), мы видим, что

$$\Psi = u(\rho, z)\,,\ \ L = 2\,i\,k\,(\partial/\partial z) + \Delta_\perp\,,\ \ V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,\upsilon(\rho, z)\,. \tag{10}$$

В простейшем случае падающей плоской волны $u_0 = 1$ поле в МПВ, с учетом (10), имеет следующий простой вид:

$$u = \exp(L^{-1}\upsilon). \tag{11}$$

Разбиение среды на сумму дискретных рассеивателей (3) преобразует исходное выражение (11)

$$u = \exp\left(\Sigma\, L^{-1}\upsilon_j\right) \tag{12}$$

в произведение сомножителей

$$u_j = \exp(L^{-1}\upsilon_j)\,. \tag{13}$$

Рассмотрим физический смысл одного такого сомножителя, для чего разложим вначале экспоненту (13) в ряд Тейлора

$$u_j = 1 + L^{-1}\upsilon_j + (L^{-1}\upsilon_j)^2/2! + \ldots\,. \tag{14}$$

Первое слагаемое в (14) является падающим полем. Второе слагаемое

$$\omega_{jB} = L^{-1}\upsilon_j \tag{15}$$

– рассеянным полем в так называемом борновском приближении, когда T-матрица заменяется на первое слагаемое разложения (7).

Известно, что борновское приближение справедливо, если набег фазы волны внутри рассеивателя невелик:

$$k(n_j - 1)\,a_j \ll 1\,. \tag{16}$$

В турбулентной атмосфере для видимого диапазона длин волн обычно имеем $n - 1 \sim 10^{-6}$. Тогда, например, для излучения He–Ne-лазера, где $k \approx 10^7$ 1/м, борновское приближение выполняется только для неоднородностей с размерами $a \ll 0{,}1$ м. Таким образом, для большинства реальных неоднородностей турбулентной атмосферы борновское приближение неприменимо, и требуется учитывать следующие члены разложения (7) в рассеянном поле (6). Покажем, что члены ряда (14) как раз соответствуют членам ряда (7), но только в определенной пространственной области. Каждая неоднородность в турбулентной атмосфере является большим и оптически мягким рассеивателем, т.е.

$$k\,a_j \gg 1\,,\ \ |n_j - 1| \ll 1\,. \tag{17}$$

При падении плоской волны на такой рассеиватель результирующее поле внутри рассеивателя будет отличаться от плоской волны только дополнительным набегом фазы на прямых лучах $\rho = \text{const}$:

$$u_j^0 = \exp\left[(2\,i\,k)^{-1}\int \upsilon_j(\rho, z')\,dz'\right]. \tag{18}$$

Выражения типа (18) часто используются в работах по распространению волн в турбулентной атмосфере, где они обычно связываются с приближением геометрической оптики. Вместе с тем для геометрической оптики характерно преломление лучей, которое здесь не учитывается. Поэтому приближение типа (18) более естественно называть *приближением прямых лучей* [5,6]. В рамках параболического уравнения (9) приближение прямых лучей получается отбрасыванием оператора $\Delta_\perp$, описывающего дифракцию поля, т.е. оператор L параболического уравнения (10) заменяется на оператор L_0 приближения прямых лучей

$$L_0 = 2\, i\, k\, (\partial/\partial z)\,. \tag{19}$$

Как видим, физически обоснованное выражение (18) *совпадает* с выражением (13), получаемым из МПВ, в рамках приближения прямых лучей

$$u_j^0 = \exp\,(L_0^{-1}\, \upsilon_j)\,. \tag{20}$$

Рассеянное поле в данном случае согласно определению (5) равно

$$\omega_j^0 = \exp\,(L_0^{-1}\, \upsilon_j) - 1. \tag{21}$$

Выражения (18), (20), (21) будут справедливы, естественно, не только в области, занятой рассеивателем, но и в ближней зоне рассеивателя на расстояниях

$$z - z_j \ll k\,a^2 \tag{22}$$

от положения центра рассеивателя z_j на оси z, где дифракция поля еще не существенна. Эти выражения становятся некорректными, начиная с расстояний $z - z_j \approx ka^2$, где рассеянное поле (21) искажается дифракцией Френеля. В волновой зоне рассеивателя

$$z - z_j \gg k\,a^2 \tag{23}$$

дифракция Фраунгофера трансформирует рассеянное поле в расходящуюся сферическую волну

$$\omega_j = f_j(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)\ \{\exp\,[i\,k\,|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\,| - i\,k(z - z_j)]\}/(\,|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\,|\,)\,, \tag{24}$$

где $\mathbf{r}_j = (\rho_j, z_j)$ – центр рассеивателя; f_j – амплитуда рассеяния в направлении $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)/|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\,| \approx (\rho - \rho_j)/(z - z_j)$, где $|\,\mathbf{n}\,| \ll 1$, $\mathbf{n}_0$ – единичный вектор вдоль оси z. При этом амплитуда рассеяния является двумерным Фурье-образом от рассеянного поля в ближней зоне

$$f_j(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \frac{k}{2\pi\, i} \int \exp\,(-\,i\,k\,\mathbf{n}\,\rho)\ \omega_j^0(\rho)\ d\rho\,. \tag{25}$$

Теперь сравним точные выражения для рассеянного поля (21) и (24) с рядом (14), получаемым из МПВ. В разложении (14) в ближней зоне рассеивателя (22) оператор L можно заменить на опрератор L_0. В результате все степени борновского $L_0^{-1}\,\upsilon_j$ рассеянного поля в (14) суммируются в точное рассеянное поле (6), (7), (21). Это следует из соотношений типа

$$(L_0^{-1}\,\upsilon)^2/\,2! = L_0^{-1}\, V L_0^{-1}\, V \Psi_0\,, \tag{26}$$

которые справедливы только в приближении прямых лучей. В волновой зоне рассеивателя (23) степени борновского рассеянного поля $L^{-1}\,\upsilon_j$ не имеют какого-либо физического смысла. Но в этом случае можно воспользоваться оценкой $|\,\omega_j\,| \ll 1$, справедливой для рассеянных полей в волновой зоне, и отбросить все степени поля $L^{-1}\,\upsilon_j$, начиная с квадратической.

В результате сомножитель (13), получаемый в МПВ, имеет физический смысл суперпозиции падающей и рассеянной волн

$$u_j \approx 1 + \omega_j\,. \tag{27}$$

В ближней зоне выражение (27) переходит в точное соотношение (21), а при появлении дифракции оно становится приближенным. Как мы убедились, в волновой зоне в приближенном соотношении (27) рассеянным полем ω_j является сферическая волна (24), но с амплитудой рассеяния, записанной в борновском приближении.

Перейдем к многократному рассеянию. Постановка (27) в исходное выражение (12) образует искомое разложение по кратности рассеяния для метода плавных возмущений

$$u = \exp\left(\Sigma L^{-1}\upsilon_j\right) \approx \Pi(1+\omega_j) = 1 + \Sigma\,\omega_j + \sum_{j<l}\omega_l\,\omega_j + \dots\,. \tag{28}$$

Как и в общем разложении (8), здесь второе слагаемое – это однократно рассеянное поле, третье слагаемое – двукратно рассеянное поле и т.д.

Как видим, наиболее характерной чертой приближения МПВ является представление полей, многократно рассеянных на нескольких рассеивателях, в виде произведения полей, рассеянных на каждом рассеивателе

$$\omega_{j\,l\,k\dots} = \omega_j\,\omega_l\,\omega_k\dots\,. \tag{29}$$

Обсудим границы применимости выражений (28), (29). С учетом (21) выражение (28) является точным, если точка наблюдения находится в ближней зоне всех рассеивателей, пересекающих луч $\rho = \mathrm{const}$ (рис. 1). В этом случае распространение волны в среде описывается приближением прямых лучей и процесс многократного рассеяния эквивалентен многократному экранированию рассеивателями друг друга [5, 6]. Метод плавных возмущений описывает этот процесс точно. Если же рассеиватели и точка наблюдения находятся в волновой зоне друг друга (рис. 2), то, во-первых, МПВ заменяет точную амплитуду рассеяния (25) на амплитуду рассеяния в борновском приближении, во-вторых, произведение полей (29) становится некорректным.

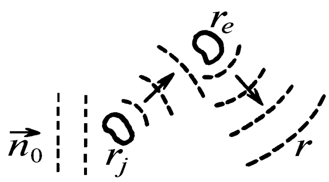

Рис. 2. Многократное рассеяние на рассеивателях, расположенных в волновой зоне друг друга, соответствует перерассеянию сферических волн

Действительно, точное выражение, например, для поля, рассеянного на двух рассеивателях, в этом случае можно записать аналогично (24)

$$\omega_{jl} = f_l\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_l}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l|}, \frac{\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_j|}\right)\frac{\exp\left[ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l| - ik(z-z_l)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l|}\,f_j\left(\frac{\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_j|}, n_0\right)\frac{\exp\left[ik\,|\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_j| - ik(z_l-z_j)\right]}{|\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_j|}. \tag{30}$$

Произведение рассеянных волн (29) согласно МПВ дает другую величину

$$\omega'_{jl} = f_l\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_l}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l|}, n_0\right)\frac{\exp\left[ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l| - ik(z-z_l)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l|}\,f_j\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}, n_0\right)\frac{\exp\left[ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| - ik(z-z_j)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}\,. \tag{31}$$

Наиболее существенную разницу в амплитуду полей (30) и (31) вносят следующие сомножители:

$$\omega_{jl} \sim \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l|}\,\frac{1}{|\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_j|}\,,\quad \omega'_{jl} \sim \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l|}\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}\,. \tag{32}$$

Практический интерес представляют не поля при фиксированной конфигурации рассеивателей, а средние по конфигурациям моментные функции поля. Оценим наиболее важную величину – среднюю интенсивность для полей (30) и (31). Средняя интенсивность однократно рассеянного поля равна оптической толще среды τ.

$$I_1 = |\,\omega_j\,|^2 = c\int\frac{|f|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|^2}\,d\mathbf{r}_j = c\int d\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|\int|f|^2\,d\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}\right) = c\,\sigma\,d = \tau, \tag{33}$$

где c – счетная концентрация рассеивателей; σ – сечение рассеяния на одном рассеивателе; d – линейные размеры среды до точки наблюдения. Аналогичный расчет интенсивности двукратно рассеянного поля с учетом (30) дает $\tau^2/2$, тогда как выражение МПВ (31) приводит к вдвое большей величине τ^2. Следовательно, произведение полей (29), характерное для МПВ (начиная с двукратного рассеяния), дает существенную ошибку.

Таким образом, все вышеприведенное позволяет сформулировать границы применимости МПВ в терминах теории многократного рассеяния волн следующим образом.

МПВ справедлив во всей прстранственной области в частном случае, когда он сливается с *методом малых возмущений* [1–3]:

$$\exp(L^{-1}\upsilon) \approx 1 + L^{-1}\upsilon\,, \tag{34}$$

т.е. при условии

$$\left| L^{-1}\upsilon \right| \ll 1\,. \tag{35}$$

Здесь рассеянное поле $L^{-1}\upsilon$ имеет физический смысл однократно рассеянного поля, т.е. суперпозиции полей, рассеянных на каждом отдельном рассеивателе

$$L^{-1}\upsilon = \sum L^{-1}\upsilon_j\,, \tag{36}$$

причем рассеянное на отдельном рассеивателе поле берется в борновском приближении.

При нарушении условия (35), что характерно для распространения оптических и акустических волн в турбулентной атмосфере, формулы МПВ (11) учитывают многократное рассеяние волн пространственными неоднородностями среды. Но только в том случае, когда в точку наблюдения приходят в основном волны из ближней зоны рассеивающих неоднородностей среды, МПВ физически корректно описывает как рассеяние на одной неоднородности, так и многократное перерассеяние волн этими неоднородностями. В противном случае, когда существенна дифракция при распространении волн от неоднородностей до точки наблюдения, то здесь как рассеяние отдельной неоднородностью, так и многократное перерассеяние волн описываются методом плавных возмущений *физически некорректно*.

Сделанное заключение находится в качественном соответствии с другими известными оценками границ применимости МПВ. Например, известно, что МПВ хорошо описывает фазовые флуктуации волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, даже при нарушении условия (1). Также известно, что фазовые флуктуации определяются в основном крупномасштабными неоднородностями. Если же допустить, что для этих неоднородностей выполняется условие ближней зоны, то становится понятным успешное использование МПВ в этом случае. Амплитудные флуктуации волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, напротив, вызываются мелкомасштабными неоднородностями. Рассеянное на этих неоднородностях поле успевает существенно продифрагировать при распространении до точки наблюдения. Поэтому граница применимости МПВ (1) в этом случае аналогична границе применимости метода малых возмущений.

Интересно попутно обсудить также приближение, аналогичное МПВ, предложенное для среды, состоящей из дискретных рассеивателей, Н.П. Калашниковым и М.И. Рязановым [7]. В этом приближении поле записывается в виде экспоненты (12), где вместо рассеянных полей в борновском приближении записываются точные рассеянные поля

$$u = \exp\left(\sum \omega_j\right) = 1 + \sum \omega_j + \sum_{j,\,l} \omega_j\,\omega_l/2! + \ldots\,. \tag{37}$$

Ряд (37) отличается от ряда МПВ (28) только членами с совпадающими индексами $j = l$ и т.д. Такими членами можно пренебречь при большом числе рассеивателей. В остальном все вышесказанное относительно границ применимости МПВ будет справедливым и для этого метода.

1. Р ы т о в С. М., К р а в ц о в Ю. А., Т а т а р с к и й В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 463 с.
2. И с и м а р у А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 2. 317 с.
3. Р а с п р о с т р а н е н и е лазерного пучка в атмосфере / Под ред. Д. Стробена. М.: Мир, 1981. 414 с.
4. Г о л ь д б е р г е р М., В а т с о н К. Теория столкновений. М.: Мир, 1967. 823 с.
5. Б о р о в о й А. Г.//Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. 1982. Т. 25. N 4. С. 391–400.
6. Б о р о в о й А. Г.//Оптика и спектроскопия. 1983. Т. 54. Вып. 4. С. 757–759.
7. К а л а ш н и к о в Н. П., Р е м и з о в и ч В. С., Р я з а н о в М. И. Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах. М.:Атомиздат, 1980. 330 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
29 июля 1993 г.

A. G. Borovoy. **Applicability Limits of the Smooth Perturbation Method.**

Smooth perturbation method (SPM) or Rytov's method is considered in this paper based on more rigorous theory of multiple scattering of waves. It is shown that SPM is valid for describing multiple scattering of waves only by those inhomogeneities of a scattering medium for which an observation point is in their near zone.