

**В.П. Лукин**

**О СОПОСТАВЛЕНИИ МОДЕЛЕЙ СПЕКТРА АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

Проводятся теоретические и экспериментальные исследования параметров оптических волн с целью сопоставления различных моделей спектра атмосферной турбулентности. Для неоднородных оптических трасс вводится понятие <усредненный по трассе спектр турбулентности>.

В статье [1] проанализировано несколько моделей спектральной плотности флуктуаций показателя преломления  $\Phi_n(\kappa, \xi)$  атмосферы. Известно, что наиболее употребительными являются следующие модели, описывающие поведение спектральной плотности флуктуаций показателя преломления атмосферы в области, примыкающей к энергетическому интервалу:

– модель Кармана [2]

$$\Phi_n(\kappa, \xi) = 0,033 C_n^2(\xi) L_{0K}^{11/3} (1 + \kappa^2 L_{0K})^{-11/6}, \tag{1}$$

– экспоненциальная модель [2]

$$\Phi_n(\kappa, \xi) = 0,033 C_n^2(\xi) \kappa^{-11/3} \{1 - \exp[-\kappa^2/\kappa_{0H}^2]\}, \tag{2}$$

– модель Гринвуда–Таразано [3]

$$\Phi_n(\kappa, \xi) = 0,033 C_n^2(\xi) (\kappa^2 L_{0Г}^2 + \kappa L_{0Г})^{-11/6}. \tag{3}$$

Естественно, что в этих моделях (1)–(3) внешние масштабы  $L_{0K}$ ,  $\kappa_{0H}^{-1}$ ,  $L_{0Г}$  несколько различаются. Здесь  $C_n^2(\xi)$  – интенсивность турбулентных пульсаций.

Сопоставление моделей (1)–(3) проведем, например, на основе расчета дисперсии флуктуаций фазы оптической волны, распространяющейся в приземном слое турбулентной атмосферы. В качестве исходного воспользуемся выражением для описания флуктуаций фазы  $S(\rho)$  оптической волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, в приближении метода плавных возмущений [4]

$$S(\rho) = k \int_0^L dx \iint d^2 n(\kappa, x) \cos \frac{k^2(L-x)\gamma}{2k} \exp(i\kappa\rho\gamma), \tag{4}$$

где  $k$  – волновое число излучения; ( $\gamma = 1$  – для плоской волны;  $\gamma = x/L$  – для сферической волны);  $L$  – длина оптической трассы. Нетрудно показать, что для флуктуаций [5]

$$\langle d^2 n(\kappa_1, x_1) d^2 n(\kappa_2, x_2) \rangle = 2\pi\delta(x_1 - x_2) \delta(\kappa_1 - \kappa_2) \Phi_n(\kappa_1, x_1) d^2\kappa_1 d^2\kappa_2 dx_1 dx_2, \tag{5}$$

дисперсия флуктуаций фазы в плоской волне

$$\langle S^2 \rangle = 2\pi^2 k^2 \int_0^L d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa, \xi) \left[1 + \cos \frac{k^2(L-\xi)}{2k}\right]. \tag{6}$$

При условии  $\kappa_0^2 L/k \ll 1$ , где  $\kappa_0^{-1}$  – характерная величина внешнего масштаба турбулентности, выражение (6) переходит в

$$\langle S^2 \rangle = 4\pi^2 k^2 \int_0^L d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa, \xi). \tag{7}$$

Сравним дисперсии флуктуаций фазы для моделей (1)–(3) на однородной трассе. Имеем соответственно для моделей (1), (2), (3)

$$\langle S^2 \rangle_1 = (12/5) \pi^2 0,033 k^2 C_n^2 L L_{0K}^{5/3} \quad (8)$$

(при  $L_{0K}^{-1} \ll \kappa_m$ , где  $\kappa_m$  – волновое число для внутреннего масштаба),

$$\langle S^2 \rangle_2 = (12/5) \pi^2 0,033 \Gamma(1/6) k^2 C_n^2 L \kappa_{0H}^{-5/3}, \quad (9)$$

$$\langle S^2 \rangle_3 = 4\pi^2 0,033 \frac{\Gamma(1/6) \Gamma(5/3)}{\Gamma(11/6)} k^2 C_n^2 L L_{0G}^{5/3}. \quad (10)$$

Из условия равенства дисперсий

$$\langle S^2 \rangle_1 = \langle S^2 \rangle_2 = \langle S^2 \rangle_3$$

для всех моделей (1)–(3) получим взаимные соотношения между масштабами:

$$L_{0G} \simeq 0,27 L_{0K}, \quad \kappa_{0H}^{-1} \simeq 0,36 L_{0K}, \quad \kappa_{0H}^{-1} \simeq 1,33 L_{0G}. \quad (11)$$

Таким образом, расчеты оптических характеристик, выполненные с использованием одной модели спектра, можно привести к другой модели, используя соотношения (11).

При выполнении расчета дисперсии дрожания изображения звезды в фокальной плоскости телескопа мы используем следующие упрощающие предположения: амплитудные флуктуации в оптической волне малы, апертура телескопа предполагается гауссовой. Тогда [2] дисперсия дрожания изображения

$$\sigma_a^2(R) = 16\pi^2 0,033 F^2 \int_0^L d\xi C_n^2(\xi) \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-2/3} \{1 - \exp(-\kappa^2/\kappa_{0H}^2)\} \exp(-\kappa^2 R^2/2) \quad (12)$$

для модели (2). Здесь  $R$  – эффективный размер гауссовской апертуры телескопа. Простые вычисления в (12) приводят к

$$\sigma_a^2(R) = 8\pi^2 0,033 \Gamma(1/6) 2^{1/6} F^2 R^{-1/3} \int_0^L d\xi C_n^2(\xi) \{1 - (1 + 2\kappa_{0H}^2 R^2)^{-1/6}\}. \quad (13)$$

Дальнейшие вычисления требуют реальных профилей зависимостей параметров моделей  $C_n^2(\xi)$  и  $\kappa_{0H}^{-1}(\xi)$ .

Для кармановской модели (1) спектра турбулентности в статье [5] был выполнен расчет дисперсии дрожания изображения для круглой апертуры телескопа

$$\sigma_a^2(R) = (\pi k^2 R^2)^{-1} \int_0^{2R} \rho d\rho \left[ D_s''(\rho) + \frac{D_s'(\rho)}{\rho} \right] \left\{ \arccos(\rho/2R) - (\rho/2R) \sqrt{1 - (\rho/2R)^2} \right\}, \quad (14)$$

где  $D_s(\rho)$  – структурная функция фазы;  $2R$  – диаметр приемной апертуры. В области применимости метода плавных возмущений структурная функция фазы была заменена структурной функцией комплексной фазы, тогда

$$D_s''(\rho) + \frac{D_s'(\rho)}{\rho} = 8\pi^2 k^2 \int_0^L d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 J_0(\kappa, \rho) \Phi_n(\kappa, \xi). \quad (15)$$

Помимо этого, функция, характеризующая усредняющее действие круглой апертуры в выражении (14), аппроксимируется [6] степенной функцией

$$(\arccos x - x\sqrt{1-x^2}) \approx (\pi/2) [1 - 1,25 x + 0,25 x^4].$$

Результаты расчета дисперсии флуктуаций углов прихода по формуле (14) для однородной трассы приведены на рис. 1 (кривая 2). Здесь же приведена зависимость  $R^{-1/3}$  (кривая 1), соответствующая колмогоровскому спектру турбулентности

$$\sigma_a^2(2R) \simeq 2,84 C_n^2 L(2R)^{-1/3}. \quad (16)$$

Сравнивая кривые 1 и 2, можно заметить, что учет конечности величины внешнего масштаба турбулентности приводит к большей скорости уменьшения дисперсии дрожания изображения с ростом диаметра приемной апертуры (при  $2R > 0,1 \kappa_0^{-1}$ ) по сравнению с тем, что дает формула (16), применимая лишь в случае  $2R \kappa_0 \ll 1$  (при этом кривые 1, 2 совпадают).

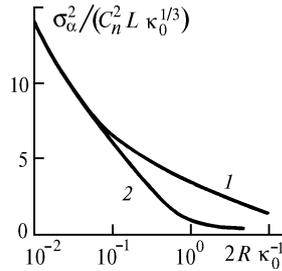


Рис. 1. Апертурная зависимость дисперсии флуктуаций углов прихода оптической волны на однородной трассе: 1 – расчет для колмогоровского спектра турбулентности; 2 – расчет для модели (1) при  $\kappa_0 = L_{OK}^{-1}$

Формулой (13) можно воспользоваться для расчета дисперсии дрожания изображения на неоднородной трассе, если использовать соответствующие высотные профили  $C_n^2(\xi)$  и  $\kappa_0^{-1}(\xi)$ .

Экспериментальная проверка апертурной зависимости дисперсии дрожания изображения звезды, формируемой телескопом, проводилась [7] как часть комплексных измерений астроклимата в точке стояния крупнейшего в России телескопа БТА. Дрожание изображения измерялось в ходе экспериментов [7] с помощью фотоэлектрической приставки в фокальной плоскости телескопа с диаметром главного зеркала 605 мм. Изменение апертуры осуществлялось наложением непрозрачных кольцевых диафрагм различных диаметров.

Одной из конструктивных особенностей используемого телескопа является затенение центральной части зеркала. Практически приходится иметь дело с телескопом, апертура которого представляет собой кольцо, с диаметром затененной части  $D_1 = 115$  мм. Ранее [8] была рассчитана дисперсия дрожания изображения звезды для телескопа, имеющего кольцевую апертуру – внешний диаметр  $D_2$ , внутренний диаметр  $D_1$  и было показано, что на степенном участке апертурной зависимости дисперсии дрожания изображения

$$\sigma_a^2(R) = 5,69 f(n) D_2^{-1/3} \int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi), \quad (17)$$

где  $n = D_1/D_2$ ,

$$f(n) = (1 - n^2)^{-2} \left\{ 1 + n^{1/3} - 2,15 \frac{n^2}{(1 + n)^{1/3}} {}_2F_1\left(1/6; 3/2; 3; \frac{4n}{(1 + n)^2}\right) \right\}. \quad (18)$$

Здесь функция  $f(n)$  описывает влияние затенения центральной части телескопа, дает количественную оценку превышения дисперсии дрожания изображения для телескопа с кольцевой апертурой по сравнению с круглым телескопом. В таблице приведены некоторые значения  $f(n)$ . Нетрудно видеть, что только для значительного затенения (более 50% площади) функция  $f(n)$  заметно отличается от единицы. Эти результаты, описывающие влияние затенения центральной части телескопа, были использованы для корректировки данных [7] измерений.

Т а б л и ц а

$n$	0	0,5	0,75	0,8	0,9	0,95
$f(n)$	1	1,08	1,37	1,67	4,33	15,17

На рис. 2 приведены две серии (полученные при различных уровнях турбулентности атмосферы) наблюдений апертурной зависимости  $\sigma_a^2(R)$  для внешних диаметров телескопа 152, 215, 313, 492 и 605 мм. Внутренний диаметр кольцевой апертуры телескопа был постоянным и равнялся 115 мм. Измерения построены в относительных единицах, для сравнения здесь же приведена степенная зависимость  $R^{-1/3}$ . Как было показано ранее теоретически [2], данные измерений дисперсии дрожания значительно отклоняются от зависимости  $R^{-1/3}$ , что подтверждает вывод (из сравнения рис. 1 и 2) о влиянии конечности внешнего масштаба турбулентности.

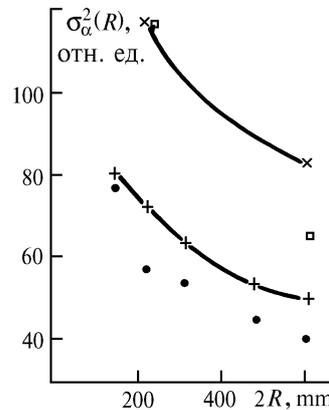


Рис. 2. Экспериментальная проверка апертурной зависимости дисперсии дрожания изображения звезды в фокальной плоскости телескопа с диаметром 605 мм: •, □ – данные измерений при различных уровнях турбулентности; x, + – зависимость  $R^{-1/3}$ , соответствующая спектру турбулентности с бесконечным внешним масштабом

Было бы целесообразно сопоставить данные оптических измерений с результатами расчетов на основе моделей. В настоящее время известно большое количество моделей высотного хода структурного параметра показателя преломления  $C_n^2(h)$  и высотного хода внешнего масштаба турбулентности  $L_0(h)$ . Высотные модели  $C_n^2(h)$  достаточно многочисленны [2, 4, 9, 10], рассмотрим здесь только две из них. Первая – это модель, предложенная в [10], описывающая так называемые <наилучшие>, <средние> и <наихудшие> условия оптических наблюдений. Представляется также интересной модель [11], описывающая ночные условия распространения видимого излучения оптического диапазона:

$$C_n^2(h), \text{ м}^{-2/3} = \begin{cases} 8,4 \cdot 10^{-15}; & 0 \leq h \leq 18,5; \\ 2,87 \cdot 10^{-12} h^{-2}; & 18,5 \leq h \leq 110; \\ 8,4 \cdot 10^{-15}; & 110 \leq h \leq 1500; \\ 8,87 \cdot 10^{-7} h^{-3}; & 1500 \leq h \leq 7200; \\ 2,00 \cdot 10^{-16} h^{-1/2}; & 7200 \leq h \leq 20000 \text{ м.} \end{cases}$$

Что касается высотных моделей внешнего масштаба атмосферной турбулентности, то здесь имеется более ограниченный набор. Так, стоит указать, что в [12] для малых высот  $h$  отмечается линейный рост внешнего масштаба и  $L_0$  сопоставимо с высотой над подстилающей поверхностью [4]. В последнее время в [11, 13] приводятся модели

$$\kappa_0^{-1}(h) = 5 / \left[ 1 + \left( \frac{h - 7500}{2000} \right)^2 \right], \quad (19)$$

$$\kappa_0^{-1}(h) = 4 / \left[ 1 + \left( \frac{h - 8500}{2500} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

С помощью этих моделей для  $L_0$  и  $C_n^2$  можно рассчитать флуктуации параметров оптических волн, распространяющихся на неоднородных трассах. Так, при распространении в зенит дрожание изображения звезды рассчитывается на основе выражения (13). Из анализа видно, что все особенности неоднородной оптической трассы будут описываться поведением функции

$$f(R, H_0, H) = \frac{\int_{H_0}^H d\xi C_n^2(\xi) [1 + 2\kappa_0^{-2} R^{-2}]^{-1/6}}{\int_{H_0}^H d\xi C_n^2(\xi)} .$$

Так, для однородной трассы

$$f(R, H_0, H) = f(R) \equiv (1 + 2\kappa_0^{-2} R^{-2})^{-1/6} .$$

Если апертура телескопа  $R \ll \kappa_0^{-1}$ , то

$$f(R, H_0, H) \equiv 1 .$$

Чтобы ввести понятие <среднего по оптической трассе> внешнего масштаба  $\kappa_{o,sp}^{-1}$ , попытаемся аппроксимировать (путем подбора)

$$f(R, H_0, H) = (1 + 2\kappa_{o,sp}^{-2} R^{-2})^{-1/6} .$$

Наши численные расчеты показывают, что для <наилучшей>, по Гурвичу [10], атмосферы при  $H_0 = 0$ ,  $H = 20000$  м <среднее для всей атмосферы>  $\kappa_{o,sp}^{-1} \approx 0,5$  м, а для <наихудшей> атмосферы  $\kappa_{o,sp}^{-1} \approx 1,0$  м. При этом использована модель внешнего масштаба турбулентности (19). Интересно отметить, что для модели [11] результаты в целом получаются те же.

Следует отметить, что результаты нашей работы достаточно хорошо согласуются с данными [11]. Это показывает, что поведение спектра турбулентности в области низких частот достаточно хорошо описывается моделями (1)–(3). Параметры этих моделей  $C_n^2$  и  $\kappa_0^{-1}$ , в свою очередь, описываются на основе эмпирических высотных зависимостей. Для расчета характеристик оптических волн, распространяющихся через всю толщю атмосферы, можно ввести среднеинтегральный спектр

$$\int_0^{\infty} d\xi \Phi_n(\kappa, \xi) = 0,025 k^{-2} r_0^{-5/3} \kappa^{-11/3} \{1 - \exp(-\kappa^2 / \kappa_{o,sp}^2)\} ,$$

где  $r_0$  – радиус Фрида.

Ввиду значительного роста [14] внутреннего масштаба турбулентности  $l_0$  с высотой ( $l_0 \propto \sqrt[3]{h}$ ) и ограниченностью внешнего масштаба турбулентности можно ожидать на больших высотах ( $h > 5000$  м) существенное сужение инерциального интервала размеров турбулентных неоднородностей атмосферы. Это, в свою очередь, может изменить некоторые закономерности описания флуктуаций оптических волн. В частности, это может иметь серьезное значение при оценке эффективности работы адаптивных систем в атмосфере [15].

1. Лукин В.П. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 4. С. 354–377.
2. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 275 с.
3. Greenwood D.P., Tarazano D.O. A proposed form for the atmospheric microtemperature spatial spectrum in the input range. Panchev N. // Random Functions and turbulence. N. 4. 1970. С. 264.
4. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 540 с.
5. Лукин В.П., Покасов В.В. // Распространение оптических волн в неоднородных средах. Томск: ИОА, 1976. С. 50–53.
6. Hufnagel R.E. // Appl. Optics. 1970. V. 10. P. 2547–2548.
7. Губкин С.М., Емалеев О.Н., Лукин В.П. // Астрономический журнал. 1983. Т. 60. С. 790–795.
8. Лукин В.П. // Астрономический циркуляр. 1983. N 1253. С. 8.
9. Hufnagel R.E., Stanley N.R. // J. Opt. Soc. Am. 1964. V. 54. P. 52–61.
10. Гурвич А.С., Грачева М.Е. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1980. Т. 10. С. 1107–1111.
11. Stewart Mc Kechnie T. // J. Opt. Soc. Am. A. 1992. V. 9. N 11. P. 1937–1954.

12. Lukin V.P., Pokasov V.V. // Appl. Optics. 1981. V. 20. N 1. P. 121–135.
13. Coulman C.E., Vernin L., Coquenguiot J. Caucchia J.L. // Appl. Optics. 1988. V. 27. P. 155–160.
14. Лукин В.П. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 12. С. 1294–1304.
15. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 248 с.
16. Good R.E., Beland R.R., Murphy E.A., Brown J.H., Dewan E.M. // Proc. SPIE. 1988. V. 928. P. 165–186.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
13 мая 1993 г.

**V.P. Lukin. Intercomparison of Models of the Atmospheric Turbulence Spectrum.**

This paper deals with the theoretical and experimental studies of optical waves aimed at comparing different models of the atmospheric turbulence spectra. For inhomogeneous optical path in the atmosphere we introduced the term mean over the path spectrum of turbulence.