<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 7 (1993)

УДК 537. 874.2

В.И. Решецкий

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ЗЕРКАЛА

Теоретически исследована задача отражения электромагнитной волны от осциллирующего зеркала. Получено точное решение для отраженной волны, которое представляет собой бесконечную суперпозицию плоских монохроматических волн с комбинационными частотами, собственными амплитудами и собственными углами отражения. Рассматриваются возможные применения эффекта, в частности, для перестройки оптического лазерного излучения в область ультрафиолетового и рентгеновского диапазона частот.

1.Введение

Как известно [1], точное решение задачи об отражении монохроматической волны от движущегося с постоянной скоростью зеркала во многом способствовало возникновению специальной теории относительности. Возникающий при отражении от движущейся границы релятивистский эффект Доплера вскоре привлек внимание исследователей в связи с практическими применениями. Так, в 1952 г. Ландекер рассмотрел нормальное отражение электромагнитной волны от переднего фронта релятивистских электронов, движущихся навстречу этой волне. Он отметил условия значительного увеличения частоты и амплитуды отраженной волны при релятивистских скоростях движения границы [2]. Однако в то время этот эффект не удалось реализовать экспериментально из-за недостаточной плотности электронов в пучке.

Ламперт обратил внимание на то, что для получения релятивистских эффектов при отражении волны от движущейся границы можно обойтись без релятивистских скоростей. Для этого он предложил использовать замедляющие системы, фазовая скорость распространения в которых значительно меньше скорости в вакууме [3].

С. Тотаро теоретически исследовал отражение и преломление волн на движущейся границе раздела двух сред [4]. В [5–14] проведены дальнейшие исследования и обобщения отмеченных выше результатов.

Эти теоретические исследования проверялись в ряде экспериментов. В опытах [15] наблюдался доплеровский сдвиг частоты электромагнитных волн, отраженных от фронта распространяющейся в аргоне ударной волны. Наблюдавшееся при этом относительное изменение частоты составляло 10^{-3}%. Несмотря на столь малое изменение частоты при отражении экспериментальная методика позволила с высокой точностью измерить скорость распространения ударной волны. Авторами работы [16] исследовалось отражение и сдвиг частоты электромагнитной волны при отражении от фронта плазмы, движущейся со скоростью порядка 10^7 м/с. Эксперимент проводился в замедляющей системе, представляющей собой спиральный волновод, где скорость волн была порядка 1/200 от скорости света в вакууме. Относительный сдвиг частоты составил примерно 20%. Однако из-за недостаточной плотности плазмы релятивистское увеличение амплитуды волны при отражении не наблюдалось.

В ряде экспериментов зарегистрировано изменение частоты при многократном отражении от движущейся плазмы. Авторы [17] измеряли рост частоты при многократном отражении волны от сближающихся стенок вакуумной полости, созданной в плазме. В экспериментах авторов [18] было достигнуто увеличение частоты в 2,3 раза при многократном отражении от плазменного поршня, движущегося со скоростью $2 \cdot 10^7$ м/с. Следовательно, электромагнитная волна испытала около тысячи отражений.

В опытах [19] получено шестикратное увеличение частоты и удвоение энергии волны при отражении от фронта электронного пучка с током 2 кА и с энергией электронов 1 МэВ. Аналогичные результаты получены авторами [20].

Из перечисленных выше экспериментальных результатов видно, что на практике еще не удалось получить большого увеличения частоты и амплитуды волны при отражении от движущейся с постоянной скоростью границы. Это связано либо с недостаточно большой скоростью движения границы, либо с малой плотностью отражающей среды, в качестве которой обычно используются релятивистские пучки электронов или плазменные потоки. Основные надежды на успех здесь связываются с прогрессом в сильноточных электронных и плазменных ускорителях [1].

Отмеченные выше исследования были связаны с равномерным движением границы раздела сред. Естественным обобщением этих результатов являются исследования отражения волн от неравномерно движущихся границ, что привело к более эффективному преобразованию частот. Наиболее интересным в этом отношении представляется случай отражения волны от осциллирующей границы [21–23], поскольку любое движение границы всегда можно представить в виде интеграла или ряда Фурье. Этот случай достаточно просто реализовать экспериментально, используя электроакустический преобразователь в качестве осциллирующей границы. В теоретическом плане эта задача значительно сложнее, так как она относится к кругу задач математической физики с переменными граничных условий, зависящими от времени. Поэтому различными методами были получены только приближенные решения (см. [21–23]), которые справедливы при определенных достаточно ограниченных условиях. Вторая <трудность> связана с применением теории относительности для неинерциальных систем отсчета [24], с которыми связаны осциллирующие границы. Возможно, это одна из причин, в силу которой основные результаты были получены для волн акустической природы. Однако, как показано в [24], теорию относительности можно применять и для неинерциальных систем отсчета. Прямым подтверждением этого является математический аппарат электродинамики движущихся сред [1], который позволяет рассматривать краевые задачи с точки зрения одного покоящегося наблюдателя. При таком подходе не возникает необходимость многократного использования преобразований Лоренца при переходе от одной системы координат к другой.

2. Постановка задачи

Пусть электромагнитная волна напряженности электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{A} \exp\,[i(k_x x + k_z z - \omega t)] + \text{к.с.}, \tag{1}$$

падает на зеркало, осциллирующее вдоль собственной нормали, которая параллельна координатной оси z:

$$z = z_0 = D \sin(\Omega t + \varphi)\,, \tag{2}$$

где D – амплитуда смещения зеркала.

Координатная плоскость (x, z) совмещена с плоскостью падения волны. Экспериментальную проверку предлагаемой теории можно реализовать напылением зеркальной поверхности на пьезоэлектрический преобразователь с резонансной частотой Ω. Данную задачу наиболее просто решать в лабораторной системе координат, относительно которой записаны выражения (1), (2). Граничные условия в этой системе координат имеют вид [1]

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E} + \mathbf{E}^{(r)}] = \frac{\upsilon_n}{c}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^{(r)}), \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности зеркала; υ_n – мгновенная скорость зеркала вдоль собственной нормали; c – величина скорости света в пустоте; $\mathbf{B}$ – магнитное поле падающей волны; $\mathbf{E}^{(r)}$, $\mathbf{B}^{(r)}$ – электрическое и магнитное поле отраженной волны соответственно. Очевидно, что преломленные волны будут отсутствовать, и это учтено в граничном условии (3).

Для краткости ограничимся случаем, когда волна (1) поляризована перпендикулярно плоскости падения, т. е. $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$. Тогда из (3) следует

$$B_z + B_z^{(r)} = 0 \;\text{ при }\; z = z_0\,. \tag{4}$$

Отметим, что граничные условия (3) и (4) относятся к движущейся границе, однако соответствующие поля рассматриваются в лабораторной системе координат, в которой предполагается проводить измерения параметров отраженной волны.

3. Решение задачи с зависящими от времени краевыми условиями

Для того чтобы воспользоваться граничным условием (4), необходимо определить магнитное поле падающей волны. Используя уравнение Максвелла

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

и выражение (1), найдем

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\left[\frac{c\mathbf{k}}{\omega}, \mathbf{A}\right] \exp\left[i(k_x x + k_z z - \omega t)\right] + \text{к.с.}$$

Подставляя (2) в эту формулу, найдем выражение для магнитного поля вблизи осциллирующей границы, описываемое с точки зрения покоящегося наблюдателя

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{c\mathbf{k}}{\omega}, \mathbf{A}\right] e^{ik_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n(k_z D) \exp\left[i(n(\Omega t + \varphi) - \omega t)\right] + \text{к.с.}, \tag{5}$$

где было использовано разложение в ряд Фурье по функциям Бесселя [25]

$$\exp(i\xi \sin\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n(\xi) \exp(in\alpha) . \tag{6}$$

Здесь $\Gamma_n(\xi)$ – функция Бесселя первого рода целого порядка n. Из выражения (5) видно, что поле на границе описывается произведением двух периодических функций с двумя основными периодами $2\pi/\omega$ и $2\pi/\Omega$. Следовательно, в общем случае решение для отраженной волны нужно искать также в виде произведения двух периодических функций с теми же основными периодами $2\pi/\omega$ и $2\pi/\Omega$. С учетом вышесказанного решение для напряженности электрического поля отраженной волны представим в виде

$$\mathbf{E}^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_m \exp\left[i(k_x^{(m)} x - k_z^{(m)} z - (\omega - m\Omega) t)\right] + \text{к.с.}, \tag{7}$$

где $\mathbf{A}_m$, $\mathbf{k}^{(m)}$ являются неизвестными, которые следует найти. Отметим, что некоторые из амплитуд $\mathbf{A}_m$ могут оказаться равными нулю.

С помощью решения (7) и уравнения Максвелла найдем соответствующее выражение для магнитного поля отраженной волны

$$\mathbf{B}^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c[\mathbf{k}^{(m)}, \mathbf{A}_m]}{\omega - m\Omega} \exp\left[i(k^{(m)} r - (\omega - m\Omega) t)\right] + \text{к.с.} \tag{8}$$

Для того, чтобы воспользоваться граничным условием (4) определим магнитное поле на границе, точнее вблизи нее. Подстановка (2) в (8), с учетом разложения (6), дает

$$\mathbf{B}^{(r)}(z_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{c[\mathbf{k}^{(m)}, \mathbf{A}_m]}{2(\infty - m\infty)} \Gamma_p\left(-k_z^{(m)} D\right) \exp\left[i(k_x^{(m)} x + (m+p)\Omega t - \omega t + p\varphi)\right] + \text{к.с.} \tag{9}$$

Далее воспользуемся методом разделения переменных после подстановки выражений (5), (9) в уравнение (4), т. е. приравняем по отдельности функции при независимых переменных x и t соответственно. В результате получим

$$k_x = k_x^{(m)}\,, \quad \sin\theta_m = \frac{\omega}{\omega - m\Omega}\sin\theta\,, \tag{10}$$

где θ – угол падения волны (1); θ_m – угол отражения комбинационной волны с индексом m в решении (7), (8). Из соотношения (10) видно, что угол отражения зависит от индекса m, т. е. каждая комбинационная волна с индексом m имеет свой отличный от других угол отражения. Следовательно, закон отражения Снеллиуса не выполняется при отражении от осциллирующей границы. Сингулярный случай $\omega - m\Omega = 0$ не вызывает затруднений, так как соответствующая амплитуда комбинационной волны равна нулю, что будет видно из дальнейшего.

Приравнивание функций при независимой переменной t дает

$$\Gamma_n(k_z D) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\omega[\mathbf{k}^{(m)}, \mathbf{A}_m]_z \exp(-im\varphi)}{[\mathbf{k}, \mathbf{A}]_z(\omega - m\Omega)}\Gamma_{n-m}\left(-k_z^{(m)}D\right). \tag{11}$$

При получении этого уравнения было учтено необходимое равенство для показателей экспонент базиса Фурье: $n = m + p$.

Выражение (11) представляет собой бесконечную систему уравнений относительно неизвестных амплитуд $\mathbf{A}_m$. Для решения этой системы воспользуемся теоремой суммирования бесселевых функций [25], согласно которой

$$\Gamma_n(a + b) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Gamma_m(a)\,\Gamma_{n-m}(b)\,.$$

Сходство уравнения (11) с этой теоремой становится очевидным, если положить

$$-\frac{\omega[\mathbf{k}^{(m)}, \mathbf{A}_m]_z \exp(-im\varphi)}{[\mathbf{k}, \mathbf{A}]_z(\omega - m\Omega)} = \Gamma_m\left(k_z D + k_z^{(m)}D\right),$$

откуда находим решения для амплитуд

$$A_y^{(m)} = -\exp(im\varphi)\,\Gamma_m\left(k_z D + k_z^{(m)}D\right)\frac{\omega - m\Omega}{\omega}A_y\,. \tag{12}$$

Из этого решения видно, что действительно $\mathbf{A}_m = 0$ при $\omega - m\Omega = 0$, как это уже отмечалось выше.

Отраженные волны должны удовлетворять не только граничным условиям, но и соответствующим дисперсионным уравнениям для вакуума

$$\frac{(\omega - m\Omega)^2}{c^2} = \left(k_x^{(m)}\right)^2 + \left(k_z^{(m)}\right)^2,$$

где неизвестной является компонента волнового вектора $k_z^{(m)}$. Из дисперсионного соотношения находим

$$k_z^{(m)} = \frac{\Omega}{c}\left(m^2 - 2\frac{\omega}{\Omega}m + \frac{\omega^2\cos^2\theta}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Рассматривая подкоренное выражение правой части (13) как квадратное уравнение относительно m, находим его корни

$$m_1 = \frac{\omega}{\Omega}(1 - \sin\theta)\,, \; m_2 = \frac{\omega}{\Omega}(1 + \sin\theta)\,. \tag{14}$$

Ясно, что значениям $m_1 < m < m_2$ соответствуют затухающие комбинационные волны, а значениям $m < m_1$ и $m > m_2$ соответствуют распространяющиеся волны. Отметим, что значениям

$m = m_1$ и $m = m_2$ соответствуют две волны, распространяющиеся вдоль границы в разных направлениях согласно (9): $\sin\theta_{m_1} = 1$, $\sin\theta_{m_2} = -1$.

Очевидно, что в случае затухающих волн $\cos\theta_m$ становится гиперболическим с нулевым значением на бесконечности.

Подставляя значения амплитуд (12) в (7), (8), получим точное решение для отраженной волны в виде линейной суперпозиции комбинационных волн

$$\mathbf{E}^{(r)} = -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(im\varphi)\,\Gamma_m\big(k_z D + k_z^{(m)}D\big)\frac{\omega_m}{\omega}\bar{\mathbf{A}}\exp\left[i(k_x^{(m)}x - k_z^{(m)}z - \omega_m t)\right] + \text{к.с.}\,, \qquad (15)$$

где $\omega_m = \omega - m\Omega$ – частота соответствующей комбинационной волны. И

$$\mathbf{B}^{(r)} = -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(im\varphi)\,\Gamma_m\big(k_z D + k_z^{(m)}D\big)\frac{c}{\omega}\,[\mathbf{k}^{(m)}, \bar{\mathbf{A}}]\,\exp\left[i(k_x^{(m)}x - k_z^{(m)}z - \omega_m t)\right] + \text{к.с.} \qquad (16)$$

Нетрудно убедиться, что из полученного решения следует частный случай отражения электромагнитной волны от покоящегося зеркала.

4. Анализ и обсуждение полученных результатов

Решение (15), (16) можно упростить для ряда случаев, которые могут встречаться на практике. Для удобства выпишем в общем виде одну из комбинационных волн в решении (15)

$$\mathbf{E}^{(m)} = -\frac{\exp(im\varphi)}{2}\Gamma_m\big(k_z D + k_z^{(m)}D\big)\frac{\omega_m}{\omega}\mathbf{A}\exp\left[i\omega_m\left(\frac{x}{c}\sin\theta_m - \frac{z}{c}\cos\theta_m - t\right)\right] + \text{к.с.} \qquad (17)$$

Следует отметить, что аргумент функции Бесселя в (17) зависит от ее порядка:

$$\Gamma_m\big(k_z D + k_z^{(m)}D\big) = \Gamma_m\left(2k_z D - m\frac{\Omega D}{c}\cos\theta_m\right), \qquad (18)$$

где было учтено, что $k_z^{(m)} = \omega_m \cos\theta_m/c = (\omega - m\Omega)\cos\theta_m/c$.

Далее, учитывая, что $\Omega D = \upsilon$ – есть амплитуда скорости движения границы, выражение (18) можно переписать в виде

$$\Gamma_m\big(k_z D + k_z^{(m)}D\big) = \Gamma_m\big(2\alpha\cos\theta - m\beta\cos\theta_m\big)\,, \qquad (19)$$

где $\alpha = \omega D/c$, $\beta = \upsilon/c = \Omega D/c$.

Заметим, что всегда $\beta \le 1$, тогда как α может быть сколь угодно большой величиной, поскольку амплитуда смещений D ничем не ограничена, если иметь в виду низкочастотные колебания границы. Как известно, функция Бесселя m-го порядка принимает максимальное значение, когда ее аргумент сравним по величине с этим порядком, что позволяет управлять спектральным составом комбинационных волн, меняя амплитуду D или угол падения θ . Используя тождества [25]

$$\Gamma_{-n}(\alpha) \equiv (-1)^n\Gamma_n(\alpha) \equiv \Gamma_n(-\alpha)\,,$$

проанализируем выражение (19). При $m < 0$ имеем

$$\Gamma_m\big(k_z D + k_z^{(m)}D\big) = (-1)^m\,\Gamma_{|m|}\big(2\alpha\cos\theta + |m|\,\beta\cos\theta_m\big)\,. \qquad (20)$$

При $m > 0$ возможны два случая. В первом аргумент функции Бесселя остается положительным, когда $m < 2\omega\cos\theta/\Omega\cos\theta_m$. Во втором случае, при $m > 2\omega\cos\theta/\Omega\cos\theta_m$, аргумент становится отрицательным. Следовательно, величина функций Бесселя не является симметричной при изменении знака порядка m в (19), что приводит к увеличению спектральной плотности высокочастотных компонент. Последнее обстоятельство является благоприятным для перестройки частоты лазерного излучения в область ультрафиолетового и рентгеновского диапазонов, при этом пространственно-временная когерентность сохранится.

Для примера рассмотрим возможности увеличения на порядок частоты лазерного излучения при отражении от осциллирующего зеркала. Возьмем частоту осцилляций Ω, равную частоте излучения лазера ω, луч которого падает на осциллирующее зеркало, пусть $\omega = 3\cdot 10^{14}$ с$^{-1}$. Осцилляции со столь большой оптической частотой можно возбудить с помощью второго такого же лазера, луч которого падает на пьезоэлектрический пленочный преобразователь, вторая поверхность которого является зеркальной. Заметим, что здесь нет необходимости возбуждать гиперзвуковые волны, достаточно вызвать только осцилляции зеркальной поверхности. Нас интересует комбинационная волна с частотой $\omega_{-9} = \omega + 9\omega = 10\omega$. Для простоты ограничимся случаем нормального падения $\theta = 0$, тогда и $\theta_m = 0$ для любого m. Из таблиц [25] находим максимальное значение функции Бесселя 9-го порядка, которое равно 0,31 при значении аргумента 10,6–10,8, т.е. $\Gamma_9(10{,}8) \simeq 0{,}31$.

Согласно (20) имеем

$$\Gamma_{-9}(kD + k^{(m)}D) = (-1)^9\,\Gamma_9(2\omega\,D/c + 9\Omega\,D/c) = -\Gamma_9(11\omega\,D/c)\,,$$

подставляя сюда значения $c = 3\cdot 10^{10}$ см/с и $\omega = 3\cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, получим $\Gamma_9(11\omega\,D/c) = \Gamma_9(1{,}1\cdot 10^5\,D) = 0{,}31$, что возможно, если $1{,}1\cdot 10^5\,D = 10{,}8$. То есть потребуется амплитуда смещений, равная $9{,}8\cdot 10^{-5}$ см. Заметим, что на практике чем выше частота осцилляций, тем труднее вызвать достаточно большие амплитудные смещения. Поэтому может оказаться более оптимальным уменьшить частоты ω и Ω, но увеличить кратность частотного преобразования и получить при этом достаточно интенсивную комбинационную волну на частоте $m\omega$. Например [26], функция Бесселя $\Gamma_{16}(18) \simeq 0{,}26$ незначительно отличается по величине от $\Gamma_9(10{,}8) \simeq 0{,}31$, т.е. с увеличением порядка функций Бесселя их максимальные значения изменяются медленно. С помощью (19) для этого случая находим

$$\Gamma_{-16}(2\omega\,D/c + 16\,\Omega\,D/c) = \Gamma_{16}\,[D(2\omega + 16\omega)/c] = \Gamma_{16}(18\omega\,D/c) = 0{,}26 = \Gamma_{16}\,(18)\,,$$

при этом $\omega_{-16} = \omega + 16\,\omega = 17\,\omega$. Отсюда находим $D = c/\omega = 10^{-4}$ см.

Из сравнения этих двух численных примеров видно, что в первом случае для десятикратного увеличения частоты потребовалась амплитуда смещений $D = 9{,}8\cdot 10^{-5}$ см. Во втором случае для увеличения частоты в 17 раз потребовалось незначительное увеличение амплитуды смещений по сравнению с первым случаем до 10^{-4} см. Используя решения (15), (16), определим эффективность трансформации волн при отражении от осциллирующей границы по отношению интенсивностей комбинационных волн к интенсивности падающей волны:

$$R_m \equiv \frac{I_m}{I} = \left[\frac{\omega - m\Omega}{\omega}\,\Gamma_m\big(k_z D + k_z^{(m)}D\big)\right]^2 = \left(1 - m\,\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \Gamma^2\big(k_z D + k_z^{(m)}D\big),$$

где I – интенсивность падающей волны; I_m – интенсивность комбинационной волны m-го порядка. Для приведенных выше примеров имеем $R_{-9} = 100\cdot 0{,}31^2 = 9{,}61$ и $R_{-16} = (1 + 16)^2\cdot 0{,}26^2 = 41$, т.е. интенсивности этих комбинационных волн превосходят интенсивность падающей волны. Отметим, что увеличение интенсивности также наблюдается и при отражении электромагнитных волн от зеркала, движущегося с постоянной скоростью навстречу волне [1]. Однако, как отмечалось во введении, из-за небольших скоростей это усиление незначительно. Очевидно, что увеличение интенсивности волны при отражении от движущегося зеркала обусловлено работой, которую выполняет зеркало над волной посредством радиационного давления [21].

Сделаем несколько замечаний относительно связи идеальности зеркальной поверхности и ультравысоких частот. Как известно, с уменьшением длины волны возникают принципиальные трудности при создании идеальной зеркальной поверхности для отражения таких волн.

Однако в рассмотренном здесь случае такая проблема не возникает, поскольку действительное доплеровское смещение частоты незначительно: $\Delta\omega \simeq \omega\,\Omega\, D/c \sim \omega$.

Рассмотренные выше примеры представляют скорее теоретический, чем практический интерес, поскольку для их реализации необходима амплитуда скорости, близкая к скорости света. Однако высокая эффективность трансформации волн за счет коэффициента $(1 - m\Omega/\omega)^2$ дает возможность получения волн с ультравысокими частотами при $m = 10^2,\ 10^3,\ 10^4$ и т. д., когда амплитуда скорости невелика ($\Omega\, D \ll c$). Но за счет множителя m в (19) всегда можно повысить эффективную скорость $m\Omega\, D$ так, что она была близка к скорости света и даже могла ее превосходить. Учитывая, что экстремум функции Бесселя m-го порядка достигается тогда, когда ее аргумент сравним с порядком m, с помощью (19) находим

$$|m| \simeq \frac{2\omega D}{c - \Omega D}. \tag{21}$$

Поскольку аргумент функций Бесселя (19) зависит от порядка, то в общем случае для проведения численных оценок необходимо воспользоваться теоремой суммирования для (19)

$$\Gamma_n(2\,\alpha\cos\theta - n\,\beta\cos\theta_n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Gamma_m(2\,\alpha\cos\theta)\,\Gamma_{n-m}(n\,\beta\cos\theta_n)\,(-1)^{n-m}, \tag{22}$$

после чего уже можно применять главные члены асимптотических формул [25] при $n \to \infty$ и фиксировании остальных переменных

$$\Gamma_n(n\,\mathrm{sech}\gamma) \sim \frac{\exp\,[n(\mathrm{th}\gamma - \gamma)]}{\sqrt{2\pi n \mathrm{th}\gamma}},\ \ \Gamma_n(\gamma) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e\gamma}{2\,n}\right)^n.$$

При фиксированном порядке и $2\alpha\cos\theta \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\Gamma_m(2\,\alpha\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{2\pi\alpha\cos\theta}}\cos\!\left(2\,\alpha\cos\theta - \frac{1}{2}\,m\pi - \frac{1}{4}\,\pi\right). \tag{23}$$

При малых значениях аргумента $|2\alpha\cos\,\theta - n\beta\cos\,\theta_n|$ имеем

$$\Gamma_n(\,\alpha\,2\cos\theta - n\,\beta\cos\theta_n) \approx \frac{(2\,\alpha\cos\theta - n\,\beta\cos\theta_n)^n}{2^n\,n!}. \tag{24}$$

Это приближение может быть справедливым только при достаточно малом порядке n.

Следует сделать одно важное замечание, касающееся интерпретации полученного решения и правильного выбора граничных условий на бесконечности. Как видно из полученного решения (15), всегда найдется такое значение индекса суммирования $m \geq \omega/\Omega$, начиная с которого частоты комбинационных волн станут <отрицательными>. Очевидно, что в этих случаях каждое из выражений для комбинационных волн вида (17) следует представить в форме

$$\bar{E}^{(n)} = \frac{+\mathrm{e}^{-in\varphi}}{2}\,\Gamma_n^*\big(k_z D + k_z^{(n)} D\big)\,\frac{\omega_{-n}}{\omega}\,\bar{A}^*\,\exp\!\left[i\omega_{-n}\!\left(\frac{x}{c}\sin\theta_n - \frac{z}{c}\cos\theta_n - t\right)\right] + \text{к.с.},$$

где переставлены комплексно-сопряженные члены. Кинематика распространения этих волн соответствует эффективному обращению времени. В частности, нетрудно найти условия для обращения волнового фронта и обращения динамики диспергирующего когерентного импульса.

5. Заключение

Физическая картина отражения схожа с комбинационным рассеянием, которое описывается феноменологически посредством учета нелинейных членов. В нашем случае изменение частоты обусловлено доплеровским смещением, тогда как при нелинейном взаимодействии физический механизм остается неясным. Следует отметить, что нелинейные взаимодействия волн наиболее эффективно проявляются в пьезоэлектриках ($LiNbO_3$), где, несомненно, имеет свой вклад доплеровский механизм проявления нелинейности.

1. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. // УФН. 1989. Т. 159. С. 155–189.
2. Landecker K. // Phys. Rev. 1952. V. 86. P. 852–993.
3. Lampert M.A. // Rhys. Rev. 1956. V. 102. P. 299–307.
4. Totaro C. // Bull. Union Math. Ital. 1957. V. 12. P. 658–664.
5. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4. С. 1171–1179.
6. Столяров С.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1962. Т. 5. С. 671–677.
7. Столяров С.Н. // ЖТФ. 1963. Т. 33. С. 565–569.
8. Pyati V.P. // J. Appl. Phys. 1967. V. 38. P. 562–570.
9. Ramasastry I., Chiu G.Y. // Electron. Lett. 1967. V. 3. P. 479–483.
10. Shiozawa T., Hasama K. // J. Appl. Phys. 1967. V. 38. P. 4459–4471.
11. Shiozawa T., Hasama K. // Radio Sci. 1968. V. 3. P. 569–573.
12. Yeh C. // J. Appl. Phys. 1965. V. 36. P. 3513–3527.
13. Yeh C. // Rhys. Rev. 1968. V. 167. P. 875–889.
14. Островский П.А., Степанов Н.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. С. 489–501.
15. Hey I.S., Pinson I.T., Smith P. // Nature. 1957. V. 179. P. 1184–1186.
16. Загороднов О.Г., Файнберг Я.Б., Егоров А.М. // ЖЭТФ. 1960. Т. 38. С. 7–18.
17. Linhart I.G., Ornstein L.Th.M. // 4-th Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases. Ippsala, Sweden, 1959. V. 2. P. 774–779.
18. Загороднов О.Г., Файнберг Я.Б., Егоров А.М., Болотин Л.И. // ЖТФ. 1961. Т. 31. С. 297-306.
19. Pasour I.A., Granatstein V.L., Parker R. K. // Phys. Rev. A. 1977. V. 16. P. 2441–2448.
20. Buzzi I.M., Doucer H. I., Etlisher B. et al.// IEEE Trans. 1977. V. MTT-25. P. 559–573.
21. Censor D. // I. Frankin Inst. 1973. V. 295. P. 103–116.
22. Zutter D. // IEEE Trans. Antennas and Propog. 1982. V. AP-30. P. 898–996.
23. Лямшев Л.М.// ДАН СССР. 1983. Т. 269. С.346–351.
24. Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации. М.: Наука, 1987. 272 с.
25. Абрамовиц М., Липман Д., Мак Ниш А. и др. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.
26. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.

Тихоокеанский океанологический институт
Дальневосточного отделения РАН, Владивосток

Поступила в редакцию
19 марта 1993 г.

V.I. Reshetskii. **Reflection of Electromagnetic Wave from an Oscillating Mirror.**

The problem on electromagnetic wave reflection from an oscillating mirror is being studied theoretically. An exact solution for the reflected mave is obtained. This solution is an infinitive superposition of plane monochromatic waves at combination frequences having their own amplitudes and reflection angles. Some possible applications of this effect like, e. g., to frequency conversion of optical laser radiation to UV and X-ray regions are discussed.