

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ
ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

УДК 519.653

С.И. Кавкьянов, С.В. Стрепетова

**ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ**

Рассматриваются условия применимости преобразования Фурье в задаче численного дифференцирования функций, измеряемых с погрешностью. Излагаются способы учета граничных условий на дифференцируемую функцию и ее производные. В численном эксперименте исследуется влияние неточности задания граничных условий на качество дифференцирования.

Введение. Задача нахождения производной n -го порядка $u(t) = f^{(n)}(t)$ функции $f(t)$, измеряемой с некоторой погрешностью на интервале $[t_0, T]$, сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода [1]:

$$\int_{t_0}^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau = \varphi(t), \quad (1)$$

где

$$h(t) = t^{n-1}/(n-1)!, \quad (2)$$

$$\varphi(t) = f(t) - f(t_0) - f^{(1)}(t_0) \frac{(t-t_0)}{1!} - \dots - f^{(n-1)}(t_0) \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (3)$$

Регуляризованные алгоритмы численного дифференцирования строятся обычно для системы линейных алгебраических уравнений, являющейся конечно-разностным аналогом (1) (производные до $(n-1)$ -го порядка включительно в точке t_0 полагаются равными нулю, $\varphi(t) = f(t)$ [1, 2]). При этом наиболее трудоемкой операцией является обращение матриц размерностью $N \times N$, где $N = (T-t_0)/\Delta t + 1$, Δt — шаг дискретизации по t функции $\varphi(t)$ и $u(t)$. В то же время для уравнений типа свертки вычислительные затраты можно значительно уменьшить путем перехода в частотную область [2–4]. Это особенно важно для задач большой размерности, в частности, при дифференцировании многомерных данных [5]. В настоящей статье рассматриваются условия применимости преобразования Фурье (ПФ) в задаче численного дифференцирования, излагаются способы учета граничных условий на дифференцируемую функцию и ее производные, в численном эксперименте проводится сравнительный анализ качества дифференцирования при использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) и при решении системы линейных уравнений, аппроксимирующей (1).

Условия применимости ПФ в задаче численного дифференцирования. Для использования ПФ при решении уравнения (1) произведем стандартное доопределение [2]:

$$u(t) = \varphi(t) = 0 \quad t < t_0, \quad (4)$$

$$h(t) = 0 \quad \text{при } t < 0, \quad (5)$$

обеспечивая таким образом возможность перехода в (1) к бесконечным пределам интегрирования. Уравнение (1) в частотной области переписывается тогда в виде:

$$\tilde{h}(\omega) \tilde{u}(\omega) = \tilde{\varphi}(\omega), \quad (6)$$

где тильда означает ПФ, ω — угловая частота, а регуляризованное по Тихонову решение исходной задачи находится с помощью обратного ПФ от

$$\hat{u}(\omega) = \frac{\tilde{h}(\omega)}{\tilde{h}(\omega)} \frac{|\tilde{h}(\omega)|^2}{|\tilde{h}(\omega)|^2 + \alpha M(\omega)}, \quad (7)$$

где $M(\omega) \geq 0$ — заданная четная неотрицательная функция, числовой параметр $\alpha > 0$ [1].

Одним из условий применимости ПФ к уравнению (1) с дополнительными условиями (2)–(5), а значит, и возможности использования (6), (7) является абсолютная интегрируемость функций h , u , φ . В то же время функция $h(t)$, определенная согласно (2), (5), не является абсолютно интегрируемой. Для преодоления этого затруднения можно использовать способ, основанный на введении «множителя сходимости» [6]. При этом $h(t)$ домножается на $\exp(-ct)$, $c > 0$, и предельный переход при $c \rightarrow 0$ осуществляется уже в конечных результатах. Вычисляя ПФ от функции (2), домноженной на $\exp(-ct)$, получим с учетом (5):

$$\tilde{h}_c(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(c+j\omega)t\} dt = \frac{1}{(c+j\omega)^n}, \quad (8)$$

где $j^2 = -1$. Как показано в [6], для $n = 1$ возможность использования (8) при $c \rightarrow 0$ для вычисления свертки вида (1) с использованием (6) обеспечивается в случае $\tilde{f}^{(1)}(0) = 0$. Нетрудно показать, что при $n > 1$ для обеспечения возможности предельного перехода при использовании $\tilde{h}_c(\omega)$ вместо $\tilde{h}(\omega)$ в (6) и $c \rightarrow 0$ необходимым условием является

$$\tilde{f}^{(1)}(0) = \dots = \tilde{f}^{(n)}(0) = 0. \quad (9)$$

Это условие в совокупности с требованием абсолютной интегрируемости функций $\tilde{f}^{(1)}(t) = \dots = \tilde{f}^{(n)}(t)$ (необходимым для применимости к ним ПФ) накладывает ограничения на дифференцируемую функцию $f(t)$, состоящие в требовании равенства нулю этой функции и всех ее производных до $(n-1)$ -го порядка включительно при $|t| \rightarrow \infty$. При этом передаточная функция $\tilde{h}(\omega)$ в (6), (7) будет иметь вид:

$$\tilde{h}(\omega) = 1/(j\omega)^n, \quad \omega \neq 0. \quad (10)$$

При $\omega = 0$ согласно (9) полагаем в (7) $\hat{u}\tilde{f}^{(1)}(0) = 0$.

Заметим, что перечисленные выше ограничения на функцию $f(t)$ сформулированы для бесконечных пределов интегрирования $t_0 = -\infty$, $T = \infty$. В реальных ситуациях они конечны, то есть условие абсолютной интегрируемости выполняется. Кроме того, при использовании алгоритма БПФ для получения линейной, а не циклической свертки [7] число отсчетов функции $f(t)$ увеличивается за счет добавления нулевых значений для $t < t_0$, $t > T$, так что формально требование обращения в нуль доопределенной таким образом функции и ее производных до $(n-1)$ -го порядка на концах интервала выполняется, даже если оно не выполнено для исходной функции $f(t)$ (определенной на $[t_0, T]$). Тем не менее возможные скачки в точках t_0 , T доопределенной функции могут приводить к существенному искажению результатов дифференцирования (см. ниже численный пример 2). Поэтому при условии, что указанное выше требование выполняется на границах интервала $[t_0, T]$, рассмотрим численный пример дифференцирования такой функции.

Численный пример 1. В качестве модельной функции $f(t)$ выбиралась Гауссова кривая, приведенная на рис. 1, а, которая после дискретизации содержала 32 отсчета на интервале t_0, T] и дополнялась с обеих сторон $N/2$ нулевыми значениями. Параметры Γ ауссовой кривой были выбраны таким образом, чтобы на концах интервала $[t_0, T]$ значения функции и ее производных были близки к нулю. На $f(t_i)$ накладывалась аддитивная помеха $\epsilon\theta(t_i)$, где θ_i — случайные числа, равномерно распределенные на $[-1, 1]$, выбирались два уровня помех: $\epsilon = 0,01$ и $\epsilon = 0,1$. Дифференцирование возмущенной таким образом функции $f_\epsilon(t) = f(t) + \epsilon\theta(t)$ проводилось двумя методами: с использованием алгоритма БПФ [7] (для вычисления входящих в (7) спектральных характеристик и обратного ПФ от (7)), а также путем решения системы $N = 32$ линейных уравнений, аппроксимирующей (1), методом А.Н. Тихонова [1]. В обоих случаях выбирался стабилизатор нулевого порядка ($M(\omega) = 1$ в (7)), параметр регуляризации определялся по невязке. Результаты вычисления первых трех производных представлены на рис. 1. Расчеты показали, что качество дифференцирования практически совпадает для обоих алгоритмов. Однако дифференцирование с использованием БПФ дает большой выигрыш в быстродействии, составлявший в данном случае ($N = 32$) несколько десятков раз (расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6). Этот выигрыш быстро возрастает с увеличением N [3].

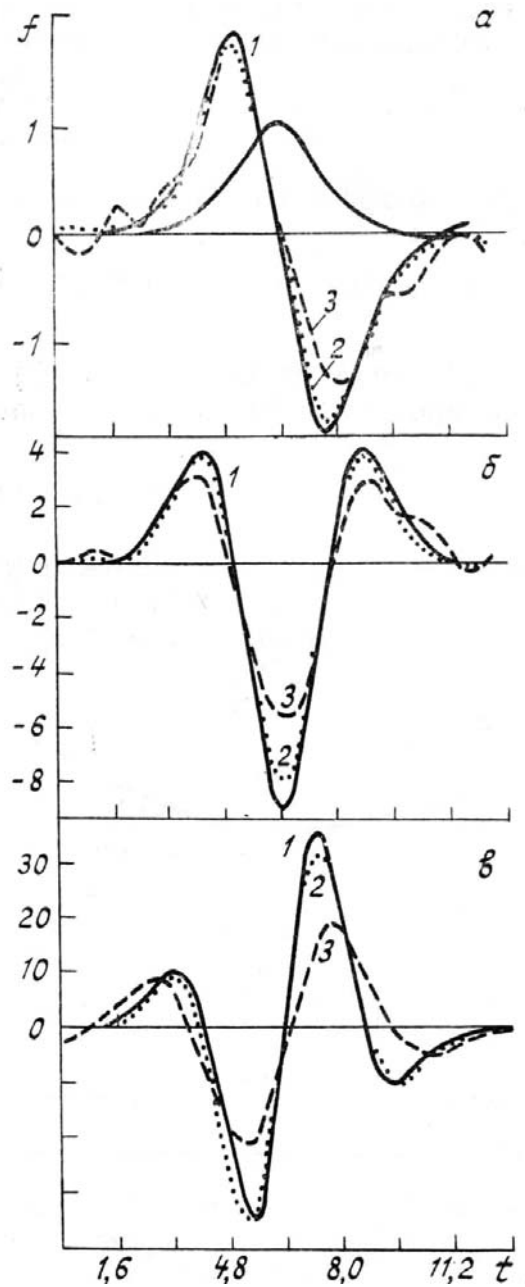


Рис. 1. Численное дифференцирование модельной функции $f(t)$ с использованием ПФ: 1 — точное значение; 2, 3 — вычисленные при 1%-й и 10%-й помехах значения производных первого (а), второго (б) и третьего (в) порядков

Учет граничных условий (дифференцирование произвольных функций). Пусть $f(t)$ — произвольная дифференцируемая функция, не обязательно равная нулю (как и ее производные до $(n-1)$ -го порядка) на границах интервала $[t_0, T]$. Построим функцию $f_p(t) = f(t) - p(t)$, удовлетворяющую необходимым граничным условиям:

$$f_p(t_0) = f_p(T) = 0; \dots; f_p^{(n-1)}(t_0) = f_p^{(n-1)}(T) = 0. \quad (11)$$

Чтобы $f_p(t)$ удовлетворяла $2n$ уравнениям (11), будем искать $p(t)$ в виде полинома степени $(2n-1)$

$$p(t) = \sum_{\kappa=0}^{2n-1} a_{\kappa} \frac{(t-t_0)^{\kappa}}{\kappa!} \quad (12)$$

с $2n$ коэффициентами a_{κ} , определяемыми из уравнений, следующих из (11):

$$p(t_0) = f(t_0), p(T) = f(T); \dots; p^{(n-1)}(t_0) = f^{(n-1)}(t_0), p^{(n-1)}(T) = f^{(n-1)}(T). \quad (13)$$

Искомая производная $f^{(n)}(t)$ находится (после численного дифференцирования функции $f_p(t)$) по формуле:

$$f^{(n)}(t) = f_p^{(n)}(t) + \sum_{\kappa=0}^{n-1} a_{n+\kappa} \frac{(t-t_0)^\kappa}{\kappa!}. \quad (14)$$

Подобным же образом можно учесть граничные значения искомой производной $f^{(n)}(t_0), f^{(n)}(T)$ (если они известны), при этом полином (12) будет $(2n+1)$ -го порядка. При отсутствии информации о граничных значениях производных того или иного порядка естественно полагать их равными нулю (см. [1, 2]). Влияние подобных допущений исследуется ниже в численном эксперименте.

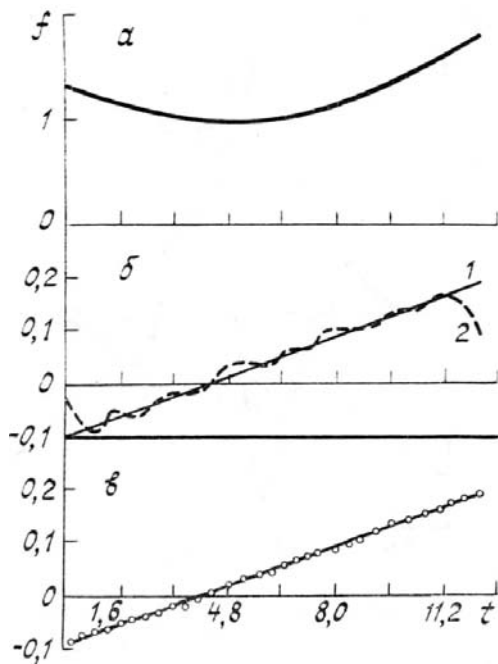


Рис. 2. Влияние граничных условий при вычислении производной первого порядка: а — дифференцируемая функция, 1 — точное значение ее производной, 2 — результаты численного дифференцирования при неизвестных (б) и известных (в) граничных условиях (помеха составляет 1% максимального значения $f(t)$)

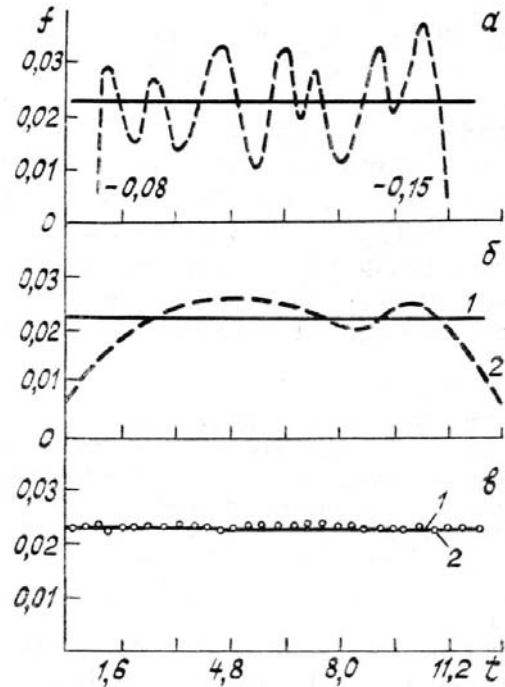


Рис. 3. Влияние граничных условий при вычислении производной второго порядка (модельная функция $f(t)$ та же, что нарис. 2). 1 — точное значение производной, 2 — вычисленное при 1%-й помехе для вариантов граничных условий а, б, в

Численный пример 2. В качестве модельной функции выбиралась парабола $f(t) = at^2 + bt + c$, изображенная на рис. 2, а, на которую накладывалась помеха (аналогично примеру 1, $\varepsilon = 0,01 f_{\max}$), и вычислялись производные этой функции 1-го и 2-го порядка с использованием ПФ. Параметр регуляции α определялся по невязке. При вычислении первой производной рассматривались варианты, когда граничные значения искомой производной неизвестны (в этом случае они полагались равными нулю — рис. 2, б), и при известных $f^{(1)}(t_0), f^{(1)}(T)$ (рис. 2, в). Коэффициенты полинома $p(t)$ третьей степени имели при этом вид

$$a_0 = f(t_0); a_1 = \frac{1}{\Delta t} [f^{(1)}(T) - f^{(1)}(t_0)] - 2a_2 \Delta t;$$

$$a_2 = \frac{3}{2\Delta t^2} [f^{(1)}(T) + f^{(1)}(t_0)] - \frac{3}{\Delta t^3} [f(T) - f(t_0)]; \Delta t = T - t_0.$$

При вычислении второй производной коэффициенты полинома $p(t)$ пятой степени имеют следующий вид:

$$a_0 = f(t_0); a_1 = f^{(1)}(t_0); a_2 = f^{(2)}(t_0);$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta t} \left[f^{(2)}(T) - f^{(2)}(t_0) - \frac{a_4 \Delta t^2}{2!} - \frac{a_5 \Delta t^3}{3!} \right];$$

$$a_4 = \frac{12}{\Delta t^3} \left\{ \frac{\Delta t}{2} [f^{(2)}(T) + f^{(2)}(t_0)] - [f^{(1)}(T) - f^{(1)}(t_0)] - \frac{a_5 \Delta t^4}{4!} \right\};$$

$$a_5 = \frac{720}{\Delta t^5} \left\{ f(T) - f(t_0) - \frac{\Delta t}{2} [f^{(1)}(T) + f^{(1)}(t_0)] + \frac{\Delta t^2}{12} [f^{(2)}(T) - f^{(2)}(t_0)] \right\}.$$

Рассматривались следующие варианты граничных условий:

- а) $f^{(1)}(t_0) = f^{(1)}(T) = 0$, $f^{(2)}(t_0)$ и $f^{(2)}(T)$ известны (рис. 3, а);
- б) $f^{(2)}(t_0) = f^{(2)}(T) = 0$, $f^{(1)}(t_0)$ и $f^{(1)}(T)$ известны (рис. 3, б);
- в) известны граничные значения $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ (рис. 3, в).

В случае отсутствия информации о граничных значениях $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ они полагаются равными нулю. При этом полученные результаты оказывались близкими к варианту «а» и здесь не приводятся.

Анализ результатов показывает, во-первых, хорошее согласие получаемых при известных граничных условиях решений (рис. 2, в, 3, в) с приведенными точными значениями производных (погрешности восстановлений находятся в пределах погрешности задания дифференцируемой функции). Во-вторых, отсутствие информации о граничных значениях искомой производной приводит к ухудшению результатов вблизи границ, но в целом получаемое решение вполне согласуется с истинным (рис. 2, б, 3, б). В-третьих, к существенному ухудшению результатов приводит неточность задания $f^{(1)}(t_0)$, $f^{(1)}(T)$ при вычислении второй производной даже с использованием информации об $f^{(2)}(t_0)$, $f^{(2)}(T)$ (рис. 3, а). Отметим, что аналогичным образом неточность задания граничных условий влияет на точность решения системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода Тихонова [1]. Таким образом, численное дифференцирование с использованием ПФ, как следует из численных примеров 1 и 2, дает приблизительно такую же точность решения задачи, что и при использовании матричных методов. В то же время предложенная методика дает многократный выигрыш в скорости вычислений, особенно для задач большой размерности, таких, как численное дифференцирование лидарных сигналов [8].

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
2. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 360 с.
3. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. М.: Сов. радио, 1979. 272 с.
4. Воскобойников Ю. Е., Томсонс Я. Я. //Автометрия. 1975. № 4. С. 10–18.
5. Грачев И. Д., Салахов М. Х. //Автометрия. 1985. № 2. С. 35–41.
6. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1971. 672 с.
7. Отнес Р., Энноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982. 428 с.
8. Зуев В. Е., Наац И. Э. Обратные задачи лазерного зондирования атмосферы. Новосибирск: Наука, 1982. 242 с.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
21 декабря 1989 г.

S. I. Kavkyanov, S. V. Strepetova. **Numerical Differentiation of Experimental Data Using Fourier Transform.**

The paper discusses the applicability of the Fourier transform to numerical differentiation of functions measured with errors. The methods of accounting for boundary conditions imposed on the function and its derivatives. Numerical study is carried out of the influence of errors in boundary conditions on the quality of differentiation.