«Оптика атмосферы», **3**, № 11 (1990)

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ

УДК 535.12

В.П. Аксенов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФАЗЫ ПО ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТОВОГО ПОЛЯ

Получена формула, выражающая фазовый профиль двумерного светового поля через распределение его интенсивности для монохроматического когерентного светового пучка на основе преобразования Радона обобщенных функций.

Проблема восстановления волнового фронта по распределениям интенсивности известна как фазовая проблема в оптике [1]. Среди большого числа опубликованных работ по этой проблеме наибольшее количество посвящено итерационным методам [2]. Существуют и другие варианты решения этой задачи [3]. В [4] получена формула восстановления функции Вигнера, в которой используется распределение интенсивности в бесконечно протяженной среде. Очевидно, что данный подход, использующий избыточную информацию для определения фазы волны, не оптимален и требует уменьшения объема данных, необходимых для восстановления. Кроме того, информация о фазе, скрытая в функции Вигнера, неудобна для анализа и сравнения различных алгоритмов восстановления. В данной статье на основе установленной в [4] связи между проекцией функции Вигнера и интенсивностью волнового поля получена аналитическая формула для реконструкции фазы. Вывод осуществлён для поля с зависимостью от одной поперечной координаты.

В приближении параболического уравнения распределение поля $u(x, z)$ двумерного светового пучка описывается следующим выражением:

$$u(x, z) = \frac{1}{1+i}\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(x')\exp\left\{i\frac{k}{2z}(x-x')^2\right\}dx', \quad z>0, \tag{1}$$

где $u_0(x) = u(x, 0)$ — поле в плоскости $z = 0$. Тогда интенсивность поля

$$I(x, z) = u(x, z)\,u^*(x, z) = \frac{k}{2\pi z}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(x')\exp\left\{i\frac{k}{2z}(x-x')^2\right\}dx'\right|^2. \tag{2}$$

Вводя преобразование Фурье от $u(x_1, z)\,u^*(x_2, z)$ по разностной переменной $\xi = x_1 - x_2$, $2x = x_1 + x_2$, получим функцию Вигнера

$$W(x, p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(x+\xi/2)\,u_0^*(x-\xi/2)\exp(-ip\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Выделим в представлении для поля $u_0(x)$ действительную фазу волны $S_0(x)$

$$u_0(x) = I_0^{1/2}(x)\exp\{iS_0(x)\}. \tag{4}$$

Используя (4), легко получить

$$I_0(x)\frac{d}{dx}S_0(x) = \mathrm{Im}\frac{d}{d\xi}u_0(x+\xi/2)\,u_0^*(x-\xi/2)|_{\xi=0}. \tag{5}$$

Подставляя в (5) представление $u_0(x) = u(x + \xi/2)\,u_0^*(x - \xi/2)$, через функцию Вигнера получим

$$\frac{d}{dx}S_0(x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x, p)\,p\,dp}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x, p)\,dp}. \tag{6}$$

Соотношение (6) дает возможность восстановить локальный наклон волнового фронта по моментам функции Вигнера и реконструировать саму фазу с точностью до постоянной составляющей. Так,

$$S_0(x) = S_0(0) + \int_0^x dx' \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W(x', p)\, p\, dp}{\int_{-\infty}^{\infty} W(x', p)\, dp}. \tag{7}$$

Неоднозначность восстановления связана с потерей информации о постоянном фазовом набеге, обусловленной перемножением комплексно сопряженных полей. Введем преобразование Радона [5] от функции Вигнера

$$\hat{W}(q, \mathbf{n}) = \iint_{-\infty}^{\infty} W(x, p)\, \delta(xn_1 + pn_2 - q)\, dx\, dp, \tag{8}$$

где $\mathbf{n}\{n_1, n_2\}$, δ — символ дельта-функции Дирака. Подставляя (3) в (8) и сравнивая результат последующего интегрирования с (2), получим соотношение, связывающее радоновскую проекцию функции Вигнера $\hat{W}(q, \mathbf{n})$ и интенсивность

$$\hat{W}(q, \vec{\mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{n_1} I\left(\frac{q}{n_1}, \frac{n_2}{n_1} k\right) \theta\left(k \frac{n_2}{n_1}\right), \tag{9}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Соотношение (9) можно использовать для восстановления самой функции Вигнера, если воспользоваться обратным преобразованием Радона [5]

$$W(x, p) = -\frac{1}{k\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} \frac{I(x', z')}{\left(x - x' - p\frac{z'}{k}\right)^2} dz'. \tag{10}$$

Эта формула впервые получена в [4]. Следует отметить, однако, что в [4] она ошибочно содержит интегрирование по отрицательной области оси z.

Обращение (10) можно непосредственно использовать при восстановлении фазы (7). Попытаемся, однако, получить такую формулу обращения, которая не содержит этапа восстановления функции Вигнера, поэтому обратимся к математическому аппарату преобразований Радона обобщенных функций [5].

Согласно (7) для восстановления фазы необходимо вычислить нулевой и первый моменты функции Вигнера, для чего воспользуемся аналогом формулы Паншереля для преобразования Радона. Так, для двух функций, одна из которых $f(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая и быстро убывающая вместе со всеми производными, имеем

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = -\frac{1}{2\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 \int_{-1}^{1} dn_2 \hat{f}\left(p_2; \sqrt{1 - n_2^2}, n_2\right)$$
$$\times\, g\left(p_1; \sqrt{1 - n_2^2}, n_2\right) \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \frac{dn_2}{\sqrt{1 - n_2^2}}, \tag{11}$$

где $\hat{f}(p; n_1, n_2)$, $\hat{g}(p; n_1, n_2)$ — преобразования Радона функций f и g. Ввиду того, что нас интересует $\int f(x, y) y\, dy$ в (11), предположим $g(x, y) = y\delta(x_1 - x)$. Тогда в соответствии с [5] преобразование Радона функции $g(x, y)$ есть

$$\hat{g}(p; n_1, n_2) = (p - x)\, n_2^2\, \mathrm{sgn}\, n_2 + 2\delta'(n_2)\, (p - x) \ln|p - x|. \tag{12}$$

Первое слагаемое в (12) является несущественной функцией [5], поэтому получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\, y dy = \frac{1}{\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 (p_1 - x) \ln |p_1 - x| \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \frac{\partial}{\partial n} \hat{f}(p_2;\ 1,\ n)\,|_{n=0}. \tag{13}$$

Соответственно для нулевого момента $f(x,\ y)$ имеем

$$\int f(x,\ y)\, dy = \frac{1}{\pi^2} \iint dp_1 dp_2 \ln |p_1 - x| \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \hat{f}(p_2;\ 1,\ 0). \tag{14}$$

Можно показать, пользуясь методами теории комплексного переменного, что

$$\int dp_1 (p_1 - x) \ln |p_1 - x| \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} = \frac{\pi^2}{2} \operatorname{sgn}(p_2 - x), \tag{15}$$

$$\int dp_1 \ln |p_1 - x| \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} = \pi^2 \delta (p_2 - x), \tag{16}$$

где $\operatorname{sgn}(x)$ — знаковая функция

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Итак, интеграл от функции $f(x,\ y)$ по неограниченной области выражается через радоновские лучи-суммы следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\, y dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(p - x) \frac{\partial}{\partial n} \hat{f}(p;\ 1,\ n)\,|_{n=0}, \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\, dy = \hat{f}(x;\ 1,\ 0). \tag{18}$$

Соответственно для интегральных моментов функции Вигнера получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,\ p)\, p dp = k\pi \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x' - x) \frac{\partial I(x',\ z)}{\partial z} \bigg|_{z=0}, \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,\ p)\, dp = 2\pi I(x,\ 0). \tag{20}$$

В соответствии с (7), используя (19), (20), получаем окончательно

$$S_0(x) = S_0(0) + \frac{k}{2} \int_0^x dx' \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x'' - x') \frac{\partial I(x'',\ 0)}{\partial z} dx'' \right\} / I(x',\ 0) \tag{21}$$

или

$$S_0(x) = S_0(0) + \frac{k}{2} \int_0^x dx' \left\{ \int_{x'}^{\infty} \frac{\partial I(x'',\ 0)}{\partial z} dx'' - \int_{-\infty}^{x'} \frac{\partial I(x'',\ 0)}{\partial z} dx'' \right\} / I_0(x',\ 0). \tag{22}$$

В качестве примера использования формул (21) и (22) рассмотрим процедуру восстановления фазы по значениям интенсивности Гауссового пучка

$$u(x,0)=\exp\left\{-\frac{1}{2a_t^2}x^2-\frac{ik}{2\varphi(0)}x^2\right\}, \tag{23}$$

где a_t — эффективный размер пучка, φ_0 — кривизна фазового фронта на его оси. Подставляя (23) в (2) и проводя интегрирование для интенсивности, имеем

$$I(x,z)=\frac{a_t^2}{z}\left(1+\frac{k^2a_t^4}{z^2}\left(1-\frac{z}{\varphi(0)}\right)^2\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{k^2a_t^2x^2}{z^2\left(1+\frac{k^2a_t^4}{z^2}\left(1-\frac{z}{\varphi(0)}\right)^2\right)}\right\}. \tag{24}$$

Находя производную по 2 от (24) в нуле получим

$$\frac{\partial I(x,0)}{\partial z}=\frac{1}{\varphi(0)}\exp(-x^2/a_t^2)-\frac{2}{\varphi(0)}\frac{x^2}{a_t^2}\exp(-x^2/a_t^2). \tag{25}$$

Подставляя (25) в (22), выполняя интегрирование по поперечной координате с учетом того, что $I(x,0)=\exp(-x^2/a_t^2)$, находим

$$S_0(x)=S_0(0)-\frac{k}{2\varphi(0)}x^2,$$

что совпадает с исходным распределением фазы.

Итак, мы получили аналитическую формулу восстановления фазы по распределению интенсивности. Она не содержит избыточной информации, которая заключена в формуле обращения для функции Вигнера (10), использующей распределения интенсивности в бесконечно протяженной среде. Очевидно, что при численной реализации (22) проблема восстановления сводится к восстановлению фазы по распределениям интенсивности в двух близких сечениях.

1. Ферверда Х.А. //Обратные задачи в оптике. М.: Машиностроение. 1984. С. 21–47.
2. Кузнецова Т.И. //УФН. 1988. Т. 154. Вып. 4. С. 677–690.
3. Teague M.R. //J. Opt. Soc. Amer. 1983. V. 73. № 11. P. 1434–1441.
4. Кузнецова Т.И. //Квантовая электроника. 1988. Т. 15. № 9. С. 1921–1922.
5. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
18 июня 1990 г.

V. P. Aksyonov. **An Analitical Formula for Restoration of the Wave Phase from the Light Field intensity.**

The formula is derived in the paper, which relates the phase profile of a two-dimensional light field to its intensity distribution. The derivation of the formula has been done for the case of monochromatic coherent light beam based on the use of Radon transform of the generalized functions.