

П.А. Бакут, И.А. Рожков, А.Д. Ряхин

ОЦЕНКА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЕШЕНИЯ ПАССИВНЫХ МЕТОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЧЕРЕЗ ТУРБУЛЕНТНУЮ АТМОСФЕРУ II. СПЕКЛ-ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ В СИНТЕЗИРОВАННЫХ ТЕЛЕСКОПАХ

Уточняется статистическая модель искаженного атмосферой пространственного спектра короткоэкспозиционного изображения. Для объектов, размеры которых существенно меньше атмосферного предела разрешения, выводится более строгая зависимость предельного разрешения от условий наблюдения в случае использования безызбыточного синтезированного телескопа. При типичных значениях параметров осуществляется количественная оценка разрешения.

В предыдущей статье [1] рассматривалась классическая спекл-интерферометрия (СИ), предназначенная для формирования изображений в традиционных телескопах со сплошной апертурой. В частности, было показано, что при наблюдении по отраженному солнечному излучению малоразмерных объектов достижимо разрешение до $2 \cdot 10^{-8}$ рад, что соответствует диаметру апертуры $D = 25$ м. Однако в данном анализе использовалась статистическая модель короткоэкспозиционных изображений (КИ), основанная на так называемом законе «5/3» для структурной функции атмосферных искажений [2]. Как известно, этот закон справедлив только в случае $D < L_a$ где L_a — внешний масштаб турбулентности, т.к. при $D \lesssim L_a$ структурная функция насыщается [3]. С этой точки зрения значение L_a равно примерно 10 м [4].

Уровень современной технологии определяет предельный диаметр сплошных зеркал телескопов, равный 10 м [5]. Разрабатываемые в настоящее время квазисплошные зеркала, состоящие из множества отдельных сегментов, из-за сложности управления с точностью до длины волны реально имеют тот же предельный размер [6]. В связи с этим единственный путь достижения на практике разрешения до 10^{-8} рад и выше заключается в использовании многоапертурных синтезированных телескопов (МСТ), состоящих из нескольких разнесенных приемных зеркал (субапертур) умеренного размера. Работая в режиме когерентного сложения световых пучков от субапертур, МСТ обеспечивают возможность получения разрешения, соответствующего максимальному расстоянию разноса. Сейчас в стадии практической реализации находится несколько проектов МСТ, в том числе система VLT с базой 104 м [7]. МСТ характеризуются слабым заполнением синтезируемой апертуры, причем наиболее перспективными с точки зрения формирования изображений с максимальным разрешением являются малоизбыточные МСТ, в которых расстояния между субапертурами большей частью не повторяются. Хорошо известно, что дифракционные функции отклика сильно разреженных апертур имеют сложные распределения с множеством интерференционных максимумов [8, 9], а их искаженные атмосферой случайные реализации заметно отличаются от обычных КИ [10]. Все эти особенности в совокупности обусловливают необходимость уточнения результатов ранее проведенного анализа. Для этого перенесем анализ в область пространственных частот.

Математически эквивалентным описанию КИ через его распределение интенсивности $J(\Theta)$ является описание через пространственный спектр (ПС) $\tilde{J}(f)$, определяемый Фурье-преобразованием вида

$$\tilde{J}(f) = \int d\Theta J(\Theta) \exp\{2\pi i f \Theta\}. \quad (1)$$

В предположении изопланатичности системы «атмосфера—телескоп» (САТ) для ПС справедливо представление

$$\tilde{J}(f) = E \cdot O(f) \cdot H_0(f), \quad (2)$$

где $E = \int d\Theta J(\Theta)$ — энергия КИ; $O(f)$ — подлежащий оцениванию ПС искомого изображения объекта ($O(0) = 1$),

$$H_0(f) = \frac{1}{T \cdot S_{\text{ап}} \cdot \Delta\lambda} \cdot \int_0^T dt \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda/2}^{\lambda_0 + \Delta\lambda/2} d\lambda \cdot H(\lambda, t, f) \quad (3)$$

— оптическая передаточная функция (ОПФ) САТ, а

$$H(\lambda, t, f) = \int d\mathbf{v} W(\mathbf{v}) W(\mathbf{v} - \lambda f) \cdot \exp \{i [\varphi(\lambda, t, \mathbf{v}) - \varphi(\lambda, t, \mathbf{v} - \lambda f)]\} \quad (4)$$

— „мгновенная“ ОПФ. Здесь T и $\Delta\lambda$ — временной и спектральный интервалы при регистрации КИ; λ_0 — средняя длина волны; $S_{\text{ап}}$ — суммарная площадь приемной апертуры, $W(\mathbf{v})$ — функция апертуры, равная единице в ее пределах и нулю вне ее, а $\varphi(\lambda, t, \mathbf{v})$ — реализация атмосферных фазовых искажений в точке \mathbf{v} апертуры в момент времени t на длине волны λ .

Сущность обработки в СИ сводится к формированию по ПСМ зарегистрированных КИ оценок корреляционных функций вида

$$\langle \tilde{J}(f) \tilde{J}^*(f + \Delta f) \rangle = E^2 \cdot O(f) \cdot O^*(f + \Delta f) \cdot \langle H(f) H(f + \Delta f) \rangle. \quad (5)$$

Последующее восстановление по ним ПС $O(f)$ распадается на различные по реализации, но имеющие сравнимую результирующую точность подзадачи восстановления модуля и фазы [11, 12]. Далее для простоты сосредоточим основное внимание на первой подзадаче. Ее решение заключается в нормировке оценки среднего квадрата модуля

$$\langle |\tilde{J}(f)|^2 \rangle = |O(f)|^2 \cdot \langle |H(f)|^2 \rangle \quad (6)$$

на независимо измеряемую или рассчитываемую передаточную функцию $\langle |H(f)|^2 \rangle$. Точность решения естественно характеризовать отношением Q истинного значения квадрата $|O(f)|^2$ к средней величине ошибки его оценки. Как отмечалось в [1], при определении потенциального разрешения в качестве основного источника ошибок необходимо учитывать только квантовые шумы регистрации. При этом, с одной стороны, если средняя площадь S_J области корреляции ПС $\tilde{J}(f)$ заметно больше аналогичной площади S_p ПС $N(f)$ шумов регистрации, то перед усреднением (6) целесообразно предварительное сглаживание $\tilde{J}(f)$ по их областям корреляции, что повышает точность Q в S_J/S_p раз. С другой стороны, если площадь S_0 области корреляции ПС $O(f)$ заметно больше S_J , то целесообразно сглаживание уже оценки $|O(f)|^2$, что повышает точность в $\sqrt{S_0/S_J}$ раз. Учитывая статистическую независимость M реализаций шумов регистрации и обозначая их дисперсию $\langle |N(f)|^2 \rangle$ как σ_p^2 , а также принимая во внимание очевидное неравенство $S_p \leq S_J \leq S_0$, для отношения Q получаем следующее общее выражение:

$$Q(f) = \sqrt{M} \cdot \frac{E^2 \cdot \sqrt{S_0 \cdot S_J}}{\sigma_p^2 \cdot S_p} \cdot |O(f)|^2 \cdot \langle |H(f)|^2 \rangle. \quad (7)$$

На его основании определим предельное разрешение Q_p как величину, обратную максимальной частоте f_p , на которой $Q(f_p) \geq 5$. Для этого раскроем отдельные множители из (7).

Рассматривая модельный объект в форме квадрата со стороной Θ_0 при постоянном распределении интенсивности отражаемого излучения, для его ПС имеем

$$O(f) = \text{sinc}(\pi \cdot f_x \cdot \Theta_0) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_y \cdot \Theta_0), \quad (8)$$

где f_x и f_y — координаты вектора f . Несложно убедиться, что наиболее «весомыми» оказываются значения спектра в приосевых областях частот, где либо $f_x \approx f$, либо $f_y \approx f$. В результате получаем, что на представляющих основной интерес частотах при $f > \Theta_0^{-1}$ справедливо асимптотическое выражение вида

$$|O(f)|^2 \approx \frac{1}{2 \cdot (\pi \cdot f \cdot \Theta_0)^2}, \quad (9)$$

а области корреляции ПС $O(f)$ имеют вид эллипсов с осями $1/2\Theta_0$ и $1/\Theta_0$ и площадью $S_0 = \pi / (8\Theta_0^2)$.

Для корреляционной функции ПС шумов регистрации несложно получить приближение вида

$$\langle N(f) N^*(f + \Delta f) \rangle = \int d\Theta \langle J(\Theta) \rangle \exp \{2\pi i \Delta f \Theta\}, \quad (10)$$

из которого, в частности, следует, что дисперсия σ_p^2 равна энергии E , а площадь S_p области корреля-

ции есть обратная величина от угловой площади КИ. Общая энергия E КИ, определяемая через среднее число зарегистрированных фотонов, выражается как

$$E = \rho_0 \cdot \Delta\lambda \cdot T \cdot S_{\text{ап}} \cdot \Theta_0^{\frac{2}{3}} \cdot \xi \cdot \eta, \quad (11)$$

где ξ — коэффициент пропускания оптики МСТ; η — квантовая эффективность регистратора, а ρ_0 — число фотонов принимаемого от объекта светового излучения с единицы телесного угла за единицу времени на единицу площади апертуры при единичной ширине спектрального диапазона. Угловая площадь КИ оценивается как $(\Theta_0 + 4\lambda_0/\pi \cdot r_{\text{эфф}})^2$, где $4\lambda_0/\pi \cdot r_{\text{эфф}}$ характеризует угловой размер функции отклика САТ. Параметр $r_{\text{эфф}}$ аналогично параметру Фрида r_0 [13] определяет средний эффективный размер области корреляции атмосферных искажений поля в плоскости апертуры МСТ, но в отличие от r_0 учитывает конечность диаметра D_t субапертур телескопа и влияние компенсации на отдельных субапертурах обусловленных атмосферой случайных наклонов волнового фронта. Если для r_0 справедливо равенство вида [2]

$$\frac{\pi \cdot r_0^2}{4} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \cdot \langle \exp \{i[\varphi(\mathbf{v}_1) - \varphi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v})]\} \rangle, \quad (12)$$

то для $r_{\text{эфф}}$ — равенство вида

$$\begin{aligned} \frac{\pi \cdot r_{\text{эфф}}^2}{4} &= \frac{1}{S_{\text{ап}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \cdot W(\mathbf{v}_1) W(\mathbf{v}_2) \cdot \langle \exp \{i[\psi(\mathbf{v}_1) - \psi(\mathbf{v}_2)]\} \rangle = \\ &= \int d\mathbf{v} \cdot B(\mathbf{v}) \cdot \langle \exp \{i[\psi(\mathbf{v}_1) - \psi(\mathbf{v}_2)]\} \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\psi(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}) - \mathbf{d}\mathbf{v}$ описывает фазовые искажения при скомпенсированном наклоне \mathbf{d} (вектор \mathbf{d} свой для каждой субапертуры), а весовая функция

$$B(\mathbf{v}) = \frac{1}{S_{\text{ап}}} \cdot \int d\mathbf{v}_1 \cdot W(\mathbf{v}_1) W(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \quad (14)$$

определяет частоту появления разностного вектора \mathbf{v} между точками апертуры. Следующая из (13) зависимость $r_{\text{эфф}}$ от D_t и r_0 в случае заметно разнесенных субапертур (когда искажения на них практически независимы) отражена на рис. 1 и 2. Видно, что при малых D_t/r_0 $r_{\text{эфф}}$ совпадает с D_t , а при больших — с r_0 . В промежуточном интервале $r_{\text{эфф}}$ вначале монотонно возрастает, достигает максимума при $D_t/r_0 = 3,8$ ($r_{\text{эфф}} = 1,9 \cdot r_0 = 0,5 \cdot D_t$), а затем монотонно убывает в соответствии с приближенной зависимостью

$$r_{\text{эфф}} = r_0 \cdot (1 + 1,43 \cdot \sqrt{r_0/D_t}). \quad (15)$$

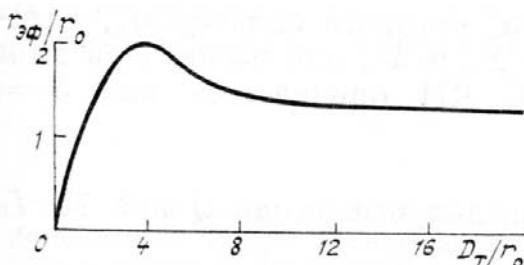


Рис. 1. Зависимость отношения $r_{\text{эфф}}/r_0$ от отношения D_t/r_0

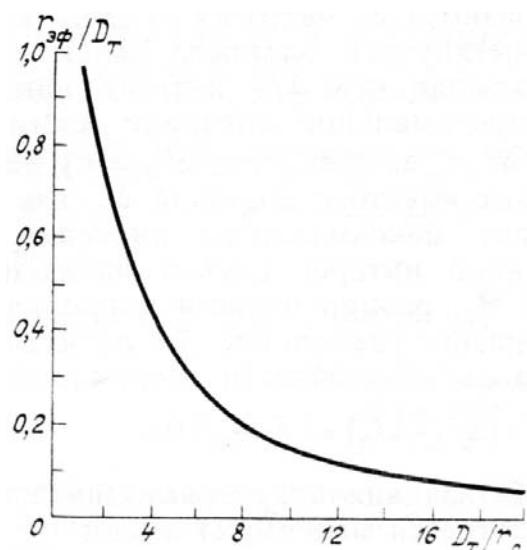


Рис. 2. Зависимость отношения $r_{\text{эфф}}/D_t$ от отношения D_t/r_0

Что касается характеристик ОПФ, то в соответствии с методикой, использованной в [2, 14, 15], получаем приближение вида

$$\begin{aligned} < H(\lambda_1, t_1, \mathbf{f}_1) H^*(\lambda_2, t_2, \mathbf{f}_2) > = 0,34 \cdot \frac{r_{\text{оф}}^2}{S_{\text{ан}}} \cdot B(\lambda \cdot \mathbf{f}) \cdot \exp \left\{ -\pi \left(\frac{t_1 - t_2}{T_k} \right)^2 \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_0} \right)^2 \cdot D_a(\lambda_1 \mathbf{f}_1) \right\} \cdot \exp \left\{ -1,72 \cdot \left(\frac{|\lambda_1 \mathbf{f}_1 - \lambda_2 \mathbf{f}_2|}{r_{\text{оф}}} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $D_a(v) = \langle [\phi(v_1) - \phi(v_1 + v)]^2 \rangle$ — структурная функция атмосферных фазовых искажений; T_k — временной интервал корреляции КИ, а функция $B(\lambda \cdot \mathbf{f})$ имеет смысл ОПФ МСТ. Здесь первый экспоненциальный множитель описывает уменьшение степени корреляции мгновенных ОПФ из-за временного рассогласования, второй отражает среднее влияние обусловленной атмосферой разности хода между точками субапертур, разнесенными на вектор $\lambda \mathbf{f}$, а третий учитывает конечность пространственной области корреляции фазовых искажений. Принимая во внимание, что с точки зрения ограничения спектрального диапазона третий множитель превалирует над вторым, после интегрирования по t и λ получаем, что дисперсия ОПФ (3) равна

$$< |H(f)|^2 > \approx 0,34 \frac{r_{\text{оф}}^2}{S_{\text{ан}}} \cdot B(\lambda_0 \mathbf{f}) \cdot \frac{T_k}{T + T_k} \cdot \frac{\Delta \lambda_k}{\Delta \lambda + \Delta \lambda_k}, \quad (17)$$

а ее корреляционная функция аппроксимируется как

$$\begin{aligned} < H(f) H^*(f + \Delta f) > = < |H(f)|^2 > \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta f}{f} \right)^2 D_a(\lambda f) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -1,72 \left(\frac{|\Delta f_2|}{r_{\text{оф}}} \right)^2 \right\} \cdot Y(f, \Delta f_1, \lambda, \Delta \lambda), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Delta \lambda_k = r_{\text{оф}} \mathbf{f}$ — спектральный интервал корреляции; Δf_1 — величина проекции $\Delta \mathbf{f}$ на вектор \mathbf{f} ; Δf_2 — величина проекции $\Delta \mathbf{f}$ на перпендикулярное \mathbf{f} направление, а функция Y задается условием вида

$$Y(f, \Delta f_1, \lambda, \Delta \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\Delta f_1| \leq \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \cdot f + \frac{r_{\text{оф}}}{\lambda}; \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (19)$$

Анализируя эти выражения, убеждаемся, что область корреляции ОПФ имеет вид эллипса, оси которого ориентированы вдоль и перпендикулярно вектору \mathbf{f} , причем величина первой оси Δf_{\parallel} задается соотношением

$$\Delta f_{\parallel} = \min \left\{ \Delta f_3, \frac{\Delta \lambda + \Delta \lambda_k}{\lambda} \cdot f \right\}, \quad (20)$$

где $\Delta f_3 = \sqrt{2\pi f / D_a(\lambda f)}$, а вторая ось Δf_{\perp} равна $r_{\text{оф}}/\lambda$. При $\lambda f \ll L_a$, когда $D_a(\lambda f) = 6,88 \cdot (\lambda f / r_0)^{5/3}$ [13], $\Delta f_3 \approx r_0/\lambda$, а при $\lambda f \gtrsim L_a$ $\Delta f_3 = \sqrt{2\pi f / D_a(\infty)}$. По оценкам [3] $D_a(\infty)$ на $\lambda_0 = 0,6$ мкм составляет $6 \cdot 10^2$ рад², так что $\sqrt{2\pi / D_a(\infty)} \approx 0,1$. Таким образом, если для обычных телескопов при $D_t \ll L_a$ область корреляции ОПФ фактически ограничена кругом диаметра r_0/λ , то в МСТ с большими расстояниями разноса на частотах $\lambda f \gtrsim L_a$ эта область приобретает форму сильно вытянутого эллипса, малая ось которого $\Delta f_{\perp} = r_{\text{оф}}/\lambda$ постоянна, а большая ось Δf_{\parallel} зависит как от ширины $\Delta \lambda$, так и от частоты f . Ее максимальное значение достигается при $\Delta \lambda \ll \Delta \lambda_k$ и равно $r_{\text{оф}}/\lambda$, при $\Delta \lambda_k \leq \Delta \lambda \leq \Delta \lambda_3$, где $\Delta \lambda_3 = \lambda \sqrt{2\pi / D_a(\infty)} \approx 0,1 \cdot \lambda$, ее значение возрастает вместе с шириной $\Delta \lambda$ как $\Delta \lambda \cdot f / \lambda$, и наконец, при $\Delta \lambda \geq \Delta \lambda_3$ достигает максимального значения $\Delta f_3 \gg \Delta f_{\perp}$. Для представляющего основной интерес случая наблюдения малоразмерного объекта $\Theta_0 \leq 10 \cdot \Theta_p$, размер области корреляции ПС которого больше Δf_3 , целесообразно увеличение $\Delta \lambda$ до значения $\Delta \lambda_3 \gg \Delta \lambda_k$ или выше. При этом площадь S_J области корреляции ПС КИ оценивается как $S_J = \frac{\pi}{4} \cdot (\Delta f_{\perp} \cdot \Delta f_3) = f \cdot r_{\text{оф}} / 10\lambda$.

Объединяя полученные зависимости, для отношения Q при $T \gg T_k$ (достигается максимум) имеем

$$Q = 5,10^{-3} \sqrt{M \cdot T_k \cdot \rho_0 \cdot \xi \cdot \eta \cdot B(\lambda \cdot f)} \cdot \left(\frac{\lambda_0 \cdot r_{\text{эф}}}{f} \right)^{3/2} / (\Theta_0 \cdot f), \quad (21)$$

где ОПФ $B(\lambda \cdot f)$ для безызбыточного МСТ из N_t субапертур оценивается как

$$B(\lambda \cdot f) = 1/N_t, \quad (22)$$

для традиционного телескопа со сплошной (или квазисплошной) апертурой диаметра D как

$$B(\lambda \cdot f) \approx 1 - f/f_g, \quad (23)$$

где $f_g = D/\lambda$ — частота отсечки. Отметим, что для МСТ размер D_t субапертур обычно существенно меньше их максимального расстояния разноса L . Для определенности будем считать $D_t = 10 \cdot r_0$ и, как следствие, $r_{\text{эф}} = 1,6 \cdot r_0$. В то же время у сплошного телескопа предельного разрешения $D \gg r_0$ и $r_{\text{эф}} = r_0$.

Подставляя в (21) типичные значения $\rho_0 = 2 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{ср}^{-1}$, $T_k = 10^{-2} \text{ с}$, $\xi = 0,5$, $\eta = 0,2$, $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $r_0 = 0,1 \text{ м}$ и считая $Q = 5$, для МСТ при $N_t = 6$ получаем зависимость для предельного разрешения Θ_p в виде

$$\Theta_p = (10^{-6}/M^{1/3}) \text{ рад.} \quad (24)$$

Из (24) следует, что при $M = 10^3$, $\Theta_p = 10^{-7} \text{ рад}$, а при $M = 10^5$ $\Theta_p \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ рад}$. В то же время разрешение Θ_p традиционного телескопа при $f_p = (5/6) \cdot f_g$ определяется как

$$\Theta_p = (1,6 \cdot 10^{-6}/M^{1/3}) \text{ рад.}$$

что при $M = 10^3$ дает $1,6 \cdot 10^{-7} \text{ рад}$, а при $M = 10^5 - 3 \cdot 10^{-8} \text{ рад}$.

Таким образом, в результате проведенного более строго, чем предыдущий, анализа получено новое выражение для предельного разрешения, отличающееся, в частности, более сильной зависимостью от числа зарегистрированных изображений.

1. Бакут П. А., Рожков И. А., Ряхин А. Д. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 4. С. 354–397.
2. Бакут П. А., Ряхин А. Д., Свиридов К. Н. и др. //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 3. С. 274.
3. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1978. 463 с.
4. Roddier C., Roddier F. //JOSA. 1973. V. 63. P. 661.
5. Angel R. Sky & Telescope. 1985. V. 70. № 1. P. 10.
6. Mast T., Nelson J. //Proc. of SPIE. 1985. V. 571. P. 226.
7. Merkle F. //JOSA. 1988. V. 5. P. 904.
8. Meinel A. B., Meinel M. P., Wolf N. J. In: Applied Optics and Optical Engineering. New York: Academic, 1982. P. 149.
9. Димов И. А., Ковтуненко М. В., Легкодым А. В. и др. //Изв. Крымской астрофизической обсерватории. 1988. Т. IXXVIII. С. 206.
10. Бакут П. А., Плотников И. П., Рожков И. А. и др. //Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 11. С. 55–61.
11. Бакут П. А., Ряхин А. Д., Свиридов К. Н. //Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. С. 1446.
12. Бакут П. А., Плотников И. П., Ряхин А. Д. и др. //Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 6. С. 116–118.
13. Fried D. L. //JOSA. 1966. V. 56. P. 1372.
14. Korf D. //JOSA. 1973. V. 63. P. 971.
15. Aime C., Kadiri S., Ricord G. e. a. //Opt. Acta. 1979. V. 26. P. 575.

Поступила в редакцию
9 октября 1989 г.

P. A. Bakut, I. A. Rozhkov, A. D. Ryakhin. Estimation of Potential Resolution in Images Formed by Passive Methods through Turbulent Atmosphere II. Speckle-Interferometry in Synthesized Telescopes.

Improved statistical model of spatial spectrum of short exposure image disturbed by the atmosphere is suggested. For the small size objects strict dependence of the resolution on the observation conditions is determined for the case of non-redundant synthesized telescope. Quantitative estimations of resolution are obtained for typical values of the parameters.