«Оптика атмосферы и океана», **18**, № 1–2 (2005)

УДК 621.396.965.8

Г.Л. Дегтярев, А.В. Маханько, С.М. Чернявский, А.С. Чернявский

Восстановление мод волнового фронта по изображению

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию 26.08.2004 г.

Предложен метод восстановления мод волнового фронта, воспроизводимых адаптивной оптической системой, по вариациям изображения. В проекционных методах решения фазовой задачи вводится векторное представление задачи нахождения общей точки m множеств, позволяющее применять для ее решения известные методы при $m = 2$.

1. Восстановление мод волнового фронта по вариациям изображения точечного источника

1.1. Пусть в оптической системе амплитудные и фазовые искажения волнового фронта (ВФ) на выходном зрачке Ω описываются функцией зрачка

$$G(\bar\rho) = A(\bar\rho)\exp[ik\Phi(\bar\rho)],$$

где $\bar\rho = (\xi,\eta)$; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Предполагается, что оптическая система – адаптивная, ее адаптивный элемент, рассматриваемый как линейная система, может изменять ВФ, поэтому реальные искажения ВФ можно представить в виде $\Phi = \varphi + \Delta\Phi$. Здесь φ определяет составляющую искажения ВФ, которую адаптивный элемент может скомпенсировать, а $\Delta\Phi$ – остаточное искажение, не изменяемое адаптивным элементом. Предполагается, что функция φ – это элемент конечномерного пространства, базисом которого являются отклики приводов $\{\Psi_k\}$, $k = \overline{1,N}$. Пробные вариации ВФ адаптивным элементом приводят к вариации интенсивности в изображении. Задача состоит в том, чтобы по этим вариациям определить и компенсировать составляющую φ. Данный подход управления адаптивным элементом называется методом апертурного зондирования и может быть реализован двумя способами. В первом задается функция резкости изображения и адаптивная система работает по принципу «восхождения на холм» [1]. При втором способе отыскиваются коэффициенты разложения неизвестной функции $\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k\Psi_k$. Такой подход реализован в [2] на основе вариации моментов 2-го порядка интенсивности в изображении и допущении, что амплитуда на зрачке известна и базисные функции – линейно независимые в пространстве со скалярным произведением

$$\left(\Psi_i,\Psi_j\right) = \iint A^2\Psi_i'\,\Psi_j'\,d\bar\rho, \qquad (1)$$

где Ψ' – вектор частных производных.

В данном разделе обсуждается возможность реализации этого подхода на основе анализа вариации косинуса-преобразования Фурье как для случая известной, так и неизвестной амплитуды на зрачке.

1.2. Косинус-преобразование Фурье от распределения интенсивности I в фокальной плоскости на пространственной частоте $\bar\rho/\lambda f$ (f – фокусное расстояние) имеет с точностью до несущественного множителя вид [3]:

$$F_c\left(I,\bar\rho/\lambda f,\Phi\right) = \int\int_{-\infty}^{\infty}(A+\Delta A)A\cos\left(k\Delta\Phi\right)d\bar\rho',$$

где

$$A = A(\bar\rho');\, A+\Delta A = A(\bar\rho+\bar\rho');\, \Delta\Phi = \Phi(\bar\rho+\bar\rho') - \Phi(\bar\rho').$$

Далее будут рассматриваться малые по величине пространственные частоты в виде $\bar\rho/\lambda f = \bar e v/\lambda f$, где $\bar e = \cos\theta\bar i + \sin\theta\bar j$ – орт частоты, а $v > 0$ – малая величина. Множитель $1/\lambda f$ в выражении частоты будет опускаться.

Изменим ВФ с помощью адаптивного элемента на величину $\alpha\Psi$ и осуществим измерение первой и второй вариаций косинуса-преобразования Фурье:

$$\delta F_c\left(I,\bar\rho,\Phi,\Psi\right) = \frac{dF_c\left(I,\bar\rho,\Phi+\alpha\Psi\right)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= -k\int\int_{-\infty}^{\infty}(A+\Delta A)A\sin\left(k\Delta\Phi\right)\Delta\Psi d\bar\rho';$$

$$\delta^2 F_c\left(I,\bar\rho,\Phi,\Psi\right) = \frac{d^2F_c\left(I,\bar\rho,\Phi+\alpha\Psi\right)}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= -k^2\int\int_{-\infty}^{\infty}(A+\Delta A)A\cos\left(k\Delta\Phi\right)\left(\Delta\Psi\right)^2 d\bar\rho'.$$

Рассмотрим предел

$$\gamma_1(\Psi) = \lim_{v\to 0}\int_0^{2\pi}\delta F_c\left(I,\bar e v,\Phi,\Psi\right)d\theta\Big/\int_0^{2\pi}\delta^2 F_c\left(I,\bar e v,\Phi,\Psi\right)d\theta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial e}\frac{\partial \Psi}{\partial e} d\theta d\bar{\rho}' \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial e}\right)^2 d\theta d\bar{\rho}' =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \Phi'\Psi' d\bar{\rho}' \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 (\Psi')^2 d\bar{\rho}' = \frac{(\Phi,\Psi)}{\|\Psi\|^2},$$

где $\partial/\partial e$ — символ производной по направлению орта $\bar{e}$.

Если амплитуда на зрачке известна, то отклики приводов можно ортонормировать в соответствии со скалярным произведением (1) и тогда предел $\gamma_1(\Psi_k) = (\Phi,\Psi_k)$ является коэффициентом Фурье функции Φ в этом базисе и

$$\Phi = \sum \gamma_1(\Psi_k)\Psi_k + \Delta\Phi .$$

Если амплитуда на зрачке неизвестна, то требуются дополнительные измерения и более сложная обработка. В качестве дополнительного измерения возьмем вторую смешанную вариацию

$$\delta^2 F_c(I,\bar{\rho},\Phi,\Psi,\chi) = \frac{\partial^2 F_c(I,\bar{\rho},\Phi+\alpha\Psi+\beta\chi)}{\partial\alpha\partial\beta}\Big|_{\alpha=\beta=0} =$$

$$= -k^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int (A+\Delta A) A \cos(k\Delta\Phi)(\Delta\Psi)(\Delta\chi) d\bar{\rho}'$$

и рассмотрим два предела:

$$\gamma_2(\Psi,\chi) = \lim_{v\to 0} \int\limits_0^{2\pi} \delta^2 F_c(I,\bar{e}v,\Phi,\Psi) d\theta \Big/ \int\limits_0^{2\pi} \delta^2 F_c(I,\bar{e}v,\Phi,\chi) d\theta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial e}\right)^2 d\theta d\bar{\rho}' \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial e}\right)^2 d\theta d\bar{\rho}' =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 (\Psi')^2 d\bar{\rho}' \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 (\chi')^2 d\bar{\rho}' = \frac{\|\Psi\|^2}{\|\chi\|^2}$$

и

$$\gamma_3(\Psi,\chi) = \lim_{v\to 0} \int\limits_0^{2\pi} \delta^2 F_c(I,\bar{e}v,\Phi,\Psi,\chi) d\theta \Big/$$

$$\Big/ \left(\int\limits_0^{2\pi} \delta^2 F_c(I,\bar{e}v,\Phi,\Psi) d\theta\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} \delta^2 F_c(I,\bar{e}v,\Phi,\chi) d\theta\right)^{1/2} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial e}\frac{\partial \chi}{\partial e} d\theta d\bar{\rho}' \Big/$$

$$\Big/ \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial e}\right)^2 d\theta d\bar{\rho}'\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial e}\right)^2 d\theta d\bar{\rho}'\right)^{1/2} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \Psi'\chi' d\bar{\rho}' \Big/ \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 (\Psi')^2 d\bar{\rho}'\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 (\chi')^2 d\bar{\rho}'\right)^{1/2} = \frac{(\Psi,\chi)}{\|\Psi\|\|\chi\|}.$$

Функцию φ будем искать из условия минимума невязки

$$\left\|\Phi - \sum c_k \Psi_k\right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A^2 \left(\Phi' - \sum_{k=1}^{N} c_k \Psi'_k\right)^2 d\bar{\rho}'$$

относительно коэффициентов разложения. Необходимое условие экстремума приводит к системе линейных уравнений

$$\sum c_k (\Psi_k, \Psi_j) = (\Phi, \Psi_j), \quad j = \overline{1,N},$$

представимой в виде

$$\sum c_k \frac{(\Psi_k,\Psi_j)}{\|\Psi_k\|\|\Psi_j\|} \frac{\|\Psi_k\|}{\|\Psi_j\|} = \frac{(\Phi,\Psi_j)}{\|\Psi_j\|^2}, \quad j = \overline{1,N}$$

или

$$\sum c_k \gamma_3(\Psi_k,\Psi_j)\gamma_2^{1/2}(\Psi_k,\Psi_j) = \gamma_1(\Psi_j). \qquad (2)$$

Система (2) — невырожденная, так как по условию базис приводов — линейно независимый в пространстве со скалярным произведением (1), поэтому она имеет единственное решение.

2. Метод увеличения размерности и проекционные методы решения фазовой проблемы

2.1. Многие обратные задачи оптики могут быть сформулированы как геометрическая задача нахождения общей точки заданных замкнутых множеств

$$x \in \bigcap_{s=1}^{m} V_s, \qquad (3)$$

где множествами V_s задаются априорные свойства решения, результаты и условия измерений. Начиная с работы Л.М. Брэгмана [4] и работы Л.Г. Гурина и его соавторов [5] положено начало решения задачи (3) итерационными методами в бесконечномерных пространствах. В основе методов лежит свойство проекции $P_s x$ точки x на множество V_s. В задачах оптики эти методы нашли широкое применение, начиная с работ [6] Гершберга–Закстона, Д. Юлы, А. Леви и Г. Старка и др. Наиболее полные теоретические результаты получены для случая выпуклых множеств комплексного гильбертова пространства H и итерационного алгоритма чередующегося проектирования

$$x_{n+1} = T_1 T_2 \ldots T_m x_n = T x_n, \qquad (4)$$

стартующего из начальной произвольной точки $x_0 \in H$, где

$$T_s x = x + \lambda_s (P_s x - x) = \left[I + \lambda_s (P_s - I) \right] x.$$

Параметры метода $\lambda_s \in (0,2)$ называются параметрами релаксации. Алгоритм (4) прост в реализации и гарантирует слабую сходимость. В фазовых задачах множества не являются выпуклыми, поэтому сходимость алгоритма (4) для этих задач не гарантируется.

Опыт применения алгоритма (4) показал [5, 6], что в ряде случаев алгоритм сходится очень медленно, поэтому нуждается в модификации.

Рассмотрим два подхода модификации алгоритма (4). Первый, предложенный А. Леви и Г. Старком [6], состоит в том, что параметры релаксации выбираются так, чтобы последовательность алгоритма (4) была еще и минимизирующей для некоторого критерия $J(x)$, являющегося мерой близости точки x к множествам V_s. При этом появляется возможность оптимизировать параметры релаксации из условия наискорейшего спуска к минимуму критерия. Реализовать свой подход авторы смогли для случая двух множеств ($m = 2$), установив, что для критерия

$$J(x) = \| P_1 x - x \| + \| P_2 x - x \| \qquad (5)$$

последовательность алгоритма (4) является минимизирующей, если параметры релаксации удовлетворяют соответствующим неравенствам, приведенным в [6]. Если $m > 2$, то авторы подхода предлагают пересечение множеств в (3) свести к пересечению двух комбинированных множеств, объединяющих несколько свойств решения обратной задачи. Естественно, это ведет к усложнению определения проекции на комбинированные множества и, следовательно, к усложнению итерационного алгоритма.

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с этим подходом. Если последовательность (4) является минимизирующей, то она является одной из возможных минимизирующих последовательностей для критерия (5). Поэтому можно изменить и вид минимизирующей последовательности из условия наискорейшего спуска.

Второй подход ускорения сходимости последовательности алгоритма (4) предложен Л.Г. Гуриным и его соавторами в [5] тоже для двух множеств, но выпуклых. В их подходе, начиная с x_0, последующие приближения находятся так. На каждом шаге итерации вычисляются три проекции $y_1 = P_1 x_n$, $y_2 = P_2 y_1$, $y_3 = P_1 y_2$ и по ним задается приближение $x_{n+1} = y_1 + \lambda(y_3 - y_1)$. Точки y_1 и y_3 принадлежат множеству V_1 и задают луч $x = y_1 + \lambda(y_3 - y_1)$. Точка y_2 и вектор $y_1 - y_2$ задают гиперплоскость, строго разделяющую множество V_2 и точку y_3, если $y_3 \notin V_1 \cap V_2$. Параметр λ находится из условия пересечения луча с гиперплоскостью:

$$\mathrm{Re}(y_1 + \lambda(y_3 - y_1) - y_2, y_1 - y_2) = 0.$$

Точка пересечения принимается за x_{n+1}.

Примечательно, что в этом подходе делается небольшой отход от регулярного алгоритма (4) выбора очередного приближения в пользу ускорения сходимости. В случае $m > 2$ указанные авторы предлагают комбинированный алгоритм. Последовательные приближения находить по схеме (4), но время от времени делать «ускоряющие» шаги для различных пар множеств.

Рассмотренные два подхода ускорения сходимости алгоритма (4) обоснованы только для $m = 2$. При $m > 2$ их применение усложняет алгоритм. Ограничение подобного рода можно преодолеть, если применить метод увеличения размерности [7].

2.2. Метод увеличения размерности. Рассмотрим прямое произведение

$$\bar{H} = \prod_{s=1}^{m-1} H_s, \;\; H_s = H$$

и в нем два множества:

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{m-1}) : x_1 = \ldots = x_{m-1} \in V_1 \right\},$$

$$\bar{V}_2 = \left\{ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{m-1}) : x_s \in V_{s+1} \right\}.$$

Тогда задача (3) эквивалентна задаче нахождения точки $\bar{x} \in \bar{H}$ из условия

$$\bar{x} \in \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2. \qquad (6)$$

На $\bar{H}$ зададим скалярное произведение

$$(\bar{x}, \bar{y})_{\bar{H}} = \sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s (x_s, y_s)_H, \;\; \alpha_s > 0, \;\; \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1} = 1.$$

Проекционный оператор на множество $\bar{V}_1$ определяется условием

$$\left\| \bar{x} - P_{\bar{V}_1} \bar{x} \right\| = \min_{\bar{y} \in \bar{V}_1} \| \bar{x} - \bar{y} \| = \min_{y \in V_1} \left(\sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s \| x_s - y \|^2 \right)^{1/2}.$$

Так как

$$\sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s \| x_s - y \|^2 = \sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s \| x_s \|^2 - \left\| \sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s x_s \right\|^2 + \left\| \sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s x_s - y \right\|^2,$$

то

$$P_{\bar{V}_1} \bar{x} = (y, \ldots, y),$$

где

$$y = P_1 \sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s x_s.$$

Проекционный оператор на множество $\bar{V}_2$ определяется аналогично:

$$\left\| \bar{x} - P_{\bar{V}_2} \bar{x} \right\| = \min_{\bar{y} \in \bar{V}_2} \| \bar{x} - \bar{y} \| = \min_{y_s \in V_{s+1}} \left(\sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s \| x_s - y_s \|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s \left\| x_s - P_{V_{s+1}} x_s \right\|^2 \right)^{1/2},$$

поэтому

$$P_{\bar{V}_2} \bar{x} = (P_2 x_1, \dots, P_m x_{m-1}).$$

Переход от гильбертова пространства H к гильбертову пространству $\bar{H}$ на прямом произведении позволил исходную задачу (3) преобразовать в задачу (6) и применить рассмотренные два подхода модификации метода чередующего проектирования к решению задачи (6) и в конечном итоге к задаче (3).

Метод чередующего проектирования задачи (6) с оптимизацией параметров релаксации λ_1 и λ_2 по методу А. Леви и Г. Старка принимает вид

$$\bar{x}_{n+1}(\lambda_1,\lambda_2) = T_{\bar{V}_1}(\lambda_1) T_{\bar{V}_2}(\lambda_2) \bar{x}_n,$$

где λ_1 и λ_2 находятся на каждом шаге из условия

$$J\left(\bar{x}_{n+1}(\lambda_1,\lambda_2)\right) =$$

$$= \min_{\mu_1,\mu_2 \ge 0} \left(\left\| P_{\bar{V}_1} \bar{x}_{n+1}(\mu_1,\mu_2) - \bar{x}_{n+1}(\mu_1,\mu_2) \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| P_{\bar{V}_2} \bar{x}_{n+1}(\mu_1,\mu_2) - \bar{x}_{n+1}(\mu_1,\mu_2) \right\| \right).$$

Метод чередующегося проектирования задачи (6) с модификацией Л.Г. Гурина и его соавторов сводится на каждой итерации к нахождению трех проекций

$$\bar{y}_1 = P_{\bar{V}_1} \bar{x}_n,\ \ \bar{y}_2 = P_{\bar{V}_2} \bar{y}_1,\ \ \bar{y}_3 = P_{\bar{V}_1} \bar{y}_2$$

и очередного приближения

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{y}_1 + \lambda(\bar{y}_3 - \bar{y}_1),$$

где λ находится из условия

$$\mathrm{Re}\left(\bar{y}_1 + \lambda(\bar{y}_3 - \bar{y}_1) - \bar{y}_2,\ \bar{y}_1 - \bar{y}_2\right) = 0.$$

2.3. В методе А. Леви и Г. Старка сначала задается последовательность (4) с точностью до параметров релаксации, а затем находится мера близости точки к множествам пересечения, для которой эта последовательность может быть минимизирующей. В работе [7] рассмотрен альтернативный подход, в котором задается мера близости между точками-представителями множеств и по ней находится минимизирующая последовательность. Данный подход снимает ограничение на число множеств пересечения задачи (3), и вопрос сводится к нахождению быстро сходящейся минимизирующей последовательности.

Для задачи (3) рассмотрен функционал сближения [7]:

$$J(x, x_1, \dots, x_m) = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \|x - x_s\|^2,$$

где $x \in H$ и $x_s \in V_s$, $s = \overline{1,m}$. На решениях задачи (3) $x = x_1 = \ldots = x_m$ функционал сближения достигает минимума. В [7] дан метод построения минимизирующей последовательности функционала сближения. Запись этого метода в векторной форме позволит установить связь его с уже рассмотренными алгоритмами.

Пусть пространство

$$\bar{H} = \prod_{s=1}^{m} H_s,\ \ H_s = H$$

и в нем два множества:

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_m) : x_1 = \ldots = x_m \in H \right\}$$

и

$$\bar{V}_2 = \left\{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_m) : x_s \in V_s \right\},$$

для которых проекционные операторы соответственно равны

$$P_{\bar{V}_1} \bar{x} = (y_1, \dots, y_m),$$

где

$$y_s = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s x_s,\ \ s = \overline{1,m}\ \text{ и }\ P_{\bar{V}_2} \bar{x} = (P_1 x_1, \dots, P_m x_m).$$

В векторных переменных функционал сближения принимает вид

$$J(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_{\bar{H}}^2,\ \ \bar{x}_1 \in \bar{V}_1,\ \ \bar{x}_2 \in \bar{V}_2.$$

Функционал сближения равен квадрату расстояния между двумя точками из разных множеств. Величина

$$J(\bar{x}_1) = \min_{\bar{x}_2 \in \bar{V}_2} J(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = J\left(\bar{x}_1, P_{\bar{V}_2} \bar{x}_1\right)$$

является мерой близости точки $\bar{x}_1$ к множеству $\bar{V}_2$.

Метод покоординатной минимизации по переменным $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ приводит к алгоритму вида (4):

$$\bar{x}_{1\,n+1} = T_{\bar{V}_1} T_{\bar{V}_2} \bar{x}_{1\,n},\ \ \bar{x}_{2\,n} = T_{\bar{V}_2} \bar{x}_{1\,n},\ \ \bar{x}_{1\,0} \in \bar{V}_1, \quad (7)$$

поэтому нуждается в модификации. Для этого на каждой итерации вычисляются проекции

$$\bar{y}_1 = P_{\bar{V}_2} \bar{x}_{1\,n},\ \ \bar{y}_2 = P_{\bar{V}_1} \bar{y}_1,\ \ \bar{y}_3 = P_{\bar{V}_2} \bar{y}_2,\ \ \bar{y}_4 = \bar{P}_{\bar{V}_1} \bar{y}_3.$$

Фактически два раза выполняются итерации (7) с параметрами релаксации, равными единице. Полученные проекции задают луч $\bar{x}(\lambda) = \bar{y}_2 + \lambda(\bar{y}_4 - \bar{y}_2)$, содержащийся в $\bar{V}_1$, так как $\bar{V}_1$ — линейное множество, и гиперплоскость в $\bar{H}$

$$\mathrm{Re}(\bar{x} - \bar{y}_3,\ \bar{y}_3 - \bar{y}_2) = 0.$$

Если $\bar{y}_3 \notin \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2$, то по свойству проекций

$$\mathrm{Re}(\bar{x} - \bar{y}_3,\ \bar{y}_3 - \bar{y}_2) \geq 0,\ \forall \bar{x} \in \bar{V}_2$$

и

$$\mathrm{Re}(\bar{y}_2 - \bar{y}_3,\ \bar{y}_3 - \bar{y}_2) = -\|\bar{y}_2 - \bar{y}_3\|^2 < 0,$$

поэтому гиперплоскость разделяет множество $\bar{V}_2$ и точку $\bar{y}_2$. Точку луча подставим в уравнение гиперплоскости

$$\mathrm{Re}(\bar{y}_2 + \lambda(\bar{y}_4 - \bar{y}_2) - \bar{y}_3,\ \bar{y}_3 - \bar{y}_2) = 0.$$

По свойству проекции точки

$$\mathrm{Re}(\bar{y}_3 - \bar{y}_2,\ \bar{y}_4 - \bar{y}_2) \geq \|\bar{y}_2 - \bar{y}_4\|^2 > 0,$$

поэтому существует число

$$\Lambda = \|\bar{y}_3 - \bar{y}_2\|^2 / \mathrm{Re}(\bar{y}_3 - \bar{y}_2, \bar{y}_4 - \bar{y}_2) \geq$$
$$\geq \|\bar{y}_3 - \bar{y}_2\| / \|\bar{y}_4 - \bar{y}_2\| \geq 1,$$

при котором луч $\bar{x}(\lambda)$ в точке $\bar{x}(\Lambda)$ пересекает гиперплоскость.

Приближение $\bar{x}_{1n+1}$ будем искать в виде $\bar{x}_{1n+1} = \bar{x}(\lambda_*)$, где λ_* найдем из условия

$$J\left(\bar{x}(\lambda_*), P_{\bar{V}_2}\bar{x}(\lambda_*)\right) = \min_{\lambda \in [1,\Lambda]} J\left(\bar{x}(\lambda), P_{\bar{V}_2}\bar{x}(\lambda)\right).$$

Таким образом, метод работы [7] решения задачи (3) включает идеи методов работ [5,6] и применим для задачи на пересечение выпуклых множеств больше двух.

1. *Тараненко В.Г., Шанин О.И.* Адаптивная оптика. М.: Радио и связь, 1990. 110 с.
2. *Chernyavskii S.M.* Wave front modes correction processed by an adaptive optical system // Proc. SPIE. 2000. V. 4341. P. 116–125.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 719 с.
4. *Брэгман Л.М.* Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 3. С. 487–490.
5. *Гурин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Э.В.* Метод проекций для нахождения общих точек выпуклых множеств // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1967. Т. 7. № 6. С. 1213–1228.
6. *Реконструкция* изображений: Пер. с англ. / Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1992. 635 с.
7. *Chernyavskii S.M.* Size extended method to solve phaze retrieval problem // Proc. SPIE. 2002. V. 5026. P. 112–116.

G.L. Degtyarev, A.V. Makhan'ko, S.M. Chernyavskii, A.S. Chernyavskii. **Retrieval of wavefront modes from an image.**

The method for retrieval of wavefront modes reproduced by an adaptive optical system from variations of the image is offered. In projection methods of the solution of phase problem, the vectorial representation of the problem of determination of the generic point of m sets, allowing application of the known methods of its solution at $m = 2$, is introduced.