

В.П. Будак, Б.Б. Векленко

## Поляризация светового поля точечного мононаправленного источника света в мутной среде с анизотропным рассеянием

*Московский энергетический институт*

Поступила в редакцию 11.03.2002 г.

Проведено обобщение малоугловой модификации метода сферических гармоник на случай точечного мононаправленного (ТМ) источника света в бесконечной мутной среде с анизотропным рассеянием. В рамках выведенного обобщения получено решение векторного уравнения переноса для неполяризованного ТМ-источника. Выражения, описывающие состояние поляризации рассеянного света, приведены к виду, удобному для использования в инженерной практике. Проанализированы полученные выражения, и показано, что минимум поляризации совпадает с углом визирования на максимум яркости, что соответствует закону Умова.

Задача описания распространения поляризованного излучения в мутной среде сводится к определению функции Грина векторного уравнения переноса излучения (ВУПИ) [1, 2]. Физически это означает освещение среды точечным мононаправленным (ТМ) источником. Данная статья посвящена решению этой задачи. Решение предлагается на основе обобщения на случай поляризации существующего малоуглового решения скалярного уравнения переноса излучения. В качестве такого решения выбрана малоугловая модификация метода сферических гармоник (МСГ) [3, 4] по причине ее наибольшей общности среди малоугловых методов [3].

Для описания поляризации будем использовать СР-представление [5, 6]:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{+2} \\ L_{+0} \\ L_{-0} \\ L_{-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q - iU \\ I - V \\ I + V \\ Q + iU \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $(I, Q, U, V)$  – параметры Стокса [1].

Пусть в некоторой точке однородной бесконечной среды светит ТМ-источник неполяризованного света в направлении  $\hat{\mathbf{q}}$  (значок « $\wedge$ » показывает, что вектор единичный), и требуется определить вектор-столбец поляризационных параметров  $\mathbf{L}(r, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{i}})$  в направлении  $\hat{\mathbf{i}}$  в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от источника. Тогда краевую задачу ВУПИ можно записать в виде [7, 8]:

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \left( \sqrt{1-\eta^2} \frac{\partial \mathbf{L}(r, \mu, \eta, \varphi)}{\partial \eta} \cos \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{\partial \mathbf{L}(r, \mu, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) + \varepsilon \mathbf{L}(r, \mu, \eta, \varphi) + \\ & \left. + \mu \frac{\partial \mathbf{L}(r, \mu, \eta, \varphi)}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{2} \frac{\partial \mathbf{L}(r, \mu, \eta, \varphi)}{\partial \mu} = \right. \\ & = \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{R}(-\chi) \bar{\mathbf{x}}(\mu, \mu', \varphi') \bar{R}(\chi') \mathbf{L}(r, \eta, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \\ & \left. \mathbf{L}(r, \mu, \eta, \varphi) \Big|_{r \rightarrow 0} = \frac{\mathbf{L}_0}{(2\pi r)^2} \delta(\mu-1) \delta(\eta-1), \right. \quad (2) \end{aligned}$$

где  $\eta = (\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{r}})$ ;  $\mu = (\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{r}})$ ;  $\varphi = \pi - \psi$ ,  $\psi$  – двугранный угол между плоскостями  $\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{r}}$ ;  $\hat{\mathbf{r}}$  определяет направление от источника к точке наблюдения;  $\mathbf{L}_0 = (0; 0,5; 0,5; 0)^T$ ;  $\varepsilon, \sigma$  – показатели соответственно ослабления и рассеяния;  $\bar{R}(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}' \rightarrow \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{i}})$  – матрица преобразования вектор-параметра при вращении плоскости референции;  $\chi, \chi'$  – двугранные углы между плоскостями соответственно  $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{i}}$  и  $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}'$ ;  $\bar{\mathbf{x}}(\gamma)$  – матрица рассеяния. За плоскость референции принимается плоскость  $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{i}}$ .

Основой для МСГ является метод сферических гармоник. Поэтому представим решение в виде следующего ряда:

$$\mathbf{L}(r, \mu, \eta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{2p+1}{2} \frac{2k+1}{2} \bar{Y}_k^m(\mu) Q_p^m(\eta) e^{im\varphi} C_{kp}^m(r), \quad (3)$$

где

$$\bar{Y}_p^m(\mu) = \text{Diag}(P_{m+2}^p(\mu), P_{m+1}^p(\mu), P_{m-1}^p(\mu), P_{m-2}^p(\mu)),$$

$$Q_p^m(\mu) = \sqrt{\frac{(p-m)!}{(p+m)!}} P_p^m(\mu), \quad P_{mn}^k(\mu),$$

$P_p^m(\mu)$  – соответственно обобщенные функции Лежандра и присоединенные функции Лежандра [9]. Граничные условия преобразуются к виду

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{C}_{kp}^m(r) = \mathbf{L}_0 / (2\pi r^2). \quad (4)$$

Разложим матрицу рассеяния

$$[\bar{\mathbf{x}}(\gamma)]_{rs} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) [\bar{\mathbf{x}}_k]_{rs} P_{rs}^k(\gamma), \quad (5)$$

где  $\gamma = (\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}')$ , а индексы  $r, s$  пробегает значения  $-2, -0, +0, +2$ . Умножим уравнение на  $\bar{Y}_k^m(\mu), Q_p^m(\eta), e^{-im\varphi}$  и проинтегрируем по всей области изменения аргументов. Используя соотношения для обобщенных функций Лежандра

[9, 10], аналогично скалярному случаю [11] получим бесконечную связанную систему дифференциальных уравнений метода сферических гармоник для коэффициентов разложения  $\mathbf{C}_{kp}^m(r)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left( \sum_{j=\pm 1} \tilde{A}_{k+\delta_{ij}}^m \mathbf{C}_{p,k+j}^m(r) + \tilde{B}_k \mathbf{C}_{kp}^m(r) \right) + \\ & + \frac{1}{r} \left( \sum_{j=\pm 1} j(k+j+\delta_{ij}) t_{k+\delta_{ij}} \tilde{C}_{k+\delta_{ij}} \mathbf{C}_{p,k+j}^m + m \tilde{B}_k \mathbf{C}_{pk}^m \right) + \\ & + \frac{1}{2r} \sum_{j=\pm 1} f_p^{j-m} \left( \sum_{v=\pm 1} v T_{k+v}^{vjm} \tilde{C}_{k+\delta_{ij}} \mathbf{C}_{p,k+v}^{m+j} - j f_k^{jm} \tilde{B}_k \mathbf{C}_{pk}^{m+j} \right) = \\ & = -(2k+1) \varepsilon (\tilde{1} - \Lambda \tilde{x}_k) \mathbf{C}_{kp}^m, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_p^m &= \sqrt{(p+m)(p-m+1)}; \quad [\tilde{B}_k]_{rs} = \frac{(2k+1)s}{k(k+1)} \delta_{rs}; \\ [\tilde{C}_k]_{rs} &= \frac{\sqrt{k^2-s^2}}{k} \delta_{rs}; \quad \Lambda = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \\ [\tilde{A}_k^m]_{rs} &= \frac{\sqrt{(k^2-m^2)(k^2-s^2)}}{k} \delta_{rs}; \quad t_k = \sqrt{k^2-m^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$T_k^m = \sqrt{(k+m)(k+m+1)},$$

а повторяющиеся подряд индексы означают их произведение.

Рассеяние света в реальных средах происходит на частицах много больших длины волны, что приводит к сильно анизотропной индикатрисе рассеяния. Это обстоятельство ведет к резкой зависимости тела яркости от угла. По этой причине спектр яркости зависит от номера  $k$  слабо – является плавной, монотонно убывающей функцией. Зависимость поляризационных параметров от угла не такая острая, но и здесь спектр содержит большое число членов [12], что определяет основное влияние в ряде (3) членов с  $p, k \gg 1$ . Эти свойства спектра позволяют доопределить связь между  $\mathbf{C}_{kp}^m(r)$  и  $\mathbf{C}_{k\pm 1,p}^m(r)$  и разорвать полученную систему уравнений. Для этого коэффициенты разложения предполагаются непрерывно зависящими от своих индексов и делается разложение [3, 4]:

$$\mathbf{C}^m(r, k \pm 1, p) \approx \mathbf{C}^m(r, k, p) \pm \partial \mathbf{C}^m(r, k, p) / (\partial k). \quad (8)$$

Однако для свечения ТМ-источника сделанные допущения не приводят к аналитически решаемому уравнению. Поэтому предположим дополнительно, что зависимость параметров поляризации от зенитного угла будет более резкой, чем от азимутального:  $p, k \gg |m|$ , т.е. тело яркости более анизотропно, чем асимметрично. Это позволит сделать допущения

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k^m &\approx k \tilde{1}, \quad t_k \approx k, \quad \tilde{C}_k = \tilde{1}, \\ \tilde{B}_k &\approx \tilde{0}, \quad f_p^m \approx p, \quad T_k^m \approx k+m. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем также функцию

$$\mathbf{C}^m(k, p) = \mathbf{Y}^m(k, p) / r^2. \quad (10)$$

Подставляя эти выражения в (6), придем к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{Y}^m}{\partial r} + \frac{k}{r} \frac{\partial \mathbf{Y}^m}{\partial k} + \frac{p}{2r} \left[ \frac{\partial \mathbf{Y}^{m+1}}{\partial k} + \frac{\partial \mathbf{Y}^{m-1}}{\partial k} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k} ((m+1) \mathbf{Y}^{m+1} - (m-1) \mathbf{Y}^{m-1}) \right] = -\varepsilon (1 - \Lambda \tilde{x}_k) \mathbf{Y}^m. \end{aligned} \quad (11)$$

Определим новую функцию  $\mathbf{f}(r, \mathbf{k}, \mathbf{p})$  такую, что искомые функции  $\mathbf{Y}^m$  представляют собой коэффициенты ее разложения в ряд Фурье:

$$\mathbf{f}(r, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}^m(r, k, p) e^{im\psi}, \quad (12)$$

причем векторы  $\mathbf{k}, \mathbf{p}$  по модулю равны индексам  $k, p$ , лежат в одной плоскости, а  $\psi$  – угол между ними.

Умножим уравнение (11) на  $e^{im\psi}$  и просуммируем по  $m$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}(r, \mathbf{k}, \mathbf{p})}{\partial r} + \frac{1}{r} (\mathbf{k} + \mathbf{p}, \nabla_k) \mathbf{f}(r, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = -\varepsilon (1 - \Lambda \tilde{x}_k) \mathbf{f}(r, \mathbf{k}, \mathbf{p}). \quad (13)$$

Решая это уравнение аналогично скалярному случаю [11] методом интегрирования вдоль характеристики, будем иметь

$$\mathbf{f}(r, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -\varepsilon r + \sigma r \int_0^1 \tilde{x}(|(\mathbf{k} + \mathbf{p})\xi - \mathbf{k}|) d\xi \right] \mathbf{L}_0, \quad (14)$$

что приведет к выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{kp}^m(r) &= \frac{e^{-\varepsilon r}}{4\pi^2 r^2} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -im\psi + \sigma r \int_0^1 \tilde{x} \times \right. \\ & \left. \times \left( \left| \sqrt{p^2(1-\zeta)^2 + k^2\zeta^2} - 2\zeta(1-\zeta)pk \cos\psi \right| \right) d\zeta \right\} d\psi \mathbf{L}_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражения (3) и (15) определяют поляризационные параметры светового поля, создаваемого неполяризованным ТМ-источником в бесконечной среде. При малых углах визирования и свечения полученные выражения перейдут в решение, которое будем иметь, если развить подход [13–15].

При использовании этих выражений придется вычислять двойной интеграл и суммировать по трем переменным. Упростим полученное решение, сделав некоторые допущения.

Рассмотрим сравнительно большие оптические толщцы, на которых угловые зависимости поляризационных параметров будут более плавными функциями, чем матрица рассеяния. Соответственно спектр матрицы рассеяния будет более плавным, чем у вектор-параметра. Тогда в пределах, в которых спектр вектор-параметра отличен от

нуля, спектр матрицы рассеяния будет меняться слабо, и при разложении его в ряд Тейлора можно ограничиться малым числом членов. Рассмотрим класс индикатрис с равной нулю первой производной в спектре:

$$\vec{x}(k) \approx \vec{1} - \frac{k^2}{a^2} \vec{B}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 & b & \bar{b} & 0 \\ b & 1 & 0 & \bar{b} \\ \bar{b} & 0 & 1 & b \\ 0 & \bar{b} & b & 1 \end{pmatrix}, \quad b = -\frac{1}{2}(P + iQ), \quad (16)$$

где  $0 \leq P, Q \leq 1$  определяют возникновение линейной и круговой поляризации в акте рассеяния;  $a$  – параметр индикатрисы. Можно показать, что такому разложению примерно удовлетворяет спектр (5) матрицы рассеяния вида [4, 12]:

$$\vec{x}(\mu) = x(\mu) \begin{pmatrix} v & \omega & \bar{\omega} & 0 \\ \omega & 1 & 0 & \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 & 1 & \omega \\ 0 & \bar{\omega} & \omega & v \end{pmatrix}, \quad v = \frac{(1 + \mu)^2}{4}, \quad \omega = b(\mu^2 - 1), \quad (17)$$

если спектр  $x_k$  индикатрисы рассеяния  $x(\mu)$  при разложении в ряд Тейлора по индексу не имеет первой производной. Предположим, что параметр  $a$  – достаточно большая величина, при которой допустимо как (16), так и приближения (8), (9).

Известно выражение для матричной экспоненты [16]:

$$\exp(z\vec{K}) = \sum_{j=1}^4 \frac{\exp(z\zeta_j)(\zeta_j \vec{1} - \vec{K})^V}{\frac{d}{du} \det(u\vec{1} - \vec{K}) \Big|_{u=\zeta_j}}, \quad (18)$$

где  $()^V$  означает матрицу алгебраических дополнений, а  $\zeta_j$  являются решениями уравнения  $\det(\zeta \vec{1} - \vec{K}) = 0$ . Наша задача состоит в том, чтобы собрать ряд (3) с коэффициентами (15). Спектр искомого решения плавный, и нас интересуют большие  $k, p$  и малые углы наблюдения, поэтому суммы можно заменить интегралами, а обобщенные функции Лежандра – функциями Бесселя по аналогии с известной связью между преобразованием Ганкеля и разложением в ряд по сферическим функциям [9]. Тогда ряду (3) соответствует интегральное преобразование

$$\mathbf{L}(r, \mathbf{q}, \mathbf{I}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2k \times \\ \times \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} p dp d\xi \exp(ik\mathbf{q} + i\mathbf{p}\mathbf{I}) \vartheta(\xi) \mathbf{L}(r, \mathbf{k}, \mathbf{p}), \quad (19)$$

$$\mathbf{L}(r, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^m(r, k, p) \exp(-im\xi), \quad (20)$$

где  $\cos \xi = (\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{I}})$ ;  $\cos \zeta = (\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{p}})$ ;  $\vartheta(\xi) = \text{Diag}(\exp(2i\xi); 1; 1; \exp(-2i\xi))$ ;  $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{q}}$ ;  $\mathbf{I} = \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{I}}$ .

Подставим (16), (18) и (20) в (19). Интеграл (19) берется точно. Итоговые выражения будут иметь вид

$$\mathbf{L}(r, \mathbf{q}, \mathbf{I}) = \frac{\exp[-\varepsilon r(1 - \Lambda)]}{4r^2} \frac{3a^4}{(2\pi\sigma r)^2} \begin{pmatrix} M(\lambda_2) - M(\lambda_1) \\ L(\lambda_2) + L(\lambda_1) \\ L(\lambda_2) + L(\lambda_1) \\ \overline{M(\lambda_2)} - \overline{M(\lambda_1)} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$M(\lambda) = \frac{2\sigma r}{a^2 \lambda} \frac{[2l - q \exp(i\varphi)]^2}{(2\mathbf{I} + \mathbf{q})^4} \exp\left(-\frac{3a^2 \mathbf{q}^2}{4\sigma r \lambda}\right) \times \\ \times \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{a^2(2\mathbf{I} + \mathbf{q})^2}{4\sigma r \lambda}\right] \left[ 1 + \frac{a^2(2\mathbf{I} + \mathbf{q})^2}{4\sigma r \lambda} \right] \right\} \xrightarrow[\mathbf{I}, \mathbf{q} \rightarrow 0]{} \frac{a^2}{8\lambda^3 \sigma r} \times \\ \times [2l - q \exp(i\varphi)]^2, \quad (22)$$

$$L(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \exp\left[-\frac{a^2}{\lambda \sigma r} (\mathbf{I}^2 + \mathbf{q}^2 + \mathbf{I}\mathbf{q})\right],$$

$$\lambda_1 = 1 + P, \quad \lambda_2 = 1 - P, \quad |\mathbf{q}| = q, \quad |\mathbf{I}| = l.$$

Выражения (21), (22) являются решением ВУПИ. С учетом

$$\delta(x) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{c^2}\right) \quad (23)$$

можно показать, что полученное решение удовлетворяет граничным условиям (2), записанным в виде

$$\mathbf{L}(r, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{r \rightarrow 0} = \frac{\mathbf{L}_0}{r^2} \delta(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{I}}) \delta(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{q}}). \quad (24)$$

Разложение спектра индикатрисы в ряд, аналогичный (16) для скалярного уравнения переноса, предложено в [15].

Проанализируем полученное решение. Оно относится к классу диффузионных приближений (ДП), что подтверждается невозможностью его разложения в ряд по кратностям рассеяния (степеням  $\Lambda$ ). Из равенства  $L_{+0} = L_{-0}$  следует, что при малых углах свечения и визирования  $V = 0$  и процессы, связанные с возникновением круговой поляризации, будут слабыми. На оси свечения при визировании на источник  $\mathbf{I} = \mathbf{q} = 0$  и  $M(\lambda) = 0$ , и поляризация отсутствует, что соответствует симметрии задачи. При визировании на источник  $M(\lambda)$  определяется с точностью до множителя  $\exp(2i\varphi)$ , который описывает поворот плоскости референции  $\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{r}}$  в СР-представлении [7], так как в данном случае ее положение не определено.

Яркость из решения (21) будет максимальной, когда

$$\hat{\mathbf{I}}^2 + \mathbf{q}^2 + \mathbf{I}\mathbf{q} = \min \Leftrightarrow 5 - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{I}}(3\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{q}}) = \min \Leftrightarrow \hat{\mathbf{I}} \uparrow \uparrow 3\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{q}}. \quad (25)$$

Этот результат известен [15]. Появление максимума при условии (25) является следствием многократного рассеяния, так как и первая и вторая кратности рассеяния имеют максимум при направлении визирования на источник.

Определим степень поляризации как  $R = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}/I$ . Для простоты рассмотрим случай  $P = 1, \varphi = 0$ . Тогда  $M(\lambda_2) = L(\lambda_2) = 0, Q = V = 0,$

$$R = \frac{|Q|}{I} = \frac{L_{+2} + L_{-2}}{L_{+0} + L_{-0}} = \frac{M(\lambda_1)}{L(\lambda_1)} = \frac{e^y - 1 - y}{2y}, \quad y = \frac{a^2(2l - q)^2}{4\sigma r(1 + P)}. \quad (26)$$

Минимум функции (26), равный нулю, будет при  $2l = q$ , что при малых углах равносильно условию (25). Появление точки с нулевой поляризацией, совпадающей с точкой максимальной яркости, есть результат многократного рассеяния, что соответствует закону Умова [17]: степень поляризации излучения, отраженного плоским слоем мутной среды, уменьшается с увеличением коэффициента отражения.

Анализ функции (26) показывает, что она имеет лишь один экстремум. Физически, видимо, это неверно: при больших углах степень поляризации снова должна начать падать, значит должен быть еще один максимум. Следовательно, полученные решения справедливы при небольших углах наблюдения и свечения.

Рассмотрим связь полученного решения ВУПИ с известными того же порядка точности. Для этого выразим поле плоского мононаправленного (ПМ) источника неполяризованного света, падающего нормально на бесконечный однородный слой мутной среды:

$$\mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{z}}) = \int \overset{\leftrightarrow}{R}(\chi) \mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{r}}, \varphi) d^2\rho, \quad (27)$$

$$\mathbf{r} = \{\rho, z\}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где азимутальный угол  $\varphi$  отсчитывается поворотом относительно вектора  $\mathbf{r}$ ;  $\chi$  – угол поворота плоскости рефлексии  $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{I}}$  к плоскости  $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{I}}$ .

Перейдем к интегрированию по телесному углу

$$\mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{2p+1}{2} \frac{2k+1}{2} \sqrt{\frac{(p-m)!}{(p+m)!}} \times$$

$$\times \int_{(2\pi)} \overset{\leftrightarrow}{R}(\chi) \overset{\leftrightarrow}{Y}_k^m(\mu) P_p^m(\eta) e^{im\varphi} \mathbf{C}_{kp}^m(r) \frac{r^2 d\hat{\mathbf{r}}}{(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{z}})}. \quad (28)$$

Для дальнейших преобразований сделаем малоугловые допущения

$$r \approx z, \quad (\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{z}}) \approx 1, \quad \mathbf{C}_{ki}^m(r) r^2 d\hat{\mathbf{r}}/(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{z}}) \approx z^2 \mathbf{C}_{ki}^m(z) d\hat{\mathbf{r}},$$

а с учетом малости обратного рассеяния от интеграла только по полусфере перейдем к интегрированию по полному телесному углу, что преобразует (28) к виду

$$\mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{2p+1}{2} \frac{2k+1}{2} \sqrt{\frac{(p-m)!}{(p+m)!}} \mathbf{C}_{kp}^m(z) z^2 \times$$

$$\times \oint \bar{\mathbf{R}}(\chi) \bar{\mathbf{Y}}_k^m(\mu) P_p^m(\eta) e^{im\varphi} d\hat{\mathbf{r}}. \quad (29)$$

Используя теорему сложения для обобщенных сферических функций, их ортогональность и связь с присоединенными функциями Лежандра, интеграл по телесному углу вычисляется и (29) принимает вид

$$\mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{z}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \overset{\leftrightarrow}{Y}_k(\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{z}}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \mathbf{C}_{kk}^m(z) z^2. \quad (30)$$

Подстановка решения (15) позволяет вычислить внутреннюю сумму в (30) по  $m$ :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \mathbf{C}_{kk}^m(z) z^2 = \exp\{-\varepsilon r(1 - \Lambda \overset{\leftrightarrow}{x}_k)\}, \quad (31)$$

что полностью соответствует результатам, полученным в [4].

На рис. 1–2 приведено сравнение решения в МСГ и ДП (16)–(22) применительно к ПМ-источнику с результатами статистического моделирования. Отметим высокую точность МСГ, а ДП даже качественно не описывает тело яркости на любой глубине, однако при оптических глубинах  $\tau > 10$  с приемлемой для практики точностью описывает степень поляризации.

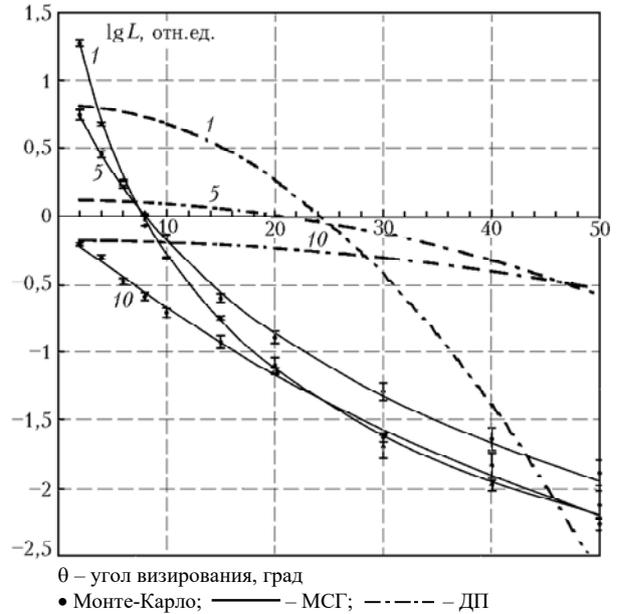


Рис. 1. Распределение яркости  $L$  внутри слоя мутной среды; цифры у кривых – оптическая толщина. Параметры среды:  $\Lambda = 0,8$ , индикатриса Хензи–Гринштейна с  $g = 0,97$

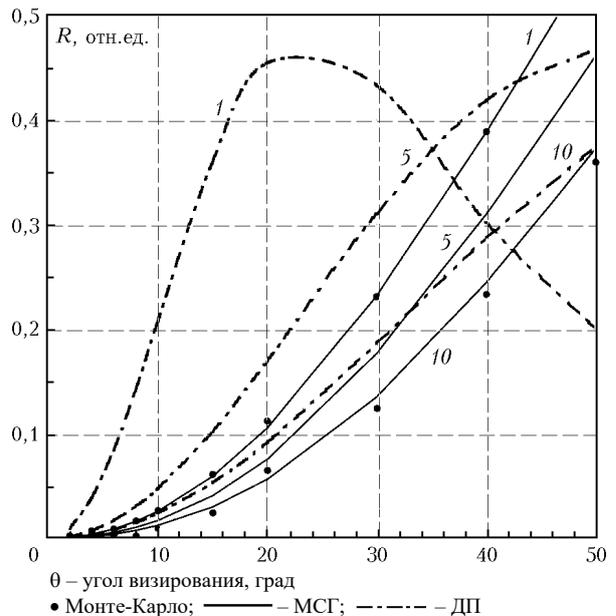


Рис. 2. Степень поляризации  $R$  внутри слоя мутной среды; цифры у кривых – оптическая толщина. Параметры среды:  $\Lambda = 0,8$ , индикатриса Хензи–Гринштейна с  $g = 0,97$

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 431 с.
2. Мишин И.В. Линейная система переноса оптического излучения в атмосфере // Методы дистанционных измерений состояния атмосферы и подстилающей поверхности со спутника. Л.: Гидрометеониздат, 1982. С. 68–73.
3. Будаков В.П., Сармин С.Э. Решение уравнения переноса излучения методом сферических гармоник в малоугловой модификации // Оптика атмосф. 1990. Т. 3. № 9. С. 981–987.
4. Астахов И.Е., Будаков В.П., Лисицин Д.В., Селиванов В.А. Решение векторного уравнения переноса в малоугловой модификации метода сферических гармоник // Оптика атмосф. и океана. 1994. Т. 7. № 6. С. 753–761.
5. Kušcer I., Ribarič M. Matrix Formalism in the Theory of Diffusion of Light /Opt. Acta. 1959. V. 6. N 1. P. 42–51.
6. Устинов Е.А. Метод сферических гармоник: приложение к расчету поляризованного излучения в вертикально-неоднородной планетной атмосфере. Математический аппарат // Косм. исслед. 1988. Т. 26. № 4. С. 550–562.
7. Соболев В.В., Минин И.Н. Рассеяние света в сферической атмосфере. I // Искусственные спутники Земли. 1962. Вып. 14. С. 7–12.
8. Смелов В.В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978. 216 с.
9. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1978. 320 с.
10. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958. 368 с.
11. Будаков В.П., Векленко Б.Б. Световое поле точечного мононаправленного источника в малоугловом приближении /Вестн. МЭИ. 2002. № 2. С. 50–56.
12. Зега Э.П., Чайковская Л.И. Разложение элементов матрицы рассеяния морской воды по обобщенным сферическим функциям // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1981. Т. 17. №6. С. 604–613.
13. Snyder H.S., Scott W.T. Multiple scattering of fast charged particles Phys. Rev. 1949. V. 76. № 2. P. 220–225.
14. Браво-Животовский Д.М., Долин Л.С., Лучинин А.Г., Савельев В.А. О структуре узкого пучка света в морской воде /Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1969. Т. 5. № 2. С. 160–167.
15. Arnush D. Underwater light-beam propagation in the small-angle-scattering approximation /J. Opt. Soc. Amer. 1972. V. 62. № 9. P. 1109–1111.
16. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
17. Umov N. Chromatische Depolarisation durch Lichtzerstreuung / Phys. Zeit. 1905. B. 6. S. 674–676.

*V.P. Budakov, B.B. Veklenko. Light field polarization of a point unidirectional light source in a turbid medium with anisotropic scattering.*

The small-angle modification of the method of spherical harmonics is generalized for a case of point unidirectional (PU) light source in an infinite turbid medium with anisotropic scattering. Within the framework of deduced generalization, the solution of the vector radiation transfer equation for an unpolarized PU-source is obtained. The expressions describing a state of polarization of scattered light are given in a form convenient for use in engineering practice. The obtained expressions are analyzed, and it is shown that the minimum of polarization coincides with a direction of sighting on a maximum of radiance, that corresponds to the Umov law.