

А.И. Бородулин, Б.М. Десятков, С.Р. Сарманаев, Н.А. Лаптева, А.А. Ярыгин

О погрешностях определения мощности источника, возникающих при решении «обратной» задачи рассеяния атмосферных примесей

НИИ аэриологии ГНЦ ВБ «Вектор», пос. Кольцово Новосибирской области

Поступила в редакцию 29.11.2001 г.

При решении «обратных» задач, как правило, используются полученные экспериментально значения концентрации примеси, которые подвержены статистическому разбросу. В общем случае разброс наблюдаемых значений возникает из-за турбулентной природы процесса рассеяния примеси и из-за наличия ошибок измерения ее концентрации. Работа посвящена оценке погрешностей определения мощности источника атмосферной примеси, возникающих из-за действия указанных выше причин. Приведенные практические примеры показывают важность учета данного фактора при решении конкретных практических задач.

Проблема описания распространения аэрозольных и газовых загрязнений атмосферы обычно представляется двумя классами задач. Первый – это решение «прямых» задач, когда по известным характеристикам источников примеси требуется найти поле ее концентрации. Второй – решение «обратных» задач, когда по информации о концентрации примеси, измеренной в ряде контрольных точек, требуется найти тип, координаты и мощность ее источников. При эйлеровом подходе к описанию процесса турбулентной диффузии наиболее плодотворным оказывается использование полумпирического уравнения [5]:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i \bar{C}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} = \bar{Q} \quad ; \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

где \bar{C} и \bar{U}_i – математические ожидания концентрации примеси и компонент скорости ветра; K_{ij} – компоненты тензора коэффициентов турбулентной диффузии (будем считать $K_{ij} = 0$ при $i \neq j$); \bar{Q} – член, описывающий источники примеси; $x = x_1$ и $y = x_2$ соответствуют горизонтальным координатам, а $z = x_3$ – вертикальной; t – время. Черта сверху обозначает усреднение по статистическому ансамблю. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Решение «прямой» задачи определим в прямоугольной области G с поверхностью S , состоящей из боковой поверхности Σ , нижнего основания Σ_0 (при $z = 0$) и верхнего основания Σ_H (при $z = H$). Система начального и граничных условий для (1) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{C}(x, y, z, 0) = 0; \quad \bar{C} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \Sigma_H; \\ -K_{zz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} + V_s \bar{C} = \beta \bar{C} \quad \text{на } \Sigma_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где V_s – скорость седиментации частиц; β – параметр взаимодействия примеси с подстилающей поверхностью.

Эффективный метод решения «обратных» задач был разработан Марчуком [4]. Данный подход основан на применении уравнения, сопряженного с полумпирическим уравнением турбулентной диффузии:

$$-\frac{\partial \bar{C}^*}{\partial t} - \frac{\partial \bar{U}_i \bar{C}^*}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial x_j} = \bar{P}, \quad (3)$$

с системой начального и граничных условий

$$\begin{aligned} \bar{C}^*(x, y, z, T) = 0; \quad \bar{C}^* = 0 \quad \text{на } \Sigma, \Sigma_H; \\ -K_{zz} \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial z} + V_s \bar{C}^* = \beta \bar{C}^* \quad \text{на } \Sigma_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Двойственное представление функционала [4]:

$$\int_0^T dt \int_G \bar{P} \bar{C} dG = \int_0^T dt \int_G \bar{Q} \bar{C}^* dG, \quad (5)$$

позволяет решать широкий спектр «обратных» задач распространения примесей.

В теории метода Марчука решение «прямой» задачи (1) $\bar{C}(x_1, y_1, z_1, T)$ для

$$\bar{Q} = Q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \delta(t),$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты источника примеси, а Q_0 – количество выброшенного вещества (мощность источника) и решение «обратной» задачи (3) $\bar{C}^*(x_0, y_0, z_0, 0)$ при

$$\bar{P} = \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) \delta(z - z_1) \delta(t - T)$$

имеют фундаментальное значение. В этом случае согласно (5)

$$\begin{aligned} & \bar{C}(x_1, y_1, z_1, T; x_0, y_0, z_0, 0) = \\ & = Q_0 \bar{C}^*(x_0, y_0, z_0, 0; x_1, y_1, z_1, T). \end{aligned} \quad (6)$$

Функция \bar{C}^* определяет в точке x_1, y_1, z_1 в момент времени $t = T$ вклад в концентрацию распространяющейся примеси от источника единичной мощности $Q_0 = 1$, расположенного в точке x_0, y_0, z_0 и сработавшего при $t = 0$. Функцию Грина \bar{C}^* принято называть функцией чувствительности.

При решении «обратных» задач, как правило, используются полученные экспериментально значения концентрации примеси, которые подвержены статистическому разбросу. В общем случае разброс наблюдаемых значений возникает из-за турбулентной природы процесса рассеяния примеси [1] и из-за наличия ошибок измерения ее концентрации. Работа посвящена оценке погрешностей определения мощности источника атмосферной примеси, возникающих из-за действия указанных выше факторов.

Пусть источник примеси с координатами x_0, y_0, z_0 срабатывает в момент времени $t = 0$. В [3] нами была сформулирована постановка «обратной» задачи определения координат источника атмосферной примеси, а также рассмотрен ряд практических примеров. Поэтому в данной работе мы будем считать x_0, y_0, z_0 известными величинами и остановимся на задаче определения неизвестной мощности источника путем решения «обратной» задачи. В общем случае измеряемой величиной является интегральная концентрация J , которая является случайной величиной:

$$J = \int_0^{\infty} C(t) dt, \quad (7)$$

где $C(t)$ – мгновенное значение концентрации примеси. Применяя к (7) операцию взятия математического ожидания, получим

$$\bar{J} = \int_0^{\infty} \bar{C}(t) dt. \quad (8)$$

Комбинируя (6) и (8), будем иметь

$$\bar{J}(x_1, y_1, z_1) = Q_0 \int_0^{\infty} \bar{C}^* dt = Q_0 \bar{J}_*(x_0, y_0, z_0), \quad (9)$$

где \bar{J}_* – функция чувствительности интегральной концентрации примеси. Мы видим, что известное математическое ожидание интегральной концентрации \bar{J} и решение сопряженного уравнения \bar{C}^* позволяют найти мощность источника атмосферной примеси Q_0 . При решении конкретных практических задач все члены статистического ансамбля интегральной концентрации, а значит, и математическое ожидание, неизвестны. Поэтому вместо \bar{J} при определении мощности источника

в (9) обычно подставляется не усредненное по ансамблю, а измеренное значение интегральной концентрации J , а именно

$$Q_0 = J / \bar{J}_*. \quad (10)$$

Величина J является случайной, что и приводит к разбросу оценки значений мощности источника. Сначала рассмотрим закон распределения оценки мощности источника, обусловленный статистической природой процесса распространения, а далее учтем погрешности измерения концентрации. Известно [1], что интегральная концентрация примеси имеет следующую функцию плотности вероятности:

$$\begin{aligned} f_J(J) = & \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{J}}{\beta} \right) \right] \delta(J) + \\ & + \frac{1}{\beta \sqrt{\pi}} \left\{ \exp \left[-\frac{(J - \bar{J})^2}{\beta^2} \right] - \exp \left[-\frac{(J + \bar{J})^2}{\beta^2} \right] \right\}; \\ \frac{\sigma_J^2}{\bar{J}^2} = & \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{J}}{\beta_0} \right) \left(1 + \frac{\beta_0^2}{2\bar{J}^2} \right) - 1 + \frac{\beta_0}{\sqrt{\pi}\bar{J}} \exp \left(-\frac{\bar{J}^2}{\beta_0^2} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где \bar{J} и β – параметры функции (11); σ_J^2 – дисперсия J . Согласно (10) при известном результате решения «обратной» задачи функция плотности вероятности оцененной согласно соотношению (10) мощности источника будет совпадать с (11) с точностью до обозначений. Из (10) также следует, что

$$\bar{Q}_0 = \bar{J} / \bar{J}_* \quad \text{и} \quad \sigma_{Q_0}^2 = \sigma_J^2 / \bar{J}_*^2,$$

где $\sigma_{Q_0}^2$ – дисперсия найденного значения мощности источника. Таким образом, для задания функции плотности вероятности Q_0 необходимо знать математическое ожидание интегральной концентрации примеси \bar{J} , ее дисперсию σ_J^2 и результат решения «обратной» задачи \bar{C}^* .

Погрешности измерения интегральной концентрации примеси будут давать дополнительный разброс в оцениваемую мощность источника. В данном случае вместо мгновенного значения интегральной концентрации примеси J будем наблюдать другое, также случайное, значение. Обозначим его q . Оценка мощности источника будет аналогичной (10):

$$Q_0 = q / \bar{J}_*. \quad (12)$$

Из (12) следует, что

$$\bar{Q}_0 = \bar{q} / \bar{J}_* \quad \text{и} \quad \sigma_{Q_0}^2 = \sigma_q^2 / \bar{J}_*^2,$$

где σ_q^2 – дисперсия найденного значения мощности источника, учитывающая инструментальные ошибки.

Пусть $f(q, J)$ есть совместная плотность вероятности измеряемой величины и результата измерений. Величины J и q являются статистически зависимыми. Поэтому $f(q, J)$ может быть записано в виде [6]:

$$f(q, J) = h(q|J) f_J(J), \quad (13)$$

где $h(q|J)$ – условная функция плотности вероятности измеренного значения интегральной концентрации q , подразумевающая фиксированное значение измеряемого значения J . Выпишем очевидное выражение для функции плотности вероятности результата измерений

$$f_q(q) = \int_0^{\infty} h(q|J) f_J(J) dJ. \quad (14)$$

Согласно (12) функция плотности вероятности найденного значения мощности источника, учитывающая статистический разброс интегральной концентрации примеси и погрешности измерений, будет совпадать с (14) с точностью до обозначений. В дальнейшем будем считать условную функцию плотности вероятности $h(q|J)$ известной величиной. Если методика измерения не имеет систематических погрешностей, то $\bar{q} = \bar{J}$. Для определения дисперсии измеренного значения вычислим второй момент

$$\overline{q^2} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} q^2 h(q|J) f_J(J) dJ dq = \int_0^{\infty} \overline{q^2|J} f_J(J) dJ. \quad (15)$$

Условное математическое ожидание квадрата q равно [1]:

$$\overline{q^2|J} = s_q^2 + J^2,$$

где s_q^2 – условная дисперсия результата измерения интегральной концентрации.

Тогда σ_q^2 будет представлена выражением

$$\sigma_q^2 = \int_0^{\infty} s_q^2(J) f_J(J) dJ + \sigma_J^2. \quad (16)$$

Из (16), в частности, следует, что в отсутствие ошибок измерений ($s_q^2 = 0$) дисперсия q совпадает с дисперсией измеряемого значения интегральной концентрации $\sigma_q^2 = \sigma_J^2$. Для дальнейшего анализа зададим следующую модель условной плотности вероятности измеренного значения концентрации:

$$h(q|J) = \frac{1}{q\rho\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln q - m)^2}{2\rho^2}\right];$$

$$\rho^2 = \ln\left(1 + \frac{s_q^2}{J^2}\right), \quad m = \ln J - \frac{1}{2}\rho^2. \quad (17)$$

Можно убедиться в том, что вычисленные согласно (17) условные математическое ожидание и дисперсия результата измерений интегральной концентрации q будут равны J и s_q^2 соответственно. Ниже рассмотрим две модели условной дисперсии результата измерений. В первой модели предположим, что $s_q^2 = \alpha_1^2 J^2$.

Такая модель описывает одинаковый вклад измеряемых значений в нормированное на J условное стандартное отклонение интегральной концентрации. Во второй – $s_q^2 = \alpha_2^2 J \bar{J}$. В данном случае методика измерений предполагается такой, что вклад измеряемых значений в условное стандартное отклонение интегральной концентрации убывает обратно пропорционально величине измеряемой концентрации.

Для практических расчетов следует также задать дисперсию интегральной концентрации примеси, которая определяется следующим выражением:

$$\sigma_J^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \overline{[C(t_1)C(t_2) - \bar{C}^2]} dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_C(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (18)$$

где $B_C(t_1, t_2)$ – корреляционная функция пульсаций концентрации примеси. Мы видим, что величина σ_J^2 находится двойным интегрированием соответствующей корреляционной функции по времени. Поэтому она будет достаточно слабо зависеть от конкретного вида $B_C(t_1, t_2)$. В [1] на основании этого факта и особенностей полумпирического подхода к описанию процесса турбулентной диффузии нами была предложена следующая «квазистационарная» модель корреляционной функции:

$$B_C(t_1, t_2) = \sigma^2(t_1) \exp\left(-\frac{|t_2 - t_1|}{\tau}\right), \quad (19)$$

где τ – эйлеров временной масштаб пульсаций концентрации примеси. Поэтому

$$\sigma_J^2 = 2\tau \int_0^{\infty} \sigma^2(t) dt. \quad (20)$$

В качестве примера рассмотрим распространение примеси от источника, расположенного на западной окраине г. Новосибирска (рис. 1). Город находится на берегах р. Оби и представлен различными оттенками серого цвета (в центре рис. 1). Река, показанная черным цветом, разделяет город на правобережную и левобережную части.

В расчетах задавались метеорологические условия, типичные для летнего июльского дня при западном ветре со скоростью 3 м/с на высоте флюгера. Источник с заданной мощностью срабатывал в 12 ч местного времени. Определение поля скорости ветра над городом осуществлялось с помощью численно-аналитической модели [2]. После этого решались полумпирическое уравнение (1) и уравнения для дисперсии концентрации атмосферной примеси [6]. Светлые изолинии (рис. 1) дают представление о поле концентрации примеси. Далее решением сопряженного уравнения (3) определялась функция чувствительности

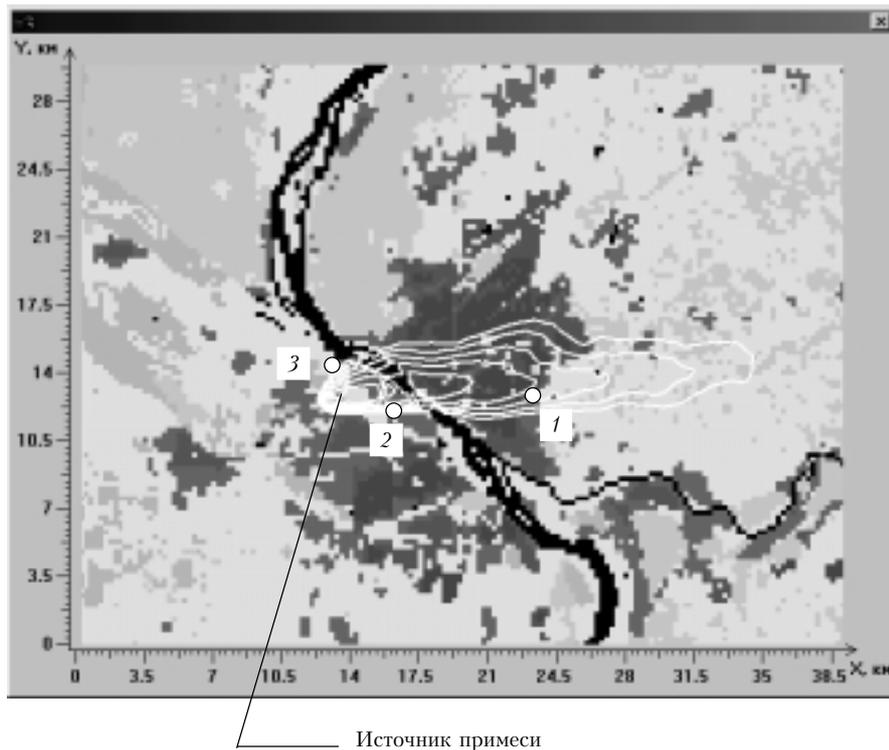


Рис. 1. Схема площадки, над которой производились расчеты

источника примеси \bar{J}_* . В качестве пунктов «измерения» концентрации принимались указанные на рис. 1 точки 1–3. Результаты расчетов функции распределения мощности источника в данных точках без учета погрешностей измерений приведены на рис. 2.

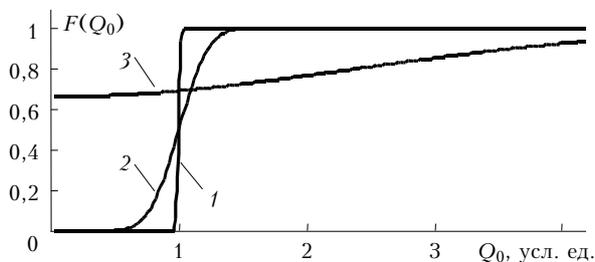


Рис. 2. Функция распределения найденной мощности источника в точках, соответствующих цифрам на рис. 1

Для определения эйлерова временного масштаба τ использовалась предложенная нами в [1] оценка $\tau = 45 z / \bar{U}$, где z – высота точки наблюдений, м; \bar{U} – среднее значение горизонтальной компоненты скорости ветра, м/с. Мы видим, что в выбранных точках найденные значения мощности источника примеси распределены принципиально различным образом. В первой точке, находящейся строго с подветренной стороны, разброс найденной мощности источника практически не наблюдается. Во второй точке погрешности определения мощности источника становятся заметными. Что касается третьей точки, то она вообще бесперспективна для определения мощности источника. В ней вероятность наблюдения нулевых значений мощности источника превосходит 60%. Аналогичная картина

наблюдается и при учете ошибок измерения концентрации примеси.

На рис. 3 в качестве примера приведена нормированная на максимальное значение функция плотности

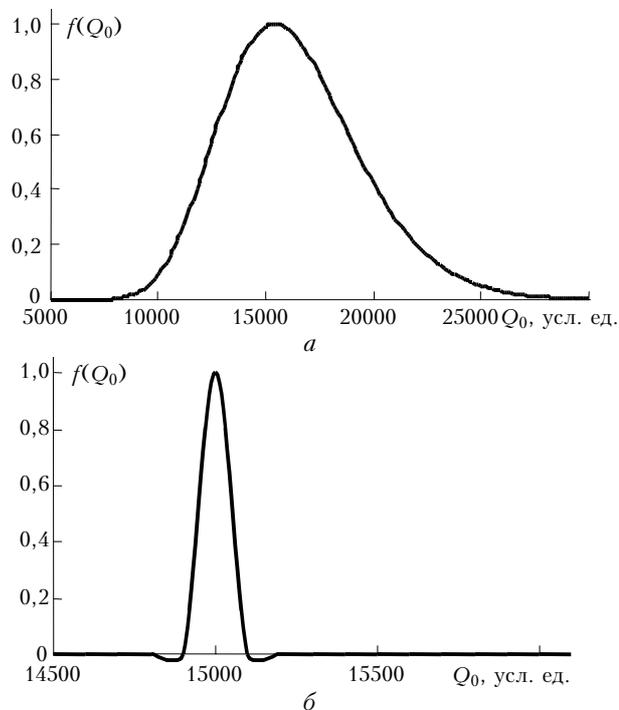


Рис. 3. Функция плотности вероятности найденной мощности источника

вероятности найденной мощности источника для первой точки. Рис. 3,а соответствует обсуждавшейся вы-

ше модели условной дисперсии результата измерений $s_q^2 = \alpha_1^2 J^2$ для $\alpha_1 = 0,2$. Рис. 3,б соответствует условной дисперсии результата измерений $s_q^2 = \alpha_2^2 J \bar{J}$ для $\alpha_2 = 0,2$.

В таблице приведены стандартные отклонения найденной мощности источника (18), нормированные на математическое ожидание. Мы видим, что погрешности определения мощности источника существенно зависят от особенностей методики измерения концентрации примеси.

Номер точки	Модель $s_q^2 = \alpha_1^2 J^2$	Модель $s_q^2 = \alpha_2^2 J \bar{J}$
1	0,21	0,02
2	0,34	0,06
3	0,75	0,16

Таким образом, в статье рассмотрены теоретические основы учета ошибок измерения концентрации примеси при определении мощности источника методом решения «обратной» задачи распространения. Приведенные практические примеры показывают важность учета данного фактора при решении конкретных практических задач.

A.I. Borodulin, B.M. Desyatkov, S.R. Sarmanaev, N.A. Lapteva, A.A. Yarygin. On the errors of determination of the point source intensity by solution of the inverse problem of atmospheric admixture diffusion.

In solving the «inverse» problems the experimentally obtained values of the admixture concentration, as a rule, are used, which are scattered statistically. The scattering of observed values arises generally from the turbulent nature of the admixture dispersion process and from the presence of measurement errors. The work is devoted to estimation of the errors of determination of an admixture source intensity arising from action of above indicated factors. Presented practical examples demonstrate importance of taking into account this factor in solving specific practical problems.

Работа выполнена при финансовой поддержке Defense Advanced Research Project Agency, USA, в рамках проекта Международного научно-технического центра № 1217р.

1. *Бородулин А.И., Майстренко Г.М., Чалдин Б.М.* Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1992. 124 с.
2. *Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Бородулин А.И.* Численно-аналитическая модель переноса аэрозолей в термически стратифицированном пограничном слое атмосферы // Оптика атмосф. и океана. 1996. Т. 9. № 6. С. 815–820.
3. *Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Бородулин А.И., Котлярова С.С., Селегей В.В.* Определение некоторых характеристик источника аэрозольных примесей путем решения «обратной» задачи их распространения в атмосфере // Оптика атмосф. и океана. 1999. Т. 12. № 2. С. 136–139.
4. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
5. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 720 с.
6. *Роди В.* Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227–321.