«Оптика атмосферы и океана», **12**, № 9 (1999)

УДК 535.33:34

С.Д. Творогов

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ЧАСТОТЕ

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 8.07.99 г.

Известный прием, именуемый в атмосферной спектроскопии термином «ряды экспонент», использован для вывода уравнения относительно интегральных по спектру характеристик света, проходящего через неоднородную излучающую аэрозольно-молекулярную среду.

1. Постановка задачи

Уравнение переноса излучения в неоднородной аэрозольной молекулярной среде

$$\mathbf{n}\,\mathrm{grad}\,I(\mathbf{r},\mathbf{n};\omega) = -\big(\eta(\mathbf{r},\omega)+\sigma(\mathbf{r},\omega)\big)\,I(\mathbf{r},\mathbf{n};\omega) + \\ +\int d\mathbf{n}'\,\varphi(\mathbf{n},\mathbf{n}';\omega)I(\mathbf{n}';\omega)+\eta(\mathbf{r},\omega) \qquad (1)$$

выписывается для спектральной (частоты ω) интенсивности I луча, идущего в точке $\mathbf{r}$ вдоль орта $\mathbf{n}$; $\varkappa$, σ, η и φ – коэффициенты молекулярного поглощения, аэрозольного ослабления, излучения и должным образом нормированная индикатриса рассеяния. Положим, что надобна интегральная по спектру величина

$$A(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} d\omega\; I(\mathbf{r},\mathbf{n};\omega),\ \Delta\omega = \omega''-\omega', \qquad (2)$$

фигурирующая обычно во время обсуждения радиационных свойств атмосферы.

Хорошо известна инициированная (1) и (2) прагматическая проблема. Вычислительные трудности в (1) создает интегральное слагаемое, т.е. «рассеяние», характеристики которого довольно слабо зависят от ω. Молекулярное же поглощение, тривиальное, по существу, в задаче о распространении волн, кардинально увеличивает объем вычислений в (2) своим «частоколом» громадного числа спектральных линий. Естественно, хотелось бы иметь уравнение непосредственно для (2), и здесь оказывается полезным прием, именуемый «рядами экспонент».

Последний термин представим, ориентируясь на [1–3]. Положим, что рассматривается функция поглощения P для луча длиною l в однородной чисто молекулярной среде; тогда

$$P(l) \equiv \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} e^{-\varkappa(\omega)l}d\omega = \int\limits_0^1 e^{-S(g)l}dg = \sum_{\nu=1} b_\nu\, e^{-S(g_\nu)l}. \qquad (3)$$

Монотонная (вместо «капризной» $\varkappa(\omega)$) $S(g)$-функция, обратная

$$g(S) = \frac{1}{\Delta\omega}\int d\omega\,; \qquad (4)$$

$$\varkappa(\omega) \le S,\ \omega \in [\omega',\omega'']\,.$$

Через b_ν и g_ν обозначим ординаты и абсциссы квадратурной формулы, избранной для численного расчета второго интеграла из (3).

Идея использовать (3) для разрешения порожденной (1) и (2) проблемы выдвинута в (4) для однородной среды без излучения (η = 0 в (1)). Соответствующий сценарий выглядит (ряд в [3] – все-таки вычислительное приближение) как вполне точное преобразование, и мы воспроизведем главные его элементы.

Вводится функция $J(\mathbf{r},\mathbf{n},l;\omega)$ – решение уравнения

$$\mathbf{n}\,\mathrm{grad}\,J + \frac{\partial J}{\partial l} = -(\varkappa+\sigma)\,J + \int d\mathbf{n}'\,\varphi\,J(\mathbf{r},\mathbf{n}',l;\omega) \qquad (5)$$

с граничными условиями

$$J(\mathbf{r},\mathbf{n},0;\omega) = J(\mathbf{r},\mathbf{n},\infty;\omega) = 0. \qquad (6)$$

После интегрирования $\int\limits_0^\infty dl(\ldots)$ уравнения (5) при условии (6) появится (1), т.е. (η = 0)

$$I(\mathbf{r},\mathbf{n};\omega) = \int\limits_0^\infty J(\mathbf{r},\mathbf{n},l;\omega)\,dl\,. \qquad (7)$$

Подстановка

$$J = E(\mathbf{r},\mathbf{n},l)\,e^{-\varkappa(\omega)l} \qquad (8)$$

в (5) устраняет селективное κ(ω), и в задаче

$$\mathbf{n}\,\mathrm{grad}E + \frac{\partial E}{\partial l} = -\sigma\,E + \int d\mathbf{n}'\,\varphi\,E(\mathbf{r},\mathbf{n}',l) \qquad (9)$$

относительно E остаются только не зависящие (в выбранном интервале $\Delta\omega$) от ω характеристики рассеяния. Поэтому после умножения (9) на $\exp(-\varkappa l)$ и интегрирования по ω с привлечением определения (3) появится соотношение

$$\mathbf{n}\ \mathrm{grad}\, D(\mathbf{r},\mathbf{n},l) + P\frac{\partial E}{\partial l} = -\,\sigma D + \int d\mathbf{n}'\ \varphi\ D(\mathbf{r},\mathbf{n}',l), \quad (10)$$

где фигурирует функция

$$D(\mathbf{r},\mathbf{n},l) \equiv \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} J(\mathbf{r},\mathbf{n},l;\omega)d\omega = E(\mathbf{r},\mathbf{n},l)P(l)\,. \quad (11)$$

Следствием (2), (7), (8) и (11) станет цепочка

$$A(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} d\omega \int\limits_{0}^{\infty} dl\ J(\mathbf{r},\mathbf{n},l;\omega) =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} dl\ D(\mathbf{r},\mathbf{n},l) = \int\limits_{0}^{\infty} dl\ E(\mathbf{r},\mathbf{n},l)\ P(l),$$

из которой очевидна надобность интегрировать по l. Именно на этом этапе привлекается (3)

$$\int\limits_{0}^{\infty} P(l)\,\frac{\partial E}{\partial l}\,d\,l = -\int\limits_{0}^{\infty} E\ \ \frac{\partial P}{\partial l}\,d\,l =$$

$$= \sum_{\nu} b_{\nu}\ S(g_{\nu}) \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-S(g_{\nu})l}\, E\, dl \equiv \sum_{\nu} b_{\nu}\ S(g_{\nu})\ A_{\nu}$$

с очевидной ссылкой на (6). Из той же цепочки явствует, что

$$A = \int\limits_{0}^{\infty} dl\ E(\mathbf{r},\mathbf{n},l)P = \sum_{\nu} b_{\nu} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-S(g_{\nu})l}\ Edl = \sum_{\nu} b_{\nu}A_{\nu}.$$

Несомненная линейная независимость b_{ν} предоставляет возможность объявить A_{ν} решением уравнения

$$\mathbf{n}\ \mathrm{grad}\, A_{\nu}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = -\left(\sigma + S(g_{\nu})\right)\, A_{\nu} + \int d\mathbf{n}'\ \varphi\ A(\mathbf{r},\mathbf{n}') \quad (12)$$

с последующим

$$A(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sum_{\nu} b_{\nu}\ A_{\nu}(\mathbf{r},\mathbf{n})\,. \quad (13)$$

Из сопоставления (12) и (1) ясно, что вернулись к тому же уравнению переноса, но с заменой $\varkappa(\omega)$, как очень изменчивой функции ω, на не зависящую от частоты $S(g_{\nu})$. При достаточно хорошем выборе в (3) квадратурной формулы число слагаемых в (13) будет буквально несколько единиц вместо обычных десятков тысяч при непосредственном численном интегрировании (2).

Только что рассмотренный прием обобщается далее на вариант «неоднородная среда (все аэрозольные и молекулярные характеристики – функции $\mathbf{r}$), когда необходимо учитывать собственное излучение среды». Подобная ситуация характерна для наиболее «трудного» спектрального участка (3–8μ) в проблеме оценки радиационных атмосферных потоков.

2. Решение

По известным правилам $I = I^{(0)} + I'$, где $I^{(0)}$ – общее решение однородного (при $\eta = 0$) уравнения с граничными условиями задачи и I' – частное решение неоднородного, выписываемое через соответствующую функцию Грина. Ясно, что (2) обретет аналогичную структуру: $A = A^{(0)} + A'$.

Величина $I^{(0)}$ повторяет уже цитированный сценарий. Однако теперь, из-за зависимости $\varkappa$ от $\mathbf{r}$, после подстановки (8), к левой части (9) добавится по-прежнему селективное по ω слагаемое $(-El)$ $\mathbf{n}$ grad $\varkappa(\omega, \mathbf{r})$. Это обстоятельство требует определенного разъяснения. Сейчас речь идет об устранении к из (1), и поэтому в показателе экспоненты в (8) не может фигурировать величина типа

$$\tau \ = \int\limits_{z(\mathbf{n})} \varkappa(\omega,\mathbf{r}(z))dz$$

с интегрированием по лучу – ведь тогда зависящая от $\mathbf{n}$ функция τ окажется под знаком $\int d\mathbf{n}'(\ldots)$. По той же причине неразумен предварительный переход от (1) к интегральному уравнению – появится интеграл от $\varkappa$ с аргументом $\mathbf{r} - z\mathbf{n}$. И уже совсем нет смысла обращаться в (9) к преобразованию Лапласа по l.

Приближение становится неизбежным, и олицетворяет его условие

$$\left|\mathrm{grad}\,\varkappa(\mathbf{r},\omega)\right| \,/\, \sigma^2 \ \ll 1\,, \quad (14)$$

почти несомненное в подавляющем большинстве приложений атмосферной оптики. За (14) стоит сравнение «лишнего» слагаемого с первым в правой части (9). Формально (9) можно трактовать как «нестационарное уравнение переноса» (считая $l \sim t$ – некоему «времени»), и для него, в любой задаче с рассеянием, $l = 0(1/\sigma)$ [5].

Условие (14) возвращает к прежнему (9) и последующему сценарию. Разница лишь в том, что $S(g_{\nu}) \to S(g_{\nu};\, \mathbf{r})$ в определении (4). Конечно же, снова придется прибегнуть к (14) для $S(g_{\nu};\, \mathbf{r})$, но это уже будет просто следствием предыдущего.

Финал вполне ясен: для $A^{(0)}$ появится формула (13) с заменой A_{ν} на $A_{\mathrm{n}}^{(0)}$ – решение уравнения (12) с $S(g_{\nu};\, \mathbf{r})$ вместо $S(g_{\nu})$ и прежними примечаниями по поводу сопоставления (12) и (1).

Здесь возникает небольшая методическая тонкость, как раз связанная с рядами экспонент. Положим, что отсутствует рассеяние и интенсивность внешнего излучения постоянна в $\Delta\omega$ (она полагается единичной). Разумеется, тогда получится выражение

$$A^{(0)} = \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} \mathrm{e}^{-\tau}d\omega \equiv \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} d\omega \left\{ \exp - \int\limits_{0}^{\infty} \kappa(\mathbf{r} - R\mathbf{n};\omega)\,dR \right\}$$

с интегрированием по лучу, приходящему в $\mathbf{r}$ по направлению $\mathbf{n}$ из $(-\infty)$. Рядом экспонент окажется затем (3), где будет фигурировать $\tilde{S}(g_{\nu};\mathbf{r})$ – она строится по схеме (4), когда вместо $\varkappa(\omega)$ фигурирует выписанная $\tau(\omega,\, \mathbf{r})$. Однако при переходе к только молекулярной атмосфере решением задачи относительно $A^{(0)}$ окажется ряд

$$A^{(0)} = \sum_{\nu} b_\nu \, e^{-\int_0^\infty S(g_\nu;-R\mathbf{n})dR}.$$

Ясно, что последнее надо трактовать как приближение, порождено оно условием (14), и это является платой за устранение селективного по частоте $\varkappa$ из уравнения переноса в случае неоднородной среды – ведь варианту (8), по существу, нет альтернативы.

Впрочем, это вынужденное приближение можно скорректировать чисто эвристически заменой $S(g_\nu; \mathbf{r})$ на $\mathbf{n}\,\mathrm{grad}\,\tilde{S}(g_\nu; \mathbf{r})$. Действительно:

$$S(g_\nu; \mathbf{r}) = \mathbf{n}\ \mathrm{grad} \int_0^\infty \tilde{S}(g; \mathbf{r} - R\mathbf{n})dR$$

и уравнение для $I_\nu^{(0)}$ приводится к виду $\mathbf{n}\,\mathrm{grad}\, I_\nu^{(0)} = -(\mathbf{n}'\,\mathrm{grad}\,\tilde{S})\, I_\nu^{(0)}$ с точным решением. Но вряд ли стоит прибегать к такому явному усложнению вычислений, имея в виду хорошие аппроксимационные возможности обсуждаемого приближения – об этом см. [6].

Частное решение –

$$I'(\mathbf{r}', \mathbf{n}'; \omega) = \int d\mathbf{r} d\mathbf{n}\ \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}; \omega)\ G_\omega(\mathbf{rn}|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') \qquad (15)$$

с формулой Грина $G_\omega(\mathbf{rn}|\mathbf{r}'\mathbf{n}')$ – решением задачи

$$-\mathbf{n}\ \mathrm{grad}\, G_\omega(\mathbf{rn}|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') = -\big(\sigma(\mathbf{r},\omega) + \varkappa(\mathbf{r},\omega)\big)\ G_\omega(\mathbf{rn}|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') + \int d\mathbf{n}''\ \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{n}''; \omega)\ G_\omega(\mathbf{rn}''|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\ \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \qquad (16)$$

при нулевых граничных условиях. Доказательство (15), (16) – математическое совершенно стандартное. Уравнение (1) умножается на G_ω, (16) на I, полученные таким образом выражения вычитаются друг из друга, разность интегрируется по $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$; пределы интегрирования – объем среды и сфера единичного радиуса. Исчезновение первых слагаемых из правой части очевидно. Далее:

$$\int d\mathbf{n}\ d\mathbf{n}''\ \big\{\varphi(\mathbf{n}, \mathbf{n}'')\ I(\mathbf{n}'')\ G_\omega(\mathbf{n}) - \varphi(\mathbf{n}, \mathbf{n}'')\ G_\omega(\mathbf{n}'')\ I(\mathbf{n})\ \big\} = 0$$

– достаточно в каком-либо слагаемом сделать перестановку $\mathbf{n} \rightleftarrows \mathbf{n}''$ переменных интегрирования и принять во внимание то обстоятельство, что аргументом φ фактически является $\mathbf{n} - \mathbf{n}''$:

$$\int d\mathbf{r}\ \big\{G_\omega(\mathbf{r}|\,\mathbf{r}')\ \mathbf{n}\ \mathrm{grad}\, I(\mathbf{r}) + I(\mathbf{r})\ \mathbf{n}\ \mathrm{grad}\, G_\omega(\mathbf{r}|\,\mathbf{r}'')\big\} = 0.$$

Действительно, рассматриваемое выражение сводится к

$$\mathbf{n} \int d\mathbf{r}\ \mathrm{grad}(I(\mathbf{r})\ G_\omega(\mathbf{r}|\,\mathbf{r}'))$$

с последующим переходом к интегрированию по поверхности среды, где $G = 0$. Программа устранения селективной $\varkappa(\omega)$ из (2), (15), (16) и сценарий этой акции остаются, по существу, прежними. Конечно, некоторые детали немного меняются, и именно их мы прокомментируем.

Введем функцию $\psi_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, l\,|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}')$, удовлетворяющую уравнение

$$-\mathbf{n}\ \mathrm{grad}\, \psi_\omega\ (\mathbf{r}\ \mathbf{n}\ l|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') + \frac{\partial \psi_\omega}{\partial\, l} = -(\sigma + \kappa)\ \psi_\omega + \int d\mathbf{n}''\ \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{n}''; \omega)\ \psi_\omega(\mathbf{rn}''l|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\ \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}')\ 2\delta(l) \qquad (17)$$

с условиями $\psi_\omega(\mathbf{r}\ \mathbf{n}\ 0|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') = \psi_\omega(\mathbf{r}\ \mathbf{n}\ \infty|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') = 0$, и сразу же убеждаемся, что $G_\omega = \int_0^\infty \psi_\omega\, dl$ (используется условие, что $\int_0^\infty 2\delta(l)\ dl = 1$). Аналогом (8) станет

$$\psi_\omega(\mathbf{r}\ \mathbf{n}\ l|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') = e^{-\kappa(\mathbf{r},\omega)l}\ \Phi(\mathbf{r}\ \mathbf{n}\ l|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}'), \qquad (18)$$

и подстановка (18) в (17), с непременной ссылкой на условие (14), приведет к уравнению

$$-\mathbf{n}\,\mathrm{grad}\ \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial l} = -\sigma\Phi \int d\mathbf{n}''\varphi\Phi + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}')2\delta(l), \qquad (19)$$

уже фактически от ω не зависящему – см. еще комментарии к (9) (при записи (19) использовано обычное $\delta(l)\exp(\varkappa l) = \delta(l)$). Следствием (2), (15) и (18) будет соотношение

$$A'(\mathbf{r}', \mathbf{n}') = \int d\mathbf{r} d\mathbf{n} \int_0^\infty dl\ \Phi(\mathbf{r}\ \mathbf{n}\ l|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}')\ \times \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} \eta(\mathbf{r}, \omega)\ e^{-\kappa(\omega,\mathbf{r})l}\ d\omega. \qquad (20)$$

В (20) появится величина

$$H(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} \eta(\mathbf{r}, \omega)\ e^{-\kappa(\omega,\mathbf{r})l}\ d\omega, \qquad (21)$$

в теории переноса излучения часто именуемая функцией источника. Применение идеи (3), (4) к выражению вида (21) с некой $f(\omega)$ вместо η дает ряд экспонент

$$\frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} f(\omega)\ e^{-\kappa l}\ d\omega = \sum_\nu b_\nu\ e^{-\gamma(g_\nu)l}\ D, \qquad (22)$$

где $\gamma(g)$ – монотонная функция, обратная

$$g(\gamma) = \frac{1}{\Delta\omega} \int d\omega\ U(\omega),\ \ U(\omega) = \frac{f}{\frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega'}^{\omega''} f(\omega)\ d\omega} \equiv \frac{f}{D}, \qquad (23)$$

$$\varkappa(\omega) \le \gamma,\ \omega \in [\omega', \omega''].$$

Далее, $\eta = \eta_1 + \eta_2$, где η_1 и η_2 – коэффициенты излучения аэрозоля и молекулярного газа. Конечно же,

$\eta_1 = B(\omega, \Theta)q$ с функцией Планка B (для температуры Θ) и аэрозольным коэффициентом поглощения q; последний тоже, как и прежние характеристики рассеяния, надо полагать, в $\Delta\omega$ от ω не зависящим. Аналогичное соотношение часто выписывается и для η_2, но есть ситуации [7–9], когда нарушается локальное термодинамическое равновесие и $\eta_2 = \varkappa B\rho$ с соответствующим множителем ρ. Подстановка η_1 в (20) (A'_λ – отвечающее η_1 слагаемое A') и замечания по поводу q приводят к процедуре (22), (23) с $f = B$ и $\varkappa(\omega) \to \varkappa(\omega, \mathbf{r})$; последнее означает также, что $\gamma(g) \to \gamma(g, \mathbf{r})$. Величина

$$D \to \Omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} B(\omega, \Theta(\mathbf{r}))\, d\omega.$$

В этих обозначениях

$$A'_1(\mathbf{r}', \mathbf{n}') = \sum_\nu b_\nu \int d\mathbf{r}\; d\mathbf{n}\; \Omega(\mathbf{r})\; q(\mathbf{r})\; \Phi_\nu(\mathbf{rn}|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}'),$$

$$\Phi_\nu(\mathbf{rn}|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}') = \int\limits_0^\infty dl\; \Phi(\mathbf{rn}l|\,\mathbf{r}'\mathbf{n}')\; \mathrm{e}^{-\gamma(g_\nu;\mathbf{r})l}. \tag{24}$$

Уравнение для Φ_ν получается соответствующим (24) интегрированием соотношения (19) со ссылкой на то, что условие (14), естественно, трансформируется в приближение для $\gamma(g; \mathbf{r})$. Совершенно аналогичные акции предшествовали уравнению вида (12). Теперь появится

$$-\mathbf{n}\;\mathrm{grad}\,\Phi_\nu = -\left(\sigma + \gamma(g_\nu;\mathbf{r})\right)\Phi_\nu + {} + \int d\mathbf{n}''\varphi\Phi_\nu + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\;\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}'), \tag{25}$$

Поскольку

$$2\int\limits_0^\infty \delta(l)\;\mathrm{e}^{-\kappa l}\; dl = 1.$$

Проведя обсуждение (15), (16) в «обратном порядке», убедимся, что (25) – функция Грина для уравнения (1), в котором $\varkappa \to \gamma(g_\nu; \mathbf{r})$ и $\eta \to \Omega(\mathbf{r}|q|\mathbf{r})$. И если частное его решение обозначить через $I_\nu^{(1)'}$, то следствием (24) станет $A'_1 = \sum\limits_\nu b_\nu\; I_\nu^{(1)'}$. Аналогично рассматривается и A'_2 – связанное с η_2 слагаемое (20). Единственная техническая деталь в том, что место q занимает соответственно селективное $\varkappa$, и оно, конечно же, оказывается под знаком интеграла в (23). Надобно поэтому продифференцировать (21) (с $\eta \to \eta_2$) по l, чтобы вернуться к уже использованной процедуре. Хотя необходимость считаться с нарушением локального термодинамического равновесия возникает не часто, все-таки общности ради, $B \to B\rho$, что приведет к иным γ' и Ω'. Итак, $A'_2 = \sum\limits_\nu b_\nu\; I_\nu^{(2)'}$, $I_\nu^{(2)'}$ – частное решение (1), когда

$$\varkappa \to \gamma'(g_\nu;\mathbf{r}),\; \eta \to \Omega'(\mathbf{r})\;\gamma'(g_\nu;\mathbf{r})\,.$$

3. Сводка расчетных формул

Выпишем еще конечные формулы (и соответствующие уравнения) для величины (2). Обозначения, введенные в предыдущих пунктах, естественно, не комментируются:

$$A = \sum_\nu b_\nu\; A_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}),$$

$$A_\nu = A_\nu^{(0)} + A_\nu^{(1)} + A_\nu^{(2)};$$

$$\mathbf{n}\;\mathrm{grad}\,A_\nu^{(0)} = -\left(\sigma + S(g_\nu;\mathbf{r})\right) A_\nu^{(0)} + {} + \int d\mathbf{n}'\;\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{n}')\; A_\nu^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{n}');$$

$S(g_\nu; \mathbf{r})$ – функция, обратная

$$g(S, \mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta\omega}\int d\omega;$$

$$\kappa(\omega, \mathbf{r}) \le S,\; \omega \in [\omega', \omega''];$$

$$\mathbf{n}\;\mathrm{grad}\,A_\nu^{(1)} = -\left(\sigma + \gamma(g_\nu;\mathbf{r})\right) A_\nu^{(1)} + {} + \int d\mathbf{n}'\;\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{n}')\; A_\nu^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{n}') + \Omega(\mathbf{r})\; q;$$

$\gamma(g; \mathbf{r})$ – функция, обратная

$$g(\gamma; \mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta\omega}\int d\omega\; U(\omega),\quad U = \frac{B}{\Omega};$$

$$\varkappa(\omega, \mathbf{r}) \le \gamma, \omega \in [\omega', \omega''];$$

$$\mathbf{n}\;\mathrm{grad}\,A_\nu^{(2)} = -\left(\sigma + \gamma'(g_\nu;\mathbf{r})\right) A_\nu^{(2)} + {} + \int d\mathbf{n}'\;\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{n}')\; A_\nu^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{n}') + \Omega'(\mathbf{r})\;\gamma'(g_\nu;\mathbf{r}),$$

$$\Omega' = \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} B(\omega)\;\rho(\omega)\; d\omega\;;$$

γ' – функция, обратная

$$g(\gamma'; \mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta\omega}\int U'(\omega)\; d\omega\;,\quad U' = \frac{B\;\rho}{\Omega'},$$

$$\varkappa(\omega, \mathbf{r}) \le \gamma',\quad \omega \in [\omega', \omega'']\,.$$

1. *Goody R., West R., Chen L., Grisp D.* //JQSRT. 1989. V. 42. P. 539.
2. *Творогов С.Д.* //Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 3. С. 315.
3. *Творогов С.Д.* //Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 4–5. С. 403.
4. *Van de Hulst H.C., Irvin W.M.* //Meteor. Soc. Roy. Sci. Liege. 1963. Ser 5–7. N 1. P. 78.
5. *Соболев Б.В.* Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука, 1972. 335 с.
6. *Творогов С.Д., Несмелова Л.И., Родимова О.Б.* //Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. № 33. С. 373.
7. *Гуди Р.* Атмосферная радиация. М.: Мир, 1966. 522 с.
8. *Творогов С.Д.* //Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. № 9. С. 995.
9. *Несмелова Л.И., Родимова О.Б., Творогов С.Д.* Контур спектральной линии и межмолекулярное взаимодействие. Новосибирск: Наука, 1986. 215 с.

S.D. Tvorogov. **Application of Exponential Series to Integrating the Radiation Transfer-equation with Respect to Frequency.**

Approach known in the atmospheric spectroscopy as a series of exponents is used to derive an equation for the spectrally integrated characteristics of light transferred through an aerosol-molecular medium.