

## РАССЕЯНИЕ И ПЕРЕНОС ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 535.36

А.Б. Гаврилович, В.И. Бычек

## АНАЛИЗ СВЯЗЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ СВЕТА ПО ОБОБЩЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ С ПАРАМЕТРАМИ МИКРОСТРУКТУРЫ ПРИЗЕМНОГО АЭРОЗОЛЯ

На базе типичных моделей аэрозоля нижней атмосферы Земли проведено исследование информативных свойств коэффициентов разложения элементов матрицы рассеяния света по обобщенным сферическим функциям. Выполнено моделирование стохастических связей информативных признаков коэффициентов разложения с параметрами микроструктуры аэрозоля в процессе его трансформации и найдены коэффициенты корреляции между ними. Построены уравнения регрессии для оценок эффективного радиуса частиц аэрозольных фракций и их смесей, относительного содержания компонент на разных стадиях трансформации аэрозоля.

Элементы матрицы рассеяния света, как известно, обладают высокой информативностью по отношению к микроструктурным и оптическим свойствам аэрозоля [1]. Однако в решениях уравнения переноса излучения, использующих разложения по ортогональному базису обобщенных сферических функций (ОСФ), элементы матрицы рассеяния проявляют себя непосредственно через коэффициенты разложения [2, 3]. В этой связи представляют практический интерес исследование информативных свойств коэффициентов разложения, изучение характера их связей с микроструктурой аэрозоля для целей оптической идентификации состояний аэрозоля в процессе его трансформации.

Цель данной работы заключается в анализе распределений коэффициентов разложения и выявлении их признаков, находящихся в тесной стохастической или функциональной связи с эффективными размерами частиц аэрозоля и его фракций, с входными параметрами, определяющими трансформацию аэрозоля, а также в получении функций регрессии в условиях накопления ошибок, связанных с погрешностью измерений и неточностью априорной информации.

## Модели приземного аэрозоля

Объектом исследования являются типичные модели аэрозолей нижней атмосферы Земли, рекомендованные Радиационной комиссией Международной ассоциации по метеорологии и атмосферной физике (IAMAP) [4]. Различные стадии трансформации аэрозоля, согласно [4], проявляются в изменении концентрации основных аэрозольных компонент: D (DUST-LIKE) – пылевые частицы, W (WATER-SOLUBLE) – растворимые в воде частицы, S (SOOT) – углеродный антропогенный аэрозоль. В процессе трансформации аэрозоля от континентальной модели С (CONTINENTAL) до городской – U (URBAN/INDUSTRIAL) относительные объемные концентрации (содержание)  $C_v$  основных

аэрозольных компонент D, W и S изменяются в пределах 0,70–0,17, 0,29–0,61 и 0,01–0,22 соответственно. С использованием данных [4–7] нами проведена интерполяция соотношений между D, W и S при изменении содержания  $C_v^D$  пылевой компоненты от 0,05 до 0,9. Кроме моделей аэрозоля типа С и U [4] рассмотрены также модели со значениями  $C_v^D, C_v^W, C_v^S$ : а) 0,05; 0,65; 0,30; б) 0,30; 0,55; 0,15; в) 0,50; 0,44; 0,06; г) 0,90; 0,10; 0,00. Здесь и ниже, как и в [4], термин «модель аэрозоля» используется для обозначения каждой совокупности аэрозольных компонент D, W, S, полученной в результате интерполяции.

Аэрозольные компоненты на длине волны  $\lambda = 0,55$  мкм имеют показатели преломления  $n = 1,53$  (D и W) и 1,75 (S) и поглощения  $\kappa = 0,008$  (D), 0,06 (W), 0,44 (S). Распределение частиц по радиусам  $r$   $k$ -й аэрозольной компоненты ( $k = D, W, S$ ) аппроксимируется одномодовым логарифмически нормальным законом

$$f_k(r) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \frac{1}{r} \exp \left[ -\frac{\ln^2(r/r_0^k)}{2\sigma_k^2} \right], \quad (1)$$

где параметр  $r_0^k$  принимает значения 0,5, 0,005 и 0,0118 мкм для компонент D, W и S соответственно, а  $\sigma_k = 1,09527$  (D и W), 0,69315 (S). Пылевая компонента описывает крупнодисперсную фракцию с эффективным радиусом, т.е. отношением третьего момента распределения ко второму,  $r_{\text{эф}}^D = 10,033$  мкм, а компоненты W и S – мелкодисперсную ( $r_{\text{эф}}^W = 0,1003$  мкм,  $r_{\text{эф}}^S = 0,0395$  мкм). Каждая из моделей аэрозоля представляет собой полидисперсную смесь компонент D, W, S с трехмодальной функцией распределения по размерам

$$f(r) = \sum_{k=1}^3 q_k f_k(r), \quad (2)$$

эффективным радиусом частиц

$$r_{\text{эф}} = \frac{\sum_{k=1}^3 q_k m_3^k}{\sum_{k=1}^3 q_k m_2^k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^3 C_v^k r_{\text{эф}}^k} \quad (3)$$

и модами  $r_m^k = r_0^k \exp(-\sigma_k^2)$ . В формулах (2) и (3)

$$q_k = 1 / \left( \frac{m_3^k}{C_v^k} \sum_{k=1}^3 \frac{C_v^k}{m_3^k} \right) - \text{весовой множитель};$$

$$m_2^k = (r_0^k)^2 \exp(2\sigma_k^2) \text{ и } m_3^k = (r_0^k)^3 \exp(4,5\sigma_k^2) - \text{второй и третий моменты } k\text{-го распределения.}$$

### Анализ коэффициентов разложения

В приближении сферически симметричных частиц матрица рассеяния света  $\|x_{ij}(\theta)\|$  аэрозолем имеет блочно-диагональный вид

$$\|x_{ij}(\theta)\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

С учетом свойств симметрии для элементов  $x_{ij}$  имеют место соотношения:  $x_{11} = x_{22}$ ,  $x_{33} = x_{44}$ ,  $x_{12} = x_{21}$ ,  $x_{43} = -x_{34}$ . В этом случае матрица рассеяния  $\|x_{ij}(\theta)\|$  полностью задается четырьмя угловыми функциями: диагональными –  $x_{11}(\theta)$  и  $x_{44}(\theta)$  и недиагональными –  $x_{12}(\theta)$  и  $x_{34}(\theta)$ . Элемент  $x_{11}(\theta)$  нормируется согласно  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x_{11}(\mu) d\mu = 1$ , где  $\mu = \cos\theta$ ,  $\theta$  – угол рассеяния.

Матрица рассеяния для каждой из моделей аэрозолей представляется как средневзвешенная характеристика смеси трех компонент согласно выражению

$$x_{ij}(\theta) = \sum_{k=1}^3 C_v^k \frac{\langle Q_k \rangle r_{\text{эф}}^k}{\langle Q \rangle r_{\text{эф}}^k} x_{ij}^k(\theta), \quad (5)$$

где  $\langle Q_k \rangle$  – усредненный по сечениям фактор эффективности рассеяния  $k$ -й компоненты:

$$\langle Q_k \rangle = \frac{1}{m_2^k} \int_0^\infty Q_k r^2 f_k(r) dr, \quad (6)$$

$\langle Q \rangle$  – соответствующая величина для смеси.

Расчитанные по формулам Ми [8] элементы матрицы расеяния  $x_{11}(\theta)$  для исходных компонент D, W, S и моделей C и U приземного аэрозоля иллюстрирует рис. 1. Естественно, что пылевая компонента D имеет индикатрису с резко выраженным максимумом в направлении вперед. Коэффициент асимметрии, равный отношению света, рассеянного в переднюю и заднюю полусферы, составляет для нее 22,1.

Индикатрисы компонент W и S слабо вытянуты, имеют подобный угловой ход и меньшие значения коэффициента асимметрии, соответственно 8,1 и 2,7.

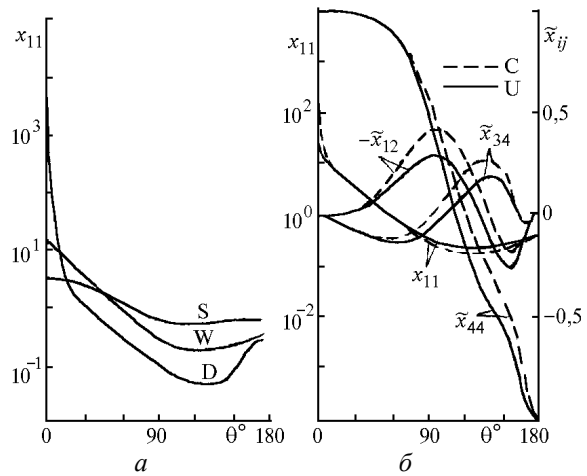


Рис. 1. Элементы матрицы рассеяния света для компонент D, W, S (а) и моделей аэрозолей C, U (б) нижней атмосферы Земли ( $\tilde{x}_{ij} = x_{ij}/x_{11}$ )

Элементы матрицы рассеяния, рассчитанные по (5) для моделей городского (U) и континентального (C) аэрозоля, приведены на рис. 1,б. Угловые функции, соответствующие различным состояниям аэрозоля, как видно из рисунка, имеют качественно подобный вид и слабо выявляют вариацию входных параметров.

Более наглядным и удобным для анализа процесса трансформации аэрозоля является представление оптической информации в виде распределений по дискретному аргументу  $l$  коэффициентов разложения элементов матрицы рассеяния по ОСФ. При учете соотношений симметрии  $x_{11} = x_{22}$  и  $x_{33} = x_{44}$ , имеющих место в приближении сферических частиц, для расчетов коэффициентов разложения можно ограничиться двумя обобщенными сферическими функциями  $P_{00}^l(\mu)$  и  $P_{20}^l(\mu)$ . Коэффициенты разложения вычисляются по формулам [3]:

$$x_l^{ij} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 x_{ij}(\mu) P_{00}^l(\mu) d\mu, \quad ij = \{11, 44\}; \quad (7)$$

$$x_l^{ij} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 x_{ij}(\mu) P_{20}^l(\mu) d\mu, \quad ij = \{12, 34\}. \quad (8)$$

Вычисление интегралов (7), (8) сопряжено с известными трудностями из-за сильно осциллирующего поведения функций  $P_{mn}^l(\mu)$  при больших  $l$ . Нами использована методика, предложенная в [9], которая обеспечивает высокую надежность расчетов.

Распределение по  $l$  коэффициентов разложения диагональных элементов  $x_{11}(\theta)$  и  $x_{44}(\theta)$  матрицы рассеяния, полученные по (7) для исходных компонент D, W, S и шести моделей приземного аэрозоля, отражающих различные стадии его трансформации,

приведены на рис. 2. При  $l \geq 10$  распределения коэффициентов  $x_{11}(\theta)$  и  $x_{44}(\theta)$ , в пределах погрешностей графического представления результатов, практически совпадают. Небольшие различия имеют место лишь в области малых значений  $l$  (кривая 4' соответствует  $x_{11}^{44}$ ). Поэтому дальнейший анализ проводится для распределений  $x_l^{11}$ ; индекс «11» при  $x_l^{11}$  опускается.

Из рис. 2 видно, что как отдельные компоненты, так и различные модели аэрозоля имеют распределения коэффициентов  $x_l$ , существенно отличающиеся друг от друга. Компонентам D, W и S (рис. 2,а) соответствуют одномодальные распределения с различными положениями  $l_m$  максимумов. Так, для компонент S и W с эффективными параметрами дифракции  $\rho_{\text{эф}} = 2\pi r_{\text{эф}}/\lambda = 0,45$  и  $1,14$  целочисленные значения  $l_m$  равны соответственно 1 и 2, а для компоненты D ( $\rho_{\text{эф}} = 114,5$ ) значения  $l_m \sim 135 \div 140$ .

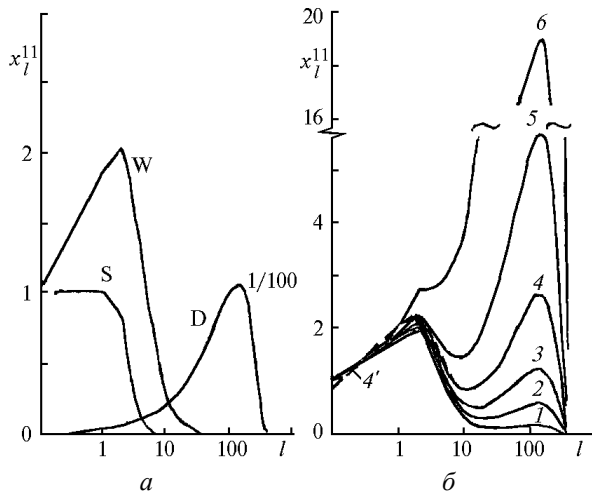


Рис. 2. Распределения по  $l$  коэффициентов разложения диагональных элементов матрицы рассеяния по ОСФ для компонент D, W, S (а) и моделей аэрозоля (б) на разных стадиях его трансформации: 1 –  $C_v^D = 0,05$ ; 2 –  $0,17(U)$ ; 3 –  $0,3$ ; 4, 4' –  $0,5$ ; 5 –  $0,7(C)$ ; 6 –  $0,9$

Процесс трансформации аэрозоля наглядно проявляется в деформации распределений  $x_l$ , построенных для различных моделей на рис. 2,б. Входным параметром, задающим разные стадии  $l - б$  трансформации аэрозоля, служит содержание  $C_v^D$  пылевой компоненты ( $0,05 < C_v^D < 0,90$ ). Видно, что в отличие от компонент D, W, S распределения  $x_l$  для аэрозольных смесей имеют характерный двухмодальный ход. Очевидно, что первый максимум распределения представляет собой два слившихся максимума и отражает присутствие в аэрозоле S- и W-компонент, а второй – пылевой компоненты D. При этом W- и S-компоненты рассматриваются совместно как мелкодисперсная фракция, а D-компонента – как крупнодисперсная фракция. Следует ожидать, что присутствие дополнительной фракции с эффективным параметром дифракции, принимающим промежуточное

значение ( $\sim 10$ ), приведет к трехмодальному распределению. Предварительные оценки показывают, что по распределениям коэффициентов разложения возможность выявления различных составляющих смеси реализуется при условии, если отношение эффективных радиусов их частиц превышает некоторое предельное значение  $K_{\text{пр}} = 4 \div 5$ . Для компонент W и S это отношение составляет  $2,53$ , что недостаточно для их раздельного обнаружения.

Положения максимумов  $l_{mk}$ , как показывают расчеты, практически не зависят от относительного содержания компонент и вариации, в рамках принятой модели трансформации аэрозоля, эффективных значений оптических постоянных  $n$  и  $k$ . Слабая изменчивость положения максимумов свидетельствует о функциональной связи  $l_{mk}$  и эффективных радиусов частиц  $r_{\text{эф}k}$  аэрозольных фракций, которую можно представить в виде оценки  $r_{\text{эф}k} \sim c \lambda l_{mk}$ , где  $c = 0,11 \div 0,14$ . Здесь  $k = \{1, 2\}$  – номер фракции.

При изменении  $C_v^D$  соотношение амплитуд  $x_l$  в максимумах постепенно изменяется, и при крайних значениях  $C_v^D$ , равных  $0,05$  и  $0,9$ , распределения коэффициентов становятся подобными одномодальным, характерным для аэрозольных компонент.

Процесс трансформации аэрозоля, по данным рис. 2,б, контролировался в характерных точках, соответствующих нулевым значениям первой и второй производной. Контролируемые признаки: величина коэффициента разложения во втором максимуме  $x_l(l_{m2})$ , величина коэффициента разложения в минимуме  $x_l(l_{\text{min}})$ , положение минимума  $l_{\text{min}}$ , тангенс угла наклона  $\text{tg} \alpha$  в точке перегиба между минимумом и вторым максимумом. Эти информативные признаки отмечены ниже символами А, Б, В, Г соответственно.

### Анализ стохастических связей

В общем случае, каждый из выделенных информативных признаков подвержен влиянию ряда случайных факторов, вызванных, например, погрешностью расчетов  $\delta_{\text{расч}}$ , погрешностью измерений  $\delta_{\text{изм}}$  элементов матрицы, неточным заданием входных параметров модели  $C_v^D, C_v^W$  или  $r_{\text{эф}}$ , поэтому характеристика их связей требует привлечения понятий математической статистики [11]. Анализ расчетных данных свидетельствует о нелинейном характере зависимостей информативных признаков  $Y = \{x_l(l_{m2}), x_l(l_{\text{min}}), l_{\text{min}}, \text{tg} \alpha\}$  от каждого из входных параметров  $X = \{\delta_{\text{расч}}, \delta_{\text{изм}}, C_v^D, C_v^W, r_{\text{эф}}\}$ . Однако в окрестностях фиксированных значений математического ожидания аргумента нелинейная функция  $y = f(x)$  может быть приближенно представлена линейной зависимостью, производная которой  $f'_x$  определяет величину безразмерного коэффициента чувствительности

$$\xi = \frac{x}{y} f'_x = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} \quad (9)$$

информативного признака к вариациям входного параметра [10].

Коэффициенты чувствительности, приведенные на рис. 3, дают возможность оценить относительные пределы  $\Delta y/y$  изменения величины каждого информативного признака, если заданы параметр модели  $x$  и диапазон  $\Delta x$  его изменения. Так, при трансформации аэрозоля от континентальной модели к модели аэрозоля, задаваемой концентрацией  $C_v^D = 0,5$ , по рис. 3,а легко оценить, что  $x_l(l_{m2})$  изменяется примерно на 70,  $x_l(l_{\min})$  – на 50,  $l_{\min}$  – на 30%. Наиболее чувствительным признаком является  $\text{tg}\alpha$ , однако, как будет показано ниже, его можно использовать в ограниченном числе случаев. Рис. 3,б с данными расчетов чувствительности информативных признаков к изменению  $r_{\text{эф}}$  не требует дополнительных пояснений.

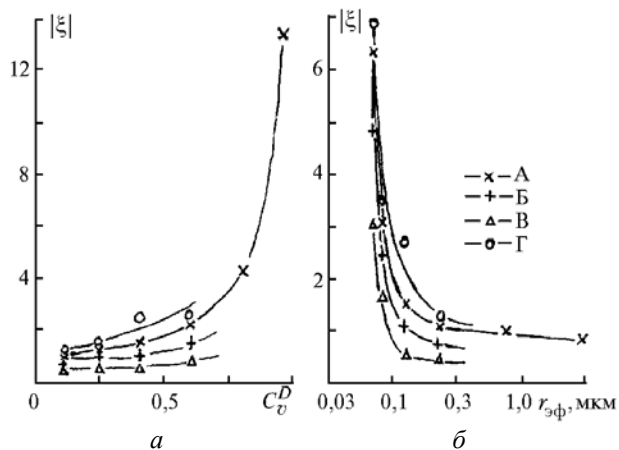


Рис. 3. Коэффициенты чувствительности информативных признаков А, Б, В, Г к входным параметрам  $C_v^D$  (а) и  $r_{\text{эф}}$  (б)

Оценим степень влияния погрешностей расчетов  $\delta_{\text{расч}}$  на величину  $C_v^D$  и  $r_{\text{эф}}$ . Относительная погрешность расчетов коэффициентов разложения по методике [9] не превышает 1% для  $l < 40$  и 10% для  $l > 140$ . Полагая относительную погрешность определения  $x_l(l_{m2})$  равной 10%, а  $x_l(l_{\min})$  – 1%, проводились оценки погрешностей расчетов  $\delta_{\text{расч}}$  для признаков  $l_{\min}$  и  $\text{tg}\alpha$ . Так,  $\delta_{\text{расч}}$  для  $l_{\min}$  принимала значения от 3% для модели U до 12% для модели С, а для  $\text{tg}\alpha$  составила ~3%. Величины  $\delta_{\text{расч}}$ , полученные для каждого из признаков на разных стадиях трансформации аэрозоля, при учете коэффициентов чувствительности  $|\xi|$  использованы затем для определения соответствующих относительных погрешностей входных параметров. Погрешности  $C_v^D$  и  $r_{\text{эф}}$ , обусловленные ошибками расчетов, отражены в табл. 1 и 2.

Из таблиц видно, что для диагональных элементов матрицы погрешности входных параметров  $C_v^D$  и  $r_{\text{эф}}$ , связанные с ошибками расчетов  $x_l$ , изменяются примерно от одного процента для признака Б до нескольких процентов для признака А и Г и в отдельном случае достигают 20,8% (для признака В в диа-

пазоне  $0,151 < r_{\text{эф}} < 0,299$  мкм). Таким образом, в случаях А, Б, Г погрешности расчетов  $\delta_{\text{расч}}$  сравнительно слабо проявляются на величине входных параметров.

Таблица 1

Погрешности расчетов  $C_v^D$ , %, в различных диапазонах для признаков А, Б, В, Г

$C_v$	5–17	17–30	30–50	50–70	70–90	90–100
А	9,83	7,82	6,95	4,61	2,33	0,75
Б	1,28	1,02	1,00	0,65	–	–
В	8,40	9,20	16,7	10,5	–	–
Г	2,73	2,11	1,15	1,19	–	–

Таблица 2

Погрешности расчетов  $r_{\text{эф}}$ , %, в различных диапазонах для признаков А, Б, В, Г

$r_{\text{эф}}$ , мкм	0,063–0,075	0,075–0,094	0,094–0,151	0,151–0,299	0,299–0,920	0,920–10,03
А	1,57	3,25	6,47	9,10	9,49	11,82
Б	0,20	0,42	0,92	1,28	–	–
В	1,34	3,80	15,4	20,8	–	–
Г	0,44	0,87	1,07	2,34	–	–

В условиях реального эксперимента, помимо указанных погрешностей, следует учитывать также случайные погрешности измерения  $\delta_{\text{изм}}$  угловых зависимостей матричных элементов. С этой целью с помощью датчика случайных чисел проводилось моделирование статистических погрешностей измерений и рассчитывались коэффициенты  $K$  усиления ошибок, выражающие чувствительность информативных признаков к такого рода вариациям. Полученные данные для модели С приведены в табл. 3.

Таблица 3

Коэффициенты усиления  $K$  ошибок для информативных признаков А, Б, В, Г

$\delta_{\text{изм}}$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$K_A$	0,83	1,00	1,20	1,25	1,20
$K_B$	0,50	0,63	0,83	0,91	0,77
$K_V$	0	3,23	2,17	1,61	1,30
$K_G$	1,89	2,78	3,33	3,45	3,23

Относительная погрешность измерений  $\delta_{\text{изм}}$  задавалась дискретным рядом значений: 0,02, 0,04, 0,06, 0,08, 0,10, указанным в верхней строке таблицы. Моделируемые случайные числа имели равномерное распределение, характерное для «плохого измерения». Из табл. 3 видно, что признакам В и Г присущи высокие значения коэффициентов  $K$ , достигающие несколько единиц (скачок коэффициента  $K_V$  объясняется дискретным характером признака). По величине коэффициенты  $K_V$  и  $K_G$  сравнимы, а в некоторых случаях и выше значений соответствующих факторов чувствительности  $|\xi|$ , представленных на рис. 3. Здесь вариации информативных признаков  $K\delta_{\text{изм}}$  из-за погрешностей измерений могут выходить

за границы величины  $|\xi| \delta x$ , обусловленной входным параметром  $X$ . Значения  $C_v^D$  и  $r_{эф}$ , соответствующие таким случаям, легко оцениваются по данным рис. 3 и табл. 3. Анализ коэффициентов чувствительности при учете погрешностей измерений показывает, что наиболее информативным признаком по отношению к вариациям параметров микроструктуры является величина коэффициента разложения во втором максимуме  $x_i(l_{m2})$ .

Для учета неточного знания входных параметров, которое на практике всегда имеет место, для каждой из аэрозольных моделей с использованием датчика случайных чисел выполнялось моделирование абсолютных вариаций  $C_v^D$  и  $C_v^W$  в пределах  $\Delta C_v^{DW} = \pm 0,05$ . Углеродная компонента задавалась как разность  $C_v^S = 1 - C_v^D - C_v^W$ . В этом случае, как следует из формулы (3), эффективный радиус частиц смеси  $r_{эф}$  также является случайной величиной.

Таблица 4

Коэффициенты для уравнений регрессии (10)

$T$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m_X; X = C_v^D$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$m_{X_2}; X_2 = C_v^W$	0,63	0,59	0,55	0,49	0,44	0,37	0,29	0,20	0,10
$m_X; X = r_{эф}$	0,08	0,09	0,11	0,13	0,17	0,22	0,31	0,48	0,92
$m_Y$	0,36	0,77	1,25	1,88	2,66	3,83	5,70	9,27	18,4
$r_{XY}; X = C_v^D$	0,77	0,82	0,83	0,75	0,79	0,85	0,85	0,86	0,86
$r_{XY}; X = r_{эф}$	0,34	0,40	0,47	0,47	0,43	0,57	0,62	0,58	0,79
$\alpha_{XY}; X = C_v^D$	0,04	0,08	0,12	0,22	0,32	0,38	0,51	0,66	0,83
$\alpha_{XY}; X = C_v^D$	0,01	-0,13	-0,17	-0,49	-3,23	-3,76	-9,55	-31,4	-147
$\alpha_{XY}; X = r_{эф}$	0,01	0,07	0,06	0,05	0,04	0,02	0,02	0,08	-0,08
$\alpha_{XY}; X = r_{эф}$	-0,12	0,25	0,55	1,19	2,01	2,47	3,35	5,59	7,81
$\beta_{XY}; X = C_v^D$	0,17	0,15	0,14	0,10	0,07	0,06	0,03	0,02	0,01
$\beta_{YX}; X = C_v^D$	3,53	4,49	4,76	5,93	11,8	12,6	21,8	50,8	184
$\beta_{XY}; X = r_{эф}$	0,02	0,03	0,03	0,04	0,05	0,05	0,05	0,04	0,05
$\beta_{YX}; X = r_{эф}$	6,38	5,87	6,58	5,30	3,94	6,13	7,54	7,64	11,6

При учете случайного характера  $\delta_{изм}$ ,  $C_v^D$  и  $C_v^W$  проведен анализ регрессии  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$  ( $X = \{C_v^D, r_{эф}\}$ ,  $Y = x_i(l_{m2})$ ). В общем случае стохастическая связь величин является множественной и необходим учет парных корреляций [10]. Однако, как показали расчеты  $x_i(l_{m2})$  при вариации параметров  $X_2 = C_v^W$  и  $X_3 = \delta_{изм}$ , случайные величины  $x_i(l_{m2})$  и  $C_v^W$ ,  $x_i(l_{m2})$  и  $\delta_{изм}$  попарно практически не коррелированы и для каждой модели аэрозоля функции регрессии  $\hat{\eta}_{YX}(x)$  и  $\hat{g}_{YX}(y)$  могут быть ограничены двумя слагаемыми [10]:

$$\hat{\eta}_{YX}(x) = \alpha_{YX} + \beta_{YX}x; \hat{g}_{YX}(y) = \alpha_{YX} + \beta_{YX}y. \quad (10)$$

Здесь  $x$  и  $y$  – значения случайных величин  $X = X_1 = \{C_v^D, r_{эф}\}$  и  $Y = x_i(l_{m2})$ ;  $\alpha_{YX}$  и  $\alpha_{XY}$  – константы;  $\beta_{YX} = r_{YX}\sigma_Y/\tilde{\sigma}_X$  – коэффициент регрессии  $Y$  на  $X$ ;  $\beta_{XY} = r_{XY}\sigma_X/\sigma_Y$  – коэффициент регрессии  $X$  на  $Y$ ;  $\sigma_X$  и  $\sigma_Y$  – среднеквадратические отклонения. Коэффициент корреляции

$$r_{XY} = r_{YX} = \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y (N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)(y_i - m_y) \quad (11)$$

( $m_x$  и  $m_y$  – математические ожидания  $X$  и  $Y$ ), выражающий степень (меру) связи  $X$  и  $Y$ , определялся по выборке  $N > 100$ , что обеспечивало удовлетворительную (< 5%) погрешность расчетов.

Рассчитанные при  $\delta_{изм} = 0,1$  и  $\Delta C_v^{DW} = \pm 0,05$  коэффициенты для уравнений регрессии (10) приведены в табл. 4.

Номер  $T$  в таблице соответствует различным стадиям трансформации аэрозоля ( $C_v^D = 0,1T$ ). Две верхние строки содержат входные параметры моделей. Видно, что для  $X = C_v^D$  значения коэффициентов корреляции  $r_{XY}$  лежат в диапазоне  $0,7 \div 0,9$ , что согласно принятой [11] классификации соответствует сильной связи. Для  $X = r_{эф}$  коэффициенты корреляции в основном соответствуют средней связи. С ростом  $T$  связь усиливается до значений, соответствующих сильной. Очевидно, что с уменьшением погрешностей  $\delta_{изм}$  и  $\Delta C_v^{DW}$  коэффициент корреляции возрастает, а связь приближается к функциональной.

Расчетные данные для коэффициентов регрессии  $\alpha$  и  $\beta$  в нижней части таблицы для априорно заданных моделей приземного аэрозоля позволяют по (10) получить прогностическую оценку величины условного математического ожидания  $C_v^D$  и  $r_{эф}$  (или  $x_i(l_{m2})$ ) по неслучайным значениям  $x_i(l_{m2})$  (или  $C_v^D$  и  $r_{эф}$ ), полученным при обработке отдельных реализаций диагональных элементов матрицы рассеяния.

#### Коэффициенты разложения недиагональных элементов

Результаты расчетов коэффициентов разложения недиагональных элементов  $x_{12}(\mu)$  и  $x_{34}(\mu)$  матрицы

рассеяния, представленные на рис. 4, свидетельствуют о слабой чувствительности распределений  $x_l^{ij}$  к изменениям параметров  $C_v^D$  и  $r_{эф}$  структуры аэрозоля. Видно, что трансформация аэрозоля от континентальной модели U до городской C, сопровождающаяся изменением  $C_v^D$  от 0,70 до 0,17, приводит в целом к несущественным вариациям распределений. Небольшие различия наблюдаются лишь в областях  $l=2\div 6$  для  $x_l^{12}$  и  $l=6\div 20$  для  $x_l^{34}$ . Максимальное значение безразмерного фактора чувствительности не превышает 0,24 для  $C_v^D$  и 0,4 для  $r_{эф}$ , что существенно ниже значений, полученных для диагональных элементов матрицы в случае признака A.

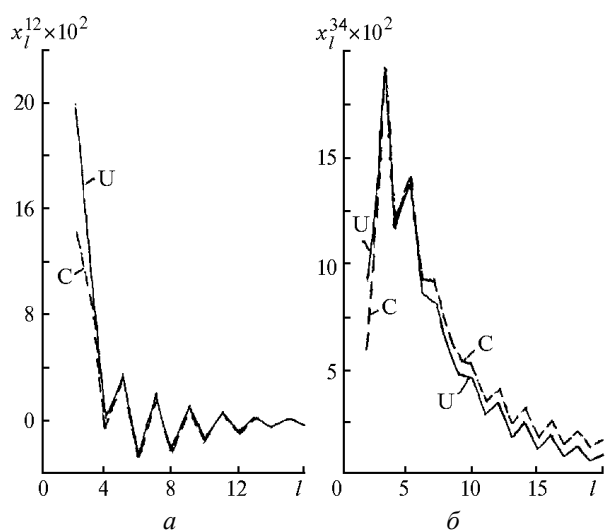


Рис. 4. Коэффициенты разложения недиагональных элементов  $x_{12}(a)$  и  $x_{34}(b)$  матрицы рассеяния по ОСФ для моделей континентального (C) и городского (U) аэрозолей

### Результаты исследования

На базе типичных моделей аэрозоля нижней атмосферы Земли [4 – 7] выполнено исследование информативных свойств коэффициентов разложения элементов матрицы рассеяния по отношению к изменениям параметров его микроструктуры.

Анализ распределений коэффициентов разложения диагональных элементов матрицы рассеяния позволил выявить ряд информативных признаков, находящихся в тесной стохастической или функциональной связи с параметрами микроструктуры и входными параметрами, определяющими трансформацию аэрозоля. Так, количество максимумов в распределениях совпадает с числом аэрозольных фракций.

Номера коэффициентов разложения в первом и втором максимуме находятся в линейной функциональной связи с эффективными радиусами частиц соответственно мелко- и крупнодисперсной фракций. Значение коэффициента разложения во втором максимуме находится в тесной стохастической связи с концентрацией  $C_v^D$  крупнодисперсной фракции, определяющей различные стадии трансформации, а средняя мера связи характерна для эффективного радиуса  $r_{эф}$  частиц смеси.

Проведен анализ связей информативных признаков распределений с входными параметрами моделей. Получены количественные данные о коэффициентах чувствительности информативных признаков к входным параметрам, коэффициентах усиления ошибок из-за случайных погрешностей измерений, погрешностях расчетов коэффициентов разложения, на основе которых выделен признак  $x_l(l_{m2})$ , наиболее информативный по отношению к вариациям параметров  $C_v^D$  и  $r_{эф}$  аэрозоля.

В условиях накопления ошибок, связанных с погрешностями измерений и неточностью априорной информации о моделях, найдены значения коэффициентов корреляции входных параметров  $C_v^D$  и  $r_{эф}$  с информативным признаком  $x_l(l_{m2})$  и построены прогностические функции регрессии для различных стадий трансформации аэрозоля.

Рассчитаны коэффициенты разложения недиагональных элементов  $x_{12}(\theta)$  и  $x_{34}(\theta)$  матрицы рассеяния. Показана их слабая чувствительность к изменению параметров  $C_v^D$  и  $r_{эф}$  аэрозоля в процессе его трансформации.

1. Долгинов А.Э., Гнедин Ю.Н., Силантьев Н.А. Распространение и поляризация получения в космической среде. М.: Наука, 1979. 424 с.
2. Kuscer I., Ribaric M. // Optica Acta. 1959. V. 6. N 1. P. 42–51.
3. Бугаенко О.И. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1976. Т. 12. N 6. С. 603–611.
4. Маров М.Я., Шари В.П., Ломакина Л.Д. Оптические характеристики модельных аэрозолей атмосферы Земли. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1989. 229 с.
5. Ивлев Л.С., Андреев С.Д. Оптические свойства атмосферных аэрозолей. Л.: Изд-во. ЛГУ, 1986. 360 с.
6. Креков Г.М., Рахимов Р.Ф. Оптико-локационная модель континентального аэрозоля. Новосибирск: Наука, 1982. 200 с.
7. Кондратьев К.Я., Поздняков Д.В. Аэрозольные модели атмосферы. М.: Наука, 1981. 103 с.
8. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 536 с.
9. Гаврилович А.Б., Бычек В.И. // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 10. С. 1319–1325.
10. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.
11. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоиздат, 1982. 319 с.

*A.B. Gavrilovich, V.I. Bychek.* **Analysis of Relationship between the Expansion Coefficients of Light Scattering Matrix Elements in Generalized Spherical Functions with the Microstructure Parameters of Ground Aerosol.**

On the basis of typical models of the Earth's lower atmosphere aerosol, an investigation has been made of the informative properties of expansion coefficients of light scattering matrix elements in generalized spherical functions. The relationship has been simulated between the informative properties of expansion coefficients and the aerosol structure parameters in the process of aerosol transformation; the coefficients of correlation between them have been found. Regression functions have been formed for estimating the effective radius of particles of aerosol fractions and their mixtures and the relative content of components at different stages of aerosol transformation.