

ИСТОЧНИКИ И ПРИЕМНИКИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

УДК 535.8:621.37

## Приближенная методика решения задачи о генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах. Часть 1

В.В. Колосов, В.О. Троицкий\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 5.06.2019 г.

Предлагается методика приближенного решения системы уравнений, отвечающих за генерацию второй гармоники в нелинейных одноосных кристаллах, алгоритм которой сводится, по существу, к численному вычислению трехкратного интеграла. Работа состоит из двух частей. В первой рассмотрены два приближения, позволяющие в наиболее сложных для проведения расчетов ситуациях приблизительно на два порядка уменьшить время вычисления двукратных интегралов по поперечным координатам. Во второй части обсуждается приближенный способ оценки мощностей взаимодействующих волн, который позволяет еще на порядок уменьшить время работы программы за счет уменьшения минимально необходимого числа шагов рекуррентного процесса. Результаты проверок, представленные в работе, показывают, что использование предложенных приближений хотя и уменьшает точность решения нелинейной задачи, но тем не менее сохраняет величины ошибок на приемлемо небольшом уровне.

*Ключевые слова:* генерация второй гармоники, система нелинейных уравнений, численные схемы; second harmonic generation, system of nonlinear equations, numerical scheme.

### Введение

В настоящей работе рассмотрен процесс генерации второй гармоники (ГВГ) в квадратично нелинейном одноосном однородном отрицательном кристалле без поглощения. Предполагается, что лазерное излучение, распространяющееся вдоль оси  $Z$  декартовой системы координат, является параксиальным пространственно когерентным и монохроматическим пучком. Режим генерации предполагается либо непрерывным, либо импульсно-периодическим. В последнем случае форма импульсов считается прямоугольной, с длительностью, достаточно большой для уверенного использования квазистатического приближения [1]. Ограничиваясь рассмотрением скалярного «ооо»-взаимодействия, выражения для полей на основной частоте («о»-волна) и второй гармонике (ВГ) («е»-волна) для произвольной плоскости  $z = \text{const}$  внутри нелинейного кристалла будем записывать в виде

$$\mathbf{E}_1(x, y, z) = \mathbf{e}_1 U_1(x, y, z) e^{ikn_0 z}, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_2(x, y, z) = \mathbf{e}_2 U_2(x, y, z) e^{i2kn_2^e z}, \quad (2)$$

где нелинейный кристалл — это слой, заключенный между плоскостями  $z = 0$  и  $z = L$  ( $L$  — длина кристалла); оптическую ось считаем расположенной

в плоскости  $XZ$  декартовой системы координат, в силу чего  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}$  ( $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  — орты осей  $X$  и  $Y$ );  $n_{1o} = n_o(\omega)$ ;  $n_2^e = n_o(2\omega)n_e(2\omega)/\sqrt{n_e^2(2\omega)\cos^2\theta + n_o^2(2\omega)\sin^2\theta}$ ;  $n_o$  и  $n_e$  — главные показатели преломления одноосной среды, зависящие от частот  $\omega$  (основное излучение) и  $2\omega$  (частота ВГ);  $\theta$  — угол между оптической осью кристалла и осью  $Z$  системы координат;  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ .

При сделанных предположениях комплексные медленно меняющиеся амплитуды взаимодействующих волн должны удовлетворять (см., например, [1]) системе нелинейных волновых укороченных уравнений

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{1}{2ikn_0} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial U_1}{\partial y^2} \right) = i\sigma U_1^* U_2 e^{i\Delta_k z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} + \rho \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{1}{4ikn_2^e} \left( \frac{\partial U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial U_2}{\partial y^2} \right) = i\sigma U_1^2 e^{-i\Delta_k z}, \quad (4)$$

где  $\Delta_k = 2k(n_2^e - n_{1o})$  — волновая расстройка;  $\rho$  и  $\sigma$  — угол двулучепреломления и коэффициент нелинейной связи [1]. Уравнения решаются с граничными условиями, определенными на плоскости  $z = 0$ , например, до кристалла. Запишем эти условия в виде

$$U_1(x, y, z = 0) = V_1(x, y), \quad (5)$$

$$U_2(x, y, z = 0) = V_2(x, y). \quad (6)$$

Если для произвольной плоскости  $0 \leq z \leq L$  функции (1), (2) оказались известными в результате

\* Валерий Викторович Колосов (kvv@iao.ru); Владимир Олегович Троицкий (qel@iao.ru).

решения уравнений (3), (4), нетрудно определить, как будет выглядеть результат линейного распространения этих полей до произвольной плоскости  $L_0 = L + z_0$ , расположенной на произвольном расстоянии  $z_0$  от выходной грани кристалла. Для представления таких полей вместо (1) и (2) будем использовать выражения

$$\mathbf{E}_1(x, y, z; L_0) = \mathbf{e}_1 U_1(x, y, z; L_0) e^{ik(n_0 L + z_0)}, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_2(x, y, z; L_0) = \mathbf{e}_2 U_2(x, y, z; L_0) e^{i2k(n_2^g L + z_0)}, \quad (8)$$

где предполагается, что нелинейный кристалл расположен в воздухе (вакууме).

Обратившись к [2], находим, что амплитуды полей (7), (8) и (1), (2) связаны между собой следующими соотношениями:

$$U_1(x_0, y_0, z; L_0) = -T_2 \frac{ik}{2\pi t_L} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_1(x, y, z) \times \exp\left[ik \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2t_L}\right] dx dy, \quad (9)$$

$$U_2(x_0, y_0, z; L_0) = -T_2 \frac{ik}{\pi t_L} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_2(x, y, z) \times \exp\left[ik \frac{(x-x_0 + \rho L)^2 + (y-y_0)^2}{t_L}\right] dx dy, \quad (10)$$

где  $T_2 = 2n/(1+n)$  – коэффициент преломления на выходной грани кристалла [3] в ситуациях, когда  $n_2^g \approx n_0 \equiv n$  (нелинейное взаимодействие осуществляется при малых волновых расстройках);  $t_L = z_0 + (L-z)/n$ .

Подход, позволяющий сразу свести нелинейную задачу к отысканию полей (7), (8), подробно обсуждается в [4–8], и в данной работе эти вопросы не рассматриваются. В [4–8] было показано, что комплексные амплитуды взаимодействующих полей (7), (8) находятся из решения системы интегральных уравнений, которую можно представить в виде рекуррентных уравнений

$$U_1(x_0, y_0, z_{k+1}; L_0) = U_1(x_0, y_0, z_k; L_0) + i \frac{\sigma}{T_2} \Phi_1(x_0, y_0, z_k, \Delta), \quad (11)$$

$$U_2(x_0, y_0, z_{k+1}; L_0) = U_2(x_0, y_0, z_k; L_0) + i \frac{\sigma}{T_2} \Phi_2(x_0, y_0, z_k, \Delta), \quad (12)$$

где  $k$  может принимать значения 1, 2, ...,  $N$ ;

$$\Phi_1(x_0, y_0, z_k, \Delta) = \int_0^{\Delta} e^{i\Delta k(z_k+t)} \text{IN}_1(x_0, y_0, z_k+t) dt;$$

$$\Phi_2(x_0, y_0, z_k, \Delta) = \int_0^{\Delta} e^{-i\Delta k(z_k+t)} \text{IN}_2(x_0, y_0, z_k+t) dt;$$

$$\begin{aligned} \text{IN}_1(x_0, y_0, z_k+t) &= \left[ -\frac{ik}{\pi t_{Lk}} \right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1^*(2x+x_0, 2y+y_0, z_k+t; L_0) \times \\ &\times U_2(x+x_0+\gamma, y+y_0, z_k+t; L_0) \exp\left[ ik \frac{x^2+y^2}{t_{Lk}} \right] dx dy; \\ \text{IN}_2(x_0, y_0, z_k+t) &= \left[ +\frac{ik}{\pi t_{Lk}} \right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x'_0-x, y_0-y, z_k+t; L_0) \times \\ &\times U_1(x'_0+x, y_0+y, z_k+t; L_0) \exp\left[ -ik \frac{x^2+y^2}{t_{Lk}} \right] dx dy; \\ t_{Lk} &= z_0 + (L-z_k-t)/n, \quad x'_0 = x_0 - \gamma, \\ &\quad \gamma = \rho(L-z_k-t). \end{aligned}$$

Считается, что (см. (5), (6) и (9), (10))

$$\begin{aligned} U_1(x_0, y_0, z_1=0; L_0) &\equiv U_{1л}(x_0, y_0, L_0) = -T_1 T_2 \frac{ik}{2\pi t_{L0}} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} V_1(x, y) \exp\left[ ik \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2t_{L0}} \right] dx dy, \\ U_2(x_0, y_0, z_1=0; L_0) &\equiv U_{2л}(x_0, y_0, L_0) = -T_1 T_2 \frac{ik}{\pi t_{L0}} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} V_2(x, y) \exp\left[ ik \frac{(x-x_0 + \rho L)^2 + (y-y_0)^2}{t_{L0}} \right] dx dy, \end{aligned}$$

где  $T_1 = n/(1+n)$  – коэффициент преломления на входной грани кристалла ( $n$  определен выше);  $t_{L0} = z_0 + L/n$ ,

$$z_m = (m-1)\Delta, \quad m = 1, 2, \dots, N+1, \quad \Delta = L/N, \quad (13)$$

Верхний индекс «\*» означает комплексное сопряжение, нижний индекс «л» используется для обозначения линейных полей.

Уравнения (11), (12) представляют собой несколько иную эквивалентную форму исходной системы (3), (4). Поскольку для общего случая аналитических решений обеих систем уравнений не существует, то возможность теоретического описания рассматриваемых нелинейных процессов упирается в разработку подходящей методики приближенного численного интегрирования приведенных систем уравнений. Будем считать методику «подходящей», если выполняются два основных требования. Во-первых, выбранная методика должна обеспечивать удовлетворительную точность решения нелинейной задачи. Во-вторых, время проведения расчетов должно быть по возможности небольшим. Последнее требование имеет принципиальное значение, поскольку планируемое продолжение исследований предполагает выполнение большого объема вычислений. Один из возможных вариантов «подходящей» численной схемы обсуждается в настоящей работе.

Алгоритм предлагаемого приближенного численного решения системы (11), (12) максимально прост и сводится всего лишь к численному вычислению (требуемое количество раз) двойных интегралов вида  $\text{IN}_{1,2}(x_0, y_0, z_k + t)$  любым стандартным способом: формула прямоугольников, трапеций и т.д. Такой вариант решения нелинейной задачи ранее уже использовался [9]. Результаты проведенных исследований показали, что он позволяет достаточно быстро и точно получить численные представления для комплексных амплитуд взаимодействующих полей, но только в том случае, когда сносом энергии поля ВГ за счет двулучепреломления [1] можно пренебречь. Если это условие не выполняется, амплитуда ВГ становится быстро осциллирующей функцией по одной из поперечных координат. В результате на этой координатной оси необходимо задавать достаточно большое количество узлов, что увеличивает время работы программы в отдельных случаях больше чем на два порядка, и практическая ценность рассматриваемого подхода становится весьма спорной.

В настоящей работе показано, что отмеченную проблему можно обойти, воспользовавшись двумя достаточно очевидными приближениями. Время работы программы при этом удается сохранить на приемлемом уровне для всех случаев, представляющих практический интерес, но за счет некоторого уменьшения точности расчетов. Однако ошибки, к которым приводит использование предлагаемого, теперь уже приближенного, подхода, оказываются вполне сопоставимыми с теми, которые дают и безупречно строгие численные методы решения системы дифференциальных уравнений (3), (4) [10, 11]. Результаты такого сравнения приводятся ниже.

Из вышесказанного следует, что предлагаемую численную схему можно рассматривать в качестве еще одного достаточно практичного способа решения обозначенной нами нелинейной задачи: программа, реализующая предлагаемый подход, предельно проста, а время ее работы даже в самых сложных случаях остается сравнительно небольшим. Что касается времени, то, как будет показано далее, его можно уменьшить еще приблизительно на порядок. Правда, такая возможность появляется только в тех случаях, когда по условиям задачи требуется найти только величины мощностей взаимодействующих полей на выходе из нелинейного кристалла.

## 1. Конкретизация исходных условий задачи

Рассмотрим следующую задачу. Считаем, что лазерное излучение с длиной волны  $\lambda = 510,6$  нм, падающее на фокусирующую систему, имеет гауссово распределение амплитуды и плоский волновой фронт. Это поле представляем в виде

$$U(x, y) = A_0 \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{a_0^2}\right], \quad (14)$$

где  $A_0 = \sqrt{16P_0/ca_0^2}$ ;  $P_0$  – либо импульсная, либо средняя мощность лазерного излучения в зависимости от выбранного режима генерации (см. Введение).

Оптическую систему, фокусирующую лазерный пучок в нелинейный кристалл, будем считать состоящей из двух скрещенных цилиндрических линз ( $L_x$  и  $L_y$ ).  $L_x$  имеет фокусное расстояние  $f_x$  и фокусирует пучок в плоскости  $XZ$ .  $L_y$  с фокусным расстоянием  $f_y$  фокусирует пучок в плоскости  $YZ$ . «Жесткость» фокусировки будем определять, следуя за [1], с помощью параметров

$$\xi_x = \frac{L}{kn\rho_x^2}, \quad \xi_y = \frac{L}{kn\rho_y^2}, \quad (15)$$

где  $k$ ,  $n$  и  $L$  определены выше;  $\rho_x$  и  $\rho_y$  – радиусы перетяжек, создаваемых линзами  $L_x$  и  $L_y$ . Последние располагаются на таких различных расстояниях до кристалла, чтобы положение перетяжек от обеих линз совпадало с центральной плоскостью кристалла (плоскость  $z = L/2$ ). Понятно, что чем больше величины (15), тем сильнее фокусируется лазерный пучок. В настоящей работе будем предполагать, что параметры фокусировки варьируются в диапазонах  $0,0001 \leq \xi_x \leq 0,3$ ;  $0,0001 \leq \xi_y \leq 4$ . Более сильная фокусировка вряд ли позволит добиться максимальной эффективности линейного преобразования.

Везде ниже будем считать, что поле ВГ на входе в нелинейную среду отсутствует. Тогда при сделанных предположениях для граничных условий, используя (9) и (14), находим

$$\begin{aligned} U_1(x, y, z = 0; L_0) &= U_{1л}(x, y, L_0) = \\ &= A_{1л}(x, y, L_0) \exp\left(ik\frac{x^2}{2R_x}\right) \exp\left(ik\frac{y^2}{2R_y}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$U_2(x, y, z = 0; L_0) = 0. \quad (17)$$

где

$$A_{1л}(x, y, L_0) = A_{00} \exp\left(-\frac{x^2}{a_x^2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a_y^2}\right) e^{i\varphi_0};$$

все использованные константы легко определяются (см., например, [4]).

В качестве нелинейной среды выбираем кристалл ВВО длиной  $L = 1$  см. С использованием [12] для введенных выше характеристик среды были получены следующие значения:  $n = 1,67625$ ,  $\rho = -0,08483$ ,  $\sigma = 0,00159$ ,  $T_1 = 0,74731$ ,  $T_2 = 1,25629$ . Величину волновой расстройки ( $\Delta_k$ ), снова следуя за [1], варьируем, задавая безразмерный параметр

$$\Delta_{k0} = \Delta_k L / 2. \quad (18)$$

В настоящей работе наибольший интерес представляют мощности взаимодействующих полей. В связи с этим расстояние  $z_0$  от выходной плоскости кристалла до плоскости наблюдения можно выбрать сколько угодно большим. Пусть  $z_0 = 10^8$  см. Это

позволяет утверждать, что с большой точностью выполняются неравенства

$$|\rho L|/a_x \ll 1, \quad |\rho L|/z_0 \ll 1, \quad (19)$$

где  $\rho$ ,  $a_x$  и  $L$  определены выше.

Имея в виду все вышесказанное, решение системы (11), (12) представим в виде

$$U_1(x, y, z; L_0) = A_1(x, y, z; L_0) \exp\left(ik \frac{x^2}{2R_x}\right) \exp\left(ik \frac{y^2}{2R_y}\right), \quad (20)$$

$$U_2(x, y, z; L_0) = A_2(x, y, z; L_0) \exp\left(ik \frac{(x - \rho L)^2}{R_x}\right) \exp\left(ik \frac{y^2}{R_y}\right), \quad (21)$$

где  $R_x$  и  $R_y$  определяются из (16). Подставляем (20) и (21) в (11), (12), пренебрегаем малыми величинами из (19), делаем в (11) замену переменных  $x = x + x_0$ ;  $y = y + y_0$  и вместо (11)–(12) получаем

$$A_1(x_0, y_0, z_k; L_0) = A_1(x_0, y_0, z_k; L_0) + i \frac{\sigma}{T_2} \Phi_1(x_0, y_0, z_k, \Delta), \quad (22)$$

$$A_2(x_0, y_0, z_k; L_0) = A_2(x_0, y_0, z_k; L_0) + i \frac{\sigma}{T_2} \Phi_2(x_0, y_0, z_k, \Delta), \quad (23)$$

где  $z_k$  и  $\Delta$  определены в (13),

$$\Phi_1(x_0, y_0, z_k, \Delta) = \int_0^\Delta \exp[i\Delta_k(z_k + t)] \text{IN}_1(x_0, y_0, z_k + t) dt, \quad (24)$$

$$\Phi_2(x_0, y_0, z_k, \Delta) = \int_0^\Delta \exp[-iQ_0(z_k + t)] \text{IN}_2(x_0, y_0, z_k + t) dt, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{IN}_1(x_0, y_0, z_k + t) &= -\frac{ik}{\pi t_{Lk}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1^*(2x - x_0, 2y - y_0, z_k + t; L_0) A_2(x, y, z_k + t; L_0) \times \\ &\times \exp\left[-2ik\rho x \frac{z_k + t}{R_x}\right] \times \exp\left[ik(S_x x^2 + S_y y^2)\right] dx dy, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IN}_2(x_0, y_0, z_k + t) &= \\ &= +\frac{ik}{\pi t_{Lk}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(x - x_0, y - y_0, z_k + t; L_0) \times \\ &\times A_1(x + x_0, y + y_0, z_k + t; L_0) \times \\ &\times \exp\left[-ik(S_x x^2 + S_y y^2)\right] dx dy, \quad (27) \end{aligned}$$

$$Q_0 = \Delta_k - 2k \frac{x_0 \rho}{R_x}, \quad S_x = \frac{1}{t_{Lk}} - \frac{1}{R_x}, \quad S_y = \frac{1}{t_{Lk}} - \frac{1}{R_y}, \quad t_{Lk}$$

определены в (11), (12).

Система уравнений (22), (23) решается с граничными условиями (см. (16), (17))

$$A_1(x_0, y_0, z_1 = 0; L_0) = A_{1L}(x_0, y_0; L_0), \quad (28)$$

$$A_2(x_0, y_0, z_1 = 0; L_0) = 0. \quad (29)$$

Конечная цель расчетов состоит в отыскании функций  $A_{1,2}(x_0, y_0, z_{N+1} = L; L_0)$ , которые, отметим еще раз, определяют поля на основной частоте и частоте ВГ, наблюдаемые на произвольной дистанции  $z_0$  позади кристалла.

Сделаем два замечания общего характера. Первое: системы уравнений (11), (12) и (22), (23) позволяют найти амплитуды взаимодействующих полей после кристалла на некотором расстоянии  $z_0$  от него (плоскость  $L_0$ ) при условии, что на этой плоскости известно (найденно или задано) решение линейной задачи для основного излучения. Отличие этих уравнений в том, что (11), (12) справедливы для любых значений  $z_0 \geq 0$ , а (22), (23) будут давать асимптотически точное решение при  $z_0 \rightarrow \infty$ . И второе: предположение, что лазерное излучение является гауссовым, принципиального влияния на вид уравнений (22), (23) не оказывает. Представление искомого решения в виде (20), (21) будет справедливо и для негауссова профиля амплитуды в поперечном сечении. Более того, в последнем случае, так же как и для ситуации (14), будет выполняться:  $R_x \approx R_y \rightarrow z_0 + L/2n$  при  $z_0 \rightarrow \infty$ . Разумеется, вид функции  $A_{1L}(x_0, y_0; L_0)$  при этом будет отличным от (16).

## 2. Приближенное решение нелинейной задачи

Поскольку строгое решение системы нелинейных уравнений в общем случае не представляется возможным, следует говорить о приближенном численном вычислении интегралов (24), (25). Сделать это можно разными способами, но здесь предлагается использовать метод малых возмущений, широко применяемый в теоретической физике, в том числе и для описания процессов ГВГ [13].

Рассмотрим отношения

$$\Phi_{1,2}(x_0, y_0, z_k, z) / \Delta A_{0m}, \quad (30)$$

где

$$0 \leq z \leq \Delta, \quad (31)$$

функции  $\Phi_{1,2}(x_0, y_0, z_k, z)$  определяются с помощью (24), (25); величина  $\Delta$  определена в (13);  $A_{0m}$  — амплитуда линейного поля на оси пучка в центральной плоскости кристалла ( $z = L/2$ ), которая для рассматриваемых в настоящей работе гауссовых полей простым образом связана с амплитудой  $A_{00}$  из (16).



Отношения (30) стремятся к нулю, если  $A_{0m} \rightarrow 0$ , и к некоторым конечным величинам, если  $\Delta \rightarrow 0$ . В силу этого ничто не запрещает представить уравнения (22), (23) в следующем виде:

$$A_1(x_0, y_0, z_k + z; L_0) = A_1(x_0, y_0, z_k; L_0) + i\mu_\Delta \Phi_1(x_0, y_0, z_k, z) / (\Delta A_{0m}), \quad (32)$$

$$A_2(x_0, y_0, z_k + z; L_0) = A_2(x_0, y_0, z_k; L_0) + i\mu_\Delta \Phi_2(x_0, y_0, z_k, z) / (\Delta A_{0m}), \quad (33)$$

где

$$\mu_\Delta \equiv |\Delta \sigma A_{0m} / T_2|; \quad (34)$$

$z$  определена (31); при  $z = z_{\max} = \Delta$  система уравнений (32), (33) точно совпадает с (22), (23).

Из замечания к (30) следует, что в случае, когда параметр  $\mu_\Delta$  стремится к нулю, к нулю стремится и эффективность нелинейного взаимодействия. В нашем случае последнее означает, что амплитуды  $A_{1,2}(x_0, y_0, z_k + z; L_0)$  становятся неотличимыми от амплитуд  $A_{1,2}(x_0, y_0, z_k; L_0)$ . Причем справедливость сказанного не зависит от того, за счет уменьшения какого из параметров ( $\sigma, \Delta, A_{0m}$ ) стремится к нулю величина  $\mu_\Delta$ . Именно это обстоятельство и позволяет, когда параметр (34) оказывается малым ( $\mu_\Delta < 1$ ), искать решение (32), (33) в виде разложений по степеням (34):

$$A_1(z_k + t) = V_{1,0}(z_k + t) + \mu_\Delta V_{1,1}(z_k + t) + \mu_\Delta^2 V_{1,2}(z_k + t) + \dots, \quad (35)$$

$$A_2(z_k + t) = V_{2,0}(z_k + t) + \mu_\Delta V_{2,1}(z_k + t) + \mu_\Delta^2 V_{2,2}(z_k + t) + \dots, \quad (36)$$

где зависимость от поперечных координат подразумевается;  $0 \leq t \leq \Delta$ .

Подставляем (35), (36) в (32), (33) и приравниваем слагаемые при  $\mu_\Delta$  в одинаковых степенях. В результате получаем, что функции  $(V_{1,2})_0(x_0, y_0, z_k + t) = A_{1,2}(x_0, y_0, z_k; L_0)$  и от переменной  $t$  не зависят. Приравняв слагаемые при  $\mu_\Delta$  в первой степени, находим вид функций  $(V_{1,2})_1(x_0, y_0, z_k + t)$  и т.д. Процесс можно продолжать сколько угодно долго.

В настоящей работе предлагается ограничиться двумя первыми слагаемыми (первое приближение) в (35), (36). Тогда, учитывая вышесказанное, вместо (35), (36) получаем для  $z = \Delta$ :

$$A_1(x_0, y_0, z_{k+1}; L_0) = A_1(x_0, y_0, z_k; L_0) + i \frac{\sigma}{T_2} \int_0^\Delta \exp[+i\Delta_k(z_k + t)] I_1(x_0, y_0, z_k, t) dt, \quad (37)$$

$$A_2(x_0, y_0, z_{k+1}; L_0) = A_2(x_0, y_0, z_k; L_0) + i \frac{\sigma}{T_2} \int_0^\Delta \exp[+iQ_0(z_k + t)] I_2(x_0, y_0, z_k, t) dt, \quad (38)$$

где

$$I_1(x_0, y_0, z_k, t) = -\frac{ik}{\pi t L_k} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_1^*(2x - x_0, 2y - y_0, z_k; L_0) \times A_2(x, y, z_k; L_0) \exp\left[-2ik\rho x \frac{z_k + t}{R_x}\right] \times \exp\left[ik(S_x x^2 + S_y y^2)\right] dx dy, \quad (39)$$

$$I_2(x_0, y_0, z_k, t) = +\frac{ik}{\pi t L_k} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_1(x - x_0, y - y_0, z_k; L_0) \times A_1(x + x_0, y + y_0, z_k; L_0) \times \exp\left[-ik(S_x x^2 + S_y y^2)\right] dx dy, \quad (40)$$

Легко увидеть, что вторые слагаемые в правых частях (37), (38) представляют собой произведения  $\mu_\Delta V_{1,1}(z_k + \Delta)$  и  $\mu_\Delta V_{2,1}(z_k + \Delta)$  соответственно.

В отличие от (22), (23) выражения (37), (38) являются приближенным решением нелинейной задачи, записанным в виде рекуррентных формул. Это связано с тем, что теперь под интегралами в (39), (40) стоят известные функции. Таким образом, решение нелинейной задачи удалось, как и планировалось, свести к численному вычислению ( $N$  раз) интегралов по поперечным ( $x, y$ ) координатам. В настоящей работе интегралы (39), (40) будут вычисляться по формуле трапеций, а интегралы по  $dz$  из (37), (38) — с использованием наиболее простого варианта — формулы прямоугольников. Учитывая последнее, вместо (37), (38) находим

$$A_1(x_0, y_0, z_{k+1}; L_0) = A_1(x_0, y_0, z_k; L_0) + i \frac{\sigma \Delta}{T_2} \exp[+i\Delta_k z_k] I_1(x_0, y_0, z_k, 0), \quad (41)$$

$$A_2(x_0, y_0, z_{k+1}; L_0) = A_2(x_0, y_0, z_k; L_0) + i \frac{\sigma \Delta}{T_2} \exp[+iQ_0 z_k] I_2(x_0, y_0, z_k, 0), \quad (42)$$

где для  $I_{1,2}$  по-прежнему используем (39) и (40);  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Рекуррентные формулы (41), (42) и представляют собой искомое приближенное (первого порядка согласно (35), (36)) решение нелинейной задачи, которое на каждом шаге должно удовлетворять приближенно закону сохранения энергии. Выполнение этого закона можно оценить, введя семейство ошибок

$$O_{E,k} = \frac{P_{1,k} + P_{2,k} - P_{1,k+1} - P_{2,k+1}}{P_{1,k} + P_{2,k}}, \quad (43)$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ ;

$$(P_{1,2})_m(z_m) = \frac{c}{8\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_{1,2}(x_0, y_0, z_m; L_0) \times A_{1,2}^*(x_0, y_0, z_m; L_0) dx_0 dy_0, \quad (44)$$

амплитуды  $A_{1,2}(x_0, y_0, z_m; L_0)$  находятся в ходе реализации процесса (41), (42),

$$P_{1,1} + P_{2,1} = P_{1,1} \equiv P \quad (45)$$

– мощность линейного поля на основной частоте после кристалла.

Понятно, что в рассматриваемом случае ошибки (43) не могут быть равными нулю в принципе, но можно потребовать, чтобы результирующая (суммарная) ошибка

$$O_E = \sum_{k=1}^N O_{E,k} \quad (46)$$

не превышала некоторого априорно заданного значения. Покажем, что это требование представляется достаточно реалистичным.

С использованием (44) видно, что сохранение в (35), (36) только двух первых слагаемых приводит к тому, что все ошибки (43) оказываются порядка  $(\mu_\Delta)^2$ . Тогда, очевидно, получается, что

$$\begin{aligned} |O_E| &= \sum_{k=1}^N |O_{E,k}| \approx \sum_{k=1}^N \mu_\Delta^2 = N\mu_\Delta^2 = \\ &= N|\Delta\sigma A_{0m}/T_2|^2 = N|L\sigma A_{0m}/(NT_2)|^2 = \mu^2/N, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\mu \equiv |L\sigma A_{0m}/T_2| \quad (48)$$

– «полный» малый параметр.

Оценка (47) позволяет сформулировать принципиально важный вывод. Увеличение числа шагов рекуррентного процесса (41), (42) должно уменьшать ошибку (46) до сколько угодно малого значения. Или, другими словами, решение (41), (42) является асимптотически точным при  $N$  из (13), стремящемся к бесконечности. Поэтому если априорно требуемая величина ошибки (46) является разумно малой, то можно ожидать, что найдется такое число шагов  $N_a$ , при котором ошибка  $O_E(N_a)$  окажется близкой к заданной.

Большой интерес представляет случай, когда «полный» малый параметр  $\mu$  из (48) мал настолько, что ошибка (46) оказывается меньше или порядка требуемой уже при  $N = 1$ . Если величины  $L$  и  $\sigma$  считаются постоянными, то переход к этому частному случаю обеспечивается выполнением условия: величина  $P$  из (45) (а значит, и  $A_{0m}$ ) стремится к нулю. Решение нелинейной задачи при этом будет по-прежнему определяться формулами (41), (42), где, как уже отмечалось, полагаем  $N = 1$  ( $\Delta = L$ ). При этом, учитывая, что лазерное излучение является гауссовым пучком, а поле ВГ на входе в кристалл отсутствует, находим для любых  $0 \leq z \leq L$

$$A_1(x_0, y_0, z; L_0) = A_{1L}(x_0, y_0, L_0), \quad (49)$$

$$A_2(x_0, y_0, z; L_0) = i\frac{\sigma}{T_2} A_{1L}^2(x_0, y_0, L_0) \times$$

$$\times \int_0^z \exp[-iQ_0 t] F_{2x}(t) F_{2y}(t) dt \equiv A_{2p}(x_0, y_0, z; L_0), \quad (50)$$

где функция  $Q_0$  определена в (25),

$$F_{2x}(t) = \sqrt{\frac{ik}{\pi t L}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2x^2}{a_x^2}\right) \exp(-ikS_x x^2) dx,$$

$$F_{2y}(t) = \sqrt{\frac{ik}{\pi t L}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2y^2}{a_y^2}\right) \exp(-ikS_y y^2) dy.$$

Явный вид интегралов  $F_{2x}(t)$  и  $F_{2y}(t)$ , которые вычисляются точно, здесь не приводим.

Подход, в рамках которого получается решение (49), (50), называется приближением заданного поля (ПЗП) основного излучения, а интеграл по  $dt$  из (50) иногда называют апертурной функцией [1]. В подавляющем большинстве случаев вид апертурной функции можно определить только численным интегрированием, задавая новую систему узлов на оси  $Z$ , которая может не иметь ничего общего с (13). Решение (50) предполагает использовать ниже для проверки приближенного способа вычисления интеграла (40).

Так же для проверки, но уже интеграла (39), рассмотрим еще один частный случай. Предполагаем, что поле ВГ по-прежнему определяется в ПЗП, т.е. используется (50), а вместо (49) будем использовать следующее выражение:

$$\begin{aligned} A_1(x_0, y_0, z; L_0) &= A_{1L}(x_0, y_0, L_0) + \\ &+ i\frac{\sigma}{T_2} \int_0^z \exp[+i\Delta_k t] I_{1p}(x_0, y_0, t) dt, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} I_{1p}(x_0, y_0, t) &= -\frac{ik}{\pi t L} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} A_{1L}^*(2x - x_0, 2y - y_0, L_0) A_{2p}(x, y, t; L_0) \times \\ &\times \exp[-2ikp_x t/R_x] \exp[ik(S_x x^2 + S_y y^2)] dx dy. \end{aligned}$$

Интеграл  $I_{1p}$  получается из (26) заменой  $A_1$  на  $A_{1L}$  и  $A_2$  на  $A_{2p}$  из (50) с учетом того, что  $\Delta = L$ . Следовательно, (51) позволяет оценить возмущение линейного поля на произвольной плоскости  $z \leq L$  в предположении, что на всей дистанции до этой плоскости основное излучение считается невозмущенным. Решение нелинейной задачи в виде (50), (51) также является достаточно грубым приближением, но для малых величин  $\mu$  из (48) оно будет все-таки несколько точнее (ошибка  $O_E(z)$  будет несколько меньше), чем в ПЗП, т.е. чем решение (49), (50).

Рассмотренное приближение полезно тем, что для ГВГ в гауссовом пучке интегрирование по поперечным координатам, т.е. по  $dx, dy$ , в (51) можно провести точно. Подставляем (50) в (51) и после нескольких, но громоздких расчетов получаем:

$$A_1(x_0, y_0, z; L_0) = A_{1x}(x_0, y_0, L_0) + \left( i \frac{\sigma}{T_2} \right)^2 A_{00}^3 e^{i\varphi} \int_0^z e^{i\Delta k t'} F_{1y}(y, t') \times \left[ \int_0^t e^{-i\Delta k t'} F_{2x}(t') F_{2y}(t') F_{1x}(x, t, t') dt' \right] dt, \quad (52)$$

где  $F_{2x}(t')$  и  $F_{2y}(t')$  определены в (50),

$$F_{1x}(x_0, t, t') = \sqrt{-\frac{ik}{\pi t_L}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2x-x_0)^2}{a_x^2}\right] \times \exp\left(-\frac{2x^2}{a_x^2}\right) \exp\left(i2k \frac{x_p}{R_x}(t-t)\right) \exp(ikS_x x^2) dx,$$

$$F_{1y}(y_0, t) = \sqrt{-\frac{ik}{\pi t_L}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2y-y_0)^2}{a_y^2}\right] \times \exp\left(-\frac{2y^2}{a_y^2}\right) \exp(ikS_y y^2) dy.$$

Интегралы  $F_{1x}$  и  $F_{1y}$  вычисляются точно, но в целях экономии места их явный вид приводить здесь не будем. Отметим лишь один принципиальный момент, который нам потребуется ниже.

Для модуля комплексной функции  $F_{1x}(x, t, t')$  выполняется следующая зависимость:

$$|F_{1x}(x, t, t')| \sim \exp[-W(\xi_x) \rho^2 (t' - t)^2], \quad (53)$$

где  $W(\xi_x)$  – независимый от  $x$ ,  $t$  и  $t'$  параметр, убывающий, например, от  $\sim 27000 \text{ см}^{-2}$  при  $\xi_x = 0,2$  до  $\sim 1000 \text{ см}^{-2}$  при  $\xi_x = 0,007$ . Это означает, что для углов двулучепреломления  $\rho \neq 0$ , наиболее практически интересный случай, величина интеграла  $F_{1x}$  будет очень быстро стремиться к нулю при увеличении разности  $|t' - t|$ .

### 3. Приближенное вычисление интегралов по поперечным координатам

Обратившись к (41), (42), легко увидеть, что реализация предлагаемой численной схемы сводится к многократному ( $N$  раз, где число шагов  $N$  определено в (13)) вычислению двойных интегралов (39), (40), и понятно, что для этого в первую очередь необходимо конкретизировать значения поперечных координат. В настоящей работе предполагалось, что точки  $(x, y)$  и  $(x_0, y_0)$  на плоскости наблюдения совпадают с узлами двумерной сетки размером  $\sim 30 \times 30$ . Максимальные значения поперечных координат привязывались к поперечным размерам линейного поля (16):  $|x_{\max}| \sim 4a_x$ ,  $|y_{\max}| \sim 4a_y$ . Вопрос о конкретизации поперечных координат является важным, но, по нашему мнению, чисто техническим.

Поэтому в целях экономии места останавливаться на этом не будем. Отметим лишь, что в общем случае точность решения нелинейной задачи будет тем выше, чем шире диапазон изменения поперечных координат и чем больше узлов задействуется для вычисления интегралов (39), (40). При этом необходимо учитывать, что увеличение количества узлов на любой из координатных осей  $X$  или  $Y$  в  $n$  раз приведет к увеличению времени работы программы в  $n^2$  раз.

В зависимости от исходных условий возможны две ситуации. Предположим, что выполненным оказывается хотя бы одно из двух условий:

$$\rho \rightarrow 0, \quad \xi_x \rightarrow 0, \quad (54)$$

где  $\rho$  и  $\xi_x$  определены выше.

В этом простейшем случае никаких дополнительных приближений для численного вычисления интегралов (например, по формуле трапеций) вида (39), (40), входящих в (41), (42), не требуется. Для указанной выше сетки размером  $\sim 30 \times 30$  и при  $N \approx 1000$  в (13) время работы программы оказывается вполне приемлемым и составляет  $\sim 1-2$  мин. Точность расчетов при таком «прямом» (т.е. без привлечения каких-либо дополнительных приближений и допущений) способе вычисления интегралов по поперечным координатам оказывается, как будет показано далее, достаточно высокой. Именно такой прямой метод использовался при проведении расчетов в [9].

Если условия (54) не выполняются, то, как будет показано ниже, амплитуда ВГ становится быстро осциллирующей функцией, в нашем случае переменной  $x$ . В результате количество узлов по оси  $X$  надо увеличивать приблизительно на порядок, что, в свою очередь, увеличит время работы программы до нескольких часов и сделает прямой способ вычислений мало подходящим для проведения детальных исследований нелинейных процессов. В силу сказанного предлагается вместо прямого вычисления интеграла по  $dx$  из (40) (а именно для этого интеграла и требуется частая сетка узлов) использовать приближенный вариант, который для определенности будем называть «интерполяционным».

Суть интерполяционного приближения совершенно понятна. Вычисление интеграла по  $dx$  из (40) проводим в два этапа. Сначала находим значения интеграла (40) для небольшого количества значений  $x_0$  (например,  $\sim 30$ , как и в прямом методе). На втором этапе используем найденные значения в качестве узлов для построения интерполяционного полинома Лагранжа [13], порядок которого в рассматриваемом примере не может быть больше 30. Затем, используя этот интерполяционный полином, приближенно находим величину интеграла (40) для любого разумного количества значений  $x_0$ , расположенных между узлами. Обращение к полиному Лагранжа практически не увеличивает время работы программы по сравнению с прямым методом, и, таким образом, нам остается только оценить точность интерполяционного интегрирования.

Поскольку в настоящей работе наибольший интерес представляет определение эффективности ГВГ, постольку и «качество» интерполяционного интегрирования предлагается оценивать с помощью ошибки

$$O_2 = 100\% \cdot (P_{2t} - P_2) / P_{2t}, \quad (55)$$

где  $P_{2t}$  и  $P_2$  — значения мощности ВГ, которые получаются, соответственно, при точном решении нелинейной задачи и при использовании (41), (42) с интерполяционным интегрированием.

Для осуществления указанной проверки в качестве «точного» предлагается использовать решение (49), (50), полученное в ПЗП. В данном случае термин «точное» решение означает, что в (50) интеграл по поперечным координатам (который и подлежит проверке) вычисляется точно. Переход к ПЗП в схеме (41), (42) осуществляется, очевидно, при выполнении условия:  $A_1(x_0, y_0, z_k; L_0) = A_{1,t}(x_0, y_0, L_0)$  для всех  $0 \leq z_k \leq L$ . Имея в виду это условие, реализуем процесс (42) с числом шагов  $N = 50$ , в ходе которого интеграл  $I_2$  вычисляется проверяемым интерполяционным методом. В результате находим мощность  $P_2$ , которую и необходимо подставить в (55).

Результаты проверки представлены на рис. 1 (кривые 1 и 3) в виде зависимости ошибки (55) от  $\ln(\xi_x)$ . Параметр фокусировки  $\xi_x$  изменялся в пределах  $10^{-4} \leq \xi_x \leq 0,3$ . При этом параметр фокусировки  $\xi_y$  случайным образом выбирался из диапазона  $10^{-4} \leq \xi_y \leq 4$ . Для каждой пары параметров фокусировки подбиралось оптимальное значение волновой расстройки  $\Delta_{k0} = (\Delta_{k0})_{opt}$ . Величина последней изменялась в диапазоне от 0 до  $-1,1$ . Мощность основного излучения ( $P_0$  из (14)) варьировалась таким образом, чтобы эффективность нелинейного преобразования

$$\eta = 100\% \cdot \frac{P_2}{P_0} \quad (56)$$

всегда оставалась приблизительно на одном уровне.

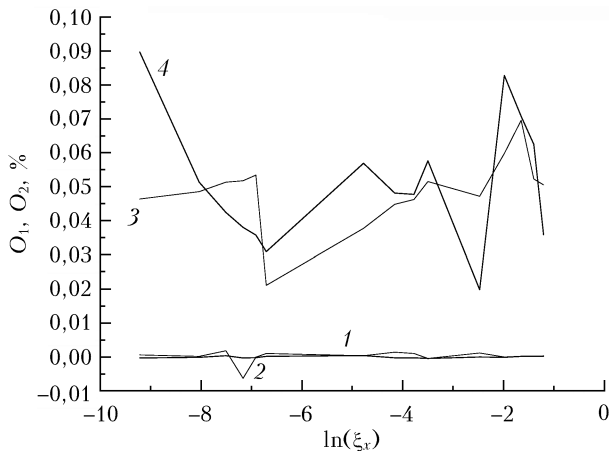


Рис. 1. Зависимость ошибок  $O_1$  (61) (2, 4) и  $O_2$  (55) (1, 3) от параметров фокусировки для случаев  $\rho = 0$  (1, 2) и  $\rho \neq 0$  (3, 4)

Зависимости представлены для двух случаев:

1)  $\rho = 0$ . При этом вычисление интеграла (40) осуществляется прямым способом. Этому случаю на рис. 1 соответствует кривая 1;

2)  $\rho \neq 0$ . При этом интеграл (40) вычислялся интерполяционным способом. Этому случаю на рис. 1 соответствует кривая 3.

На рис. 2 (кривые 1 и 2) представлены зависимости амплитуды ВГ от поперечных координат при двух рассмотренных выше способах решения задачи:  $A_{2,t}(x_0, y_0, L; L_0)$  («точное» решение (50)) и  $A_2(x_0, y_0, L; L_0)$  (используется (42) и интерполяционное интегрирование (40)). В том масштабе, который использован для построения графиков на рис. 2, увидеть небольшие различия между функциями  $A_2$  и  $A_{2,t}$  невозможно — кривые полностью сливаются. Эти совпадающие пары кривых обозначены на рис. 2 цифрами 1 и 2. Расчеты проводились при следующих исходных условиях:

$$\xi_x = 0,2; \quad \xi_y = 3,4; \quad \Delta_{k0} = -0,9. \quad (57)$$

Можно показать, что именно при условиях (57) реализуется максимальная эффективность ГВГ в кристалле ВВО длиной  $L = 1$  см. Правда, это справедливо только в ПЗП.

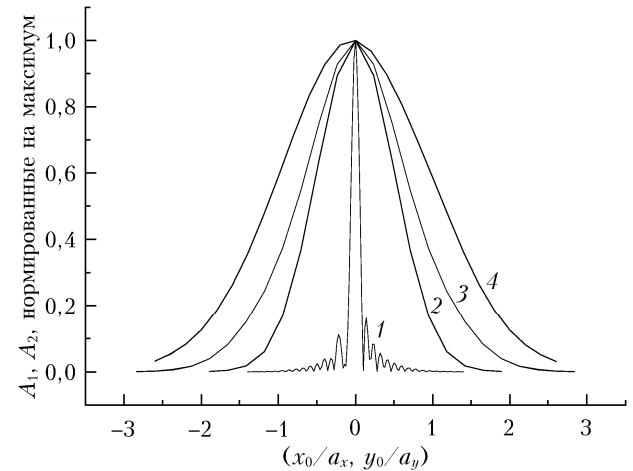


Рис. 2. Зависимость нормированных на максимум амплитуд взаимодействующих полей от поперечных координат:  $A_{2,t}(x_0/a_x, 0, L; L_0)$  (1);  $A_{2,t}(0, y_0/a_y, L; L_0)$  (2);  $A_{1,t}(0, y_0/a_y, L; L_0)$  (3);  $A_{1,t}(x_0/a_x, 0, L; L_0)$  (4)

Обратившись к рис. 2, убеждаемся, что в наиболее интересном для практики случае (57) амплитуда ВГ (по переменной  $x$ ) действительно является довольно быстро осциллирующей функцией. Именно поэтому для ее представления требуется более частая координатная сетка, в силу чего возникает необходимость использования приближенного способа вычисления интеграла (40). Более того, такой осциллирующий характер поля ВГ создает еще одну проблему, связанную уже с вычислением интеграла (39), подынтегральная функция которого прямо зависит от  $A_2(x, y, z_k; L_0)$ . Последнее приводит к тому, что

количество узлов (~30) является приемлемым для корректного представления сравнительно «медленной» функции  $I_1(x_0, y_0, z_k, t)$ , но явно недостаточным для вычисления интеграла по  $dx$  в (39).

Обозначенную проблему решаем следующим образом. Обратимся к решению (52), из которого следует, что величина возмущения линейного поля на основной частоте оказывается пропорциональной экспоненте (53). Исходя из этого, введем величину

$$L_a = -\ln(10^{-3})/W(\xi_x)\rho^2 = L_a(\xi_x, \rho), \quad (58)$$

которая показывает, на какой дистанции  $|t' - t| = L_a$  величина экспоненты уменьшается, например, в 1000 раз по сравнению со своим максимальным значением, наблюдаемым при  $|t' - t| = 0$ . Проведенные исследования показали, что если  $L_a$  определяется из (58), то для всех  $|t' - t| > L_a$  функцию  $|F_{1x}(x, t, t')|$  (а значит и все второе слагаемое в правой части (52)) можно без большой ошибки положить равной нулю. Величину  $L_a$  в теории генерации гармоник называют апертурной длиной [1]. На этом расстоянии пучки на основной частоте и на частоте ВГ пространственно полностью расходятся из-за сноса энергии ВГ, обусловленного анизотропией среды. В результате нелинейное взаимодействие прекращается (согласно (58), уменьшается в  $10^3$  раз). Если угол анизотропии ( $\rho$ ) фиксирован, то  $L_a$  становится функцией только параметра фокусировки  $\xi_x$ . Вид этой зависимости, полученной из анализа (52), представлен на рис. 3. По мере уменьшения параметра  $\xi_x$  величина  $L_a$  растет и при  $\xi_x = \xi_0 \approx 0,007$  становится равной  $L$ . Можно показать, что случаи  $L_a = L$  и  $L_a > L$  в плане проведения расчетов ничем не отличаются. Поэтому, строя зависимость  $L_a(\xi_x)$ , для всех  $\xi_x < \xi_0$ , мы полагали  $L_a = L$ . Отметим, что  $L_a = L$  для любых  $\xi_x$ , если считается, что  $\rho = 0$ .

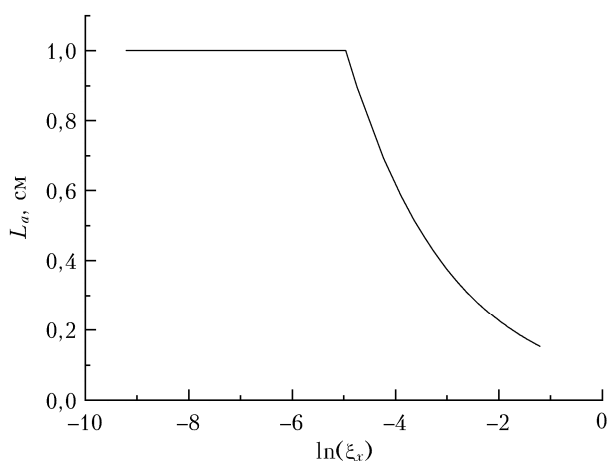


Рис. 3. Зависимость апертурной длины от параметра фокусировки  $\xi_x$

Результаты, представленные на рис. 3, используются следующим образом. Понятно, что амплитуда ВГ —  $A_2(x_0, y_0, z; L_0)$ , всегда определяется инте-

гралом по  $dt$  в пределах от нуля до  $z$  (см., например, (50)). Тогда для любых  $z > L_a$  выполняется

$$A_2 \sim \int_0^z (...)dt = \int_0^{z-L_a} (...)dt + \int_{z-L_a}^z (...)dt \equiv A_{2A} + A_{2B}. \quad (59)$$

Из определения (58) следует, что величина интеграла (39) изменится несущественно, если в его подынтегральной функции полное поле  $A_2(x, y, z_k; L_0)$  заменить функцией  $A_{2B}$  из (59). Другими словами, для функции  $A_2$ , стоящей под интегралом в (39), будем использовать следующее представление:

$$A_2 = \int_0^z (...)dt, \text{ если } z \leq L_a; \\ A_2 \approx \int_{z-L_a}^z (...)dt = A_{2B}, \text{ если } z > L_a. \quad (60)$$

В плане реализации численного интегрирования в (39) использование (60) имеет принципиальное значение в связи с тем, что амплитуда  $A_{2B}$  является «медленной» функцией переменной  $x$  по сравнению с  $A_2$ . Это иллюстрирует рис. 4, где для условий (57) представлена зависимость  $A_{2B}(x_0/a_x, y_0 = 0, L; L_0)$ , которую следует сравнить с графиком 1 на рис. 2. Отсутствие сильных осцилляций функции  $A_{2B}$  по переменной  $x$  позволяет вычислить интеграл по  $dx$  из (39), опираясь на сравнительно небольшое количество узлов.

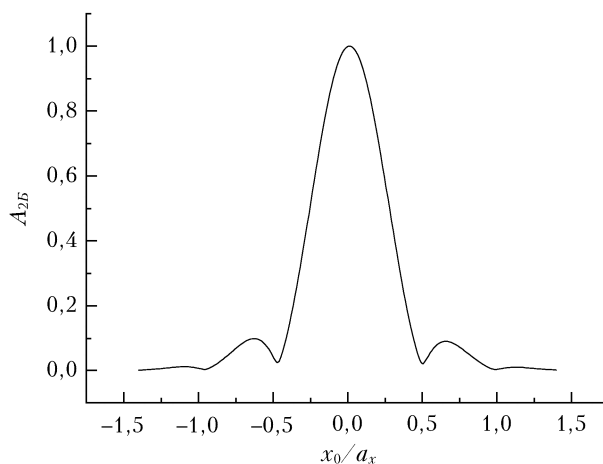


Рис. 4. Зависимость амплитуды ВГ на апертурной длине, нормированной на максимум,  $A_{2B}(x_0/a_x, y_0 = 0, L; L_0)$

Использование приближения (60) должно, очевидно, отразиться на точности решения нелинейной задачи. Чтобы оценить степень этого влияния, введем ошибку

$$O_1 = 100\% \cdot (P_t - P_1)/P_t, \quad (61)$$

где  $P_{1t}$  и  $P_1$  – величины мощности основного излучения, которые получаются, соответственно, при точном вычислении интеграла (39) и при решении по схеме (41), (42) с использованием интерполяционного интегрирования и приближения (60).

В качестве «точного» выражения для амплитуды основного излучения  $A_{1t}(x_0, y_0, z; L_0)$  будем использовать (51), т.е. речь идет о ПЗП в одном из возможных вариантов. Здесь опять термин «точное» решение всего лишь подчеркивает тот факт, что при выводе (51) интеграл (39) вычисляется точно. В рамках численной схемы (41), (42) переход к этому варианту ПЗП обеспечивается выполнением следующего условия: в подынтегральных функциях (39), (40) для всех  $0 \leq z_k \leq L$  считается, что  $A_1(x_0, y_0, z_k; L_0) = A_{1,t}(x_0, y_0, L_0)$ . Получаемое при этом решение обозначаем через  $A_1(x_0, y_0, z; L_0)$ .

Зависимость ошибки (61) от величин параметров фокусировки  $\xi_x$  и  $\xi_y$  показана на рис. 1. Рассмотрены те же два случая, для которых исследовалась ошибка (55): прямое интегрирование ( $\rho = 0$ ) – кривая 2 – и интегрирование с использованием приближений ( $\rho \neq 0$ ) – кривая 4. Совпадающие (как и для поля ВГ) зависимости амплитуд  $A_1$  и  $A_{1t}$  от поперечных координат приведены на рис. 2 (кривые 3 и 4) для исходных условий (57).

## Заключение

Подведем предварительные итоги.

Предложена численная схема (41), (42) решения нелинейной задачи, алгоритм которой сводится к многократному вычислению двойных интегралов (39), (40), например, как в настоящей работе, по формуле трапеций. При выполнении одного из условий (54) указанное численное интегрирование реализуется без каких-либо дополнительных приближений и допущений – «прямое» интегрирование. При этом можно использовать достаточно редкую сетку поперечных координат ( $\sim 30 \times 30$ ), что обеспечивает весьма высокую точность получаемого решения за приемлемо небольшое время работы программы. Последнее подтверждается результатами, показанными на рис. 1 (кривые 1, 2). Если условия (54) не выполняются, то для реализации рекуррентного процесса (41), (42) необходимо привлекать два приближения: интерполяционное интегрирование и представление (60). При использовании этих приближений время работы программы (по сравнению с прямым методом) практически не увеличивается, но величины ошибок (55) и (61) возрастают (рис. 1, кривые 3, 4). Для проведения дальнейших исследований обсуждаемого нелинейного процесса, ради чего собственно и разрабатывается методика расчетов, продемонстрированная точность (ошибки  $O_1$  и  $O_2$  оказались меньше 0,1%) представляется более чем достаточной.

Сделаем еще одно замечание общего характера. Оценить величины ошибок (55) и (61) в настоящих исследованиях возможно благодаря наличию реше-

ний (50) и (51), которые были получены в приближении заданного поля. Возникает естественный вопрос: будут ли предлагаемые приближенные способы вычисления интегралов обеспечивать соизмеримую точность и при «существенно нелинейном режиме генерации гармоник» [1], т.е. в том случае, когда решение (41), (42) будет принципиально отличаться от (50), (51). На эту тему можно рассуждать исходя из различных общих соображений, но достаточно убедительную аргументацию может предоставить только специально организованная проверка, которая будет рассмотрена во второй части работы.

1. *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика. М.: Физматлит, 2004. 512 с.
2. *Творогов С.Д., Троицкий В.О.* Точные и приближенные представления для лазерного пучка в одноосной, однородной среде // Оптика атмосфер. и океана. 2005. Т. 18, № 9. С. 744–753.
3. *Колосов В.В., Троицкий В.О.* Параксиальное приближение для задачи распространения пучков в плоскостной среде // Оптика атмосфер. и океана. 2005. Т. 18, № 9. С. 754–759.
4. *Троицкий В.О.* ГВГ при фокусировке пучка в одноосный кристалл скрещенными цилиндрическими линзами. Приближение заданного поля // Оптика атмосфер. и океана. 2006. Т. 19, № 8. С. 741–747.
5. *Колосов В.В., Троицкий В.О.* Оптимальная фокусировка пучка при генерации второй гармоники в одноосном кристалле. Приближение заданного поля // Оптика атмосфер. и океана. 2007. Т. 20, № 2. С. 106–114.
6. *Троицкий В.О.* Генерация второй гармоники лазерного излучения в одноосных кристаллах. Варианты решения задачи в приближении заданного поля // Оптика атмосфер. и океана. 2010. Т. 23, № 4. С. 281–286; *Troitskii V.O.* Second harmonic generation of laser radiation in uniaxial crystals. Alternate problem solutions in the assumed field approximation // Atmos. Ocean. Opt. 2010. V. 23, N 4. P. 278–283.
7. *Троицкий В.О.* Некоторые вопросы оптимальной фокусировки при генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах. Часть 1. Математический аппарат // Оптика атмосфер. и океана. 2015. Т. 28, № 10. С. 934–940; *Troitskii V.O.* Some problems of optimum focusing in the process of second harmonic generation in nonlinear crystals. Part 1. Mathematical apparatus // Atmos. Ocean. Opt. 2016. V. 29, N 2. P. 191–198.
8. *Троицкий В.О.* Некоторые вопросы оптимальной фокусировки при генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах. Часть 2. Результаты численных расчетов // Оптика атмосфер. и океана. 2015. Т. 28, № 10. С. 941–949; *Troitskii V.O.* Some problems of optimum focusing in the process of second harmonic generation in nonlinear crystals. Part 2. Results of numerical calculations // Atmos. Ocean. Opt. 2016. V. 29, N 2. P. 199–207.
9. *Fleck J.A., Morris J.R., Feit M.D.* Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere // Appl. Phys. A. 1976. V. 10, N 2. P. 129–160.
10. *Коняев П.А., Лукин В.П.* Тепловые искажения фокусированных лазерных пучков в атмосфере // Изв. вузов. Физика. 1983. № 2. С. 79–89.
11. *Kato K.* Second Harmonic Generation to 2048 Å in BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub> // IEEE J. Quant. Electron. 1986. V. QE-22, N 7. P. 1013–1014.

12. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.

13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 831 с.

***V.V. Kolosov, V.O. Troitskii. Approximate technique for solution of the problem on second harmonic generation in nonlinear crystals. Part 1.***

A technique is proposed for approximate solution of the system of equations responsible for second harmonic generation in nonlinear uniaxial crystals. The algorithm of this technique is reduced to numerical calculation of a threefold integrated integral. The study consists of two parts. In the first part, two approximations are considered. These approximations allow the time for computation of twofold integrated integrals with respect to transverse coordinates to be shortened nearly two times in the situations most complicated for computations. The second part discusses an approximate technique for estimation of the power of interacting waves, which also allows the computation time to be decreased by an order of magnitude by means of a decrease in the minimal needed number of steps of the recurrent process. The results of the tests demonstrate that although the use of the approximations proposed decreases the accuracy of solution of the nonlinear problem, but nevertheless keeps the errors at an acceptably low level.