«Оптика атмосферы», т. **3**, № 12 (1990)

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ

УДК 621.375.826:535.3

В.П. Лукин, М.И. Чарноцкий

ОПТИМАЛЬНАЯ ФАЗОВАЯ КОРРЕКЦИЯ СФОКУСИРОВАННЫХ ПУЧКОВ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрен алгоритм выбора оптимальной фазы при коррекции турбулентных флуктуаций сфокусированного гауссова пучка. Исследуется поведение интенсивности. В качестве расчетного метода используется метод континуального интегрирования.

Показано, что для оптимизации средней интенсивности на оси сфокусированного гауссова пучка необходимо использовать для коррекции алгоритм фазового сопряжения, причем в качестве корректирующей используется фаза сферической волны, вычисляемая в приближении метода плавных возмущений.

В настоящей статье рассчитывается средняя интенсивность сфокусированного гауссова пучка, формируемого в турбулентной атмосфере с помощью адаптивной оптической системы, работающей по алгоритму фазового сопряжения. Рассмотрен один из возможных вариантов выбора оптимальной корректирующей фазы для фокусировки пучка излучения.

Известно, что рассеяние света на неоднородностях показателя преломления среды приводит к уширению оптических пучков, появлению флуктуаций интенсивности излучения, уменьшению средней интенсивности в приосевой области, что, в конечном итоге, существенно ухудшает энергетические характеристики оптических систем в атмосфере. Для уменьшения влияния этих атмосферных эффектов применяются различного рода адаптивные системы [1, 2]. В свою очередь адаптивные оптические системы делятся на системы, максимизующие какие-либо функционалы передаваемого поля, и системы, основанные на реализуемости принципа обратимости [1, 2].

Для оптических систем алгоритмом коррекции, реализующим принцип обратимости, является обращение волнового фронта (ОВФ) [3]. Следует отметить, что алгоритм обращения волнового фронта предполагает сопряжение полной фазы волны и воспроизведение амплитуды. Альтернативными методу ОВФ используются алгоритмы адаптивной фазовой коррекции. В этих системах адаптивной оптики управлению подлежит только фаза волны, а распределение интенсивности излучения по начальному сечению пучка сохраняется неизменным. Известно [4], что для линейных сред поле волны, прошедшей слой случайно-неоднородной среды, можно представить в виде суперпозиции от распределения поля на излучающей апертуре

$$U(x_1, \rho) = \iint d^2\rho_1 U_0(\rho_1)\, G(x_1, \rho;\ x_0, \rho_1), \tag{1}$$

где $U_0(\rho_1)$ — начальное распределение поля на излучающей апертуре; $G(x_1, \rho; x_0, \rho_1)$ — функция Грина для случайно-неоднородной среды в слое между плоскостями $x = x_0$ и $x = x_1$. Начальное распределение поля $U_0(\rho_1)$ запишем в виде

$$U_0(\rho_1) = A(\rho_1)\exp(i\varphi(\rho_1)), \tag{2}$$

здесь $A(\rho_1)$ и $\varphi(\rho_1)$ — амплитуда и фаза начального распределения. Фаза $\varphi(\rho_1)$ управляется с помощью адаптивного устройства. Если воспользоваться для функции Грина фазовым приближением [5] вида

$$G(x_1, \rho;\ x_0, \rho_1) = G_0\exp\{iS(x_1, \rho;\ x_0, \rho_1)\}, \tag{3}$$

где G_0 — функция Грина для свободного пространства, а фаза $S(x_1, \rho; x_0, \rho_1)$ характеризует собой флуктуации на трассе (считая, что в сферической волне флуктуации чисто фазовые), получаем, подставив (2), (3) в (1)

$$U(x_1, \rho) = \iint d^2\rho_1 A(\rho_1)\, G_0(x_1, \rho;\ x_0, \rho_1)\exp\{i\varphi(\rho_1) + iS(x_1, \rho;\ x_0, \rho_1)\}. \tag{4}$$

Если считать, что целью коррекции является [7] максимизация функционалов интенсивности в плоскости x_1, тогда получаем условие для оптимальной фазовой коррекции

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}_1) = -S(x_1,\ \boldsymbol{\rho};\ x_0,\ \boldsymbol{\rho}_1). \tag{5}$$

Условие (5) оказывается зависящим от точки наблюдения ρ_1. Для максимизации параметра Штреля

$$I(0) = \iint d^2\rho_{1,2} A(\boldsymbol{\rho}_1) A^*(\boldsymbol{\rho}_2) G_0(x_1,\ 0;\ x_0,\ \boldsymbol{\rho}_1) G_0^*(x_1,\ 0;\ x_0,\ \boldsymbol{\rho}_2)$$

условие (5) переходит в

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}_1) = -S(x_1,\ 0;\ x_0,\ \boldsymbol{\rho}_1), \tag{6}$$

и следовательно, начальная фаза распределения (2) должна быть сопряжена с фазой точечного источника, помещенного в начале координат [7]. При построении адаптивной системы для коррекции искажений может использоваться измеренная фаза волны опорного точечного бакена.

Таким образом, используемая для коррекции по алгоритму фазового сопряжения фаза от опорного точечного источника полностью соответствует фазе, максимизирующей функционалы от интенсивности (при расчете поля в фазовом приближении [5]) для точки, соответствующей положению точечного опорного источника. Это может служить основой построения экспериментального алгоритма коррекции при работе с опорными источниками. В то же время для оценки эффективности применения адаптивных оптических систем коррекции необходимо уметь рассчитывать остаточные фазовые искажения в системе. И здесь важным моментом является используемое приближение для функции $S(x_1,\ \rho;\ x_0,\ \rho_1)$.

В [6] была показана эффективность использования при расчете характеристик скорректированного поля фазы (3) в приближении геометрической оптики. Здесь мы попытаемся найти оптимальную фазу с точки зрения максимизации, например, средней интенсивности. Причем для описания распространения излучения воспользуемся континуальным представлением поля [8, 9], соответствующим приближению параболического уравнения, описывающего распространение волны в случайно-неоднородной среде.

Рассмотрим задачу адаптивной фокусировки гауссова пучка в турбулентной атмосфере. Зададим начальное распределение поля в плоскости $x_0 = 0$ в виде

$$U_0(\boldsymbol{\rho}) = A(\boldsymbol{\rho}) \exp\left\{-i\varphi(\boldsymbol{\rho}) - i\frac{\kappa\rho^2}{2L}\right\}, \tag{7}$$

где $\varphi(\rho)$ — управляемая фаза пучка, а квадратичный фазовый член в (7) обеспечивает фокусировку излучения в однородной среде на заданной дальности $x_1 = L$. Предположим, что оптимальная фаза представляет собой фазу сферической волны и линейно зависит от поля флуктуаций диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x,\ \rho)$ в объеме, заключенном между плоскостями, $x = 0$ и $x = L$. Тогда запишем $\varphi(\rho)$ в виде

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\kappa}{2}\int_0^L d\xi \iint d^2r\,\varepsilon(\xi,\ \mathbf{r})\, M(\xi,\ \boldsymbol{\rho},\ \mathbf{r}). \tag{8}$$

Здесь $M(\xi,\ \rho,\ \mathbf{r})$ — неизвестная функция, которая фильтрует вклады неоднородностей среды в флуктуации фазы на трассе распространения. Функция $M(\xi,\ \rho,\ \mathbf{r})$ тем самым определяет приближение для фазы $\varphi(\rho)$ в (4).

В приближении гауссовых, δ-коррелированных вдоль направления распространения излучения флуктуаций диэлектрической проницаемости, используя континуальное представление поля, выражение для средней интенсивности на оси гауссова пучка с распределением поля (7) может быть записано в виде

$$\langle I(L,\ 0)\rangle = \iint d^2\rho\, d^2\rho' D\mathbf{v} D\mathbf{v}' A(\boldsymbol{\rho}) A^*(\boldsymbol{\rho}') \exp\left\{i\frac{\kappa}{2}\int_0^L [v^2(\xi) - v'^2(\xi)]\, d\xi\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} D(\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\rho}';\ \mathbf{v},\ \mathbf{v}')\right\} \delta\left(\int_0^L \mathbf{v}(\xi)\, d\xi\right) \delta\left(\int_0^L \mathbf{v}'(\xi)\, d\xi\right), \tag{9}$$

где

$$D\mathbf{v} = \prod_{\xi=0}^{L} d\mathbf{v}(\xi) \left\{\int \cdots \int \prod_{\xi=0}^{L} d\mathbf{v}(\xi) \exp\left[i\frac{\kappa}{2}\int_0^L v^2(\xi)\, d\xi\right]\right\},$$

$$D(\rho,\ \rho';\ \mathbf{v},\ \mathbf{v}') = \frac{\pi K^2}{2}\int_0^L d\xi \Big\{ H\Big(\xi,\ (\rho - \rho')(1 - \xi/L) + \int_\xi^L d\eta\,[\mathbf{v}(\eta) - \mathbf{v}'(\eta)]\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\iint d^4 r_{1.2}\, H(\xi,\ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,[M(\xi,\ \mathbf{r}_1,\ \rho) - M(\xi,\ \mathbf{r}_1,\ \rho')]\cdot[M(\xi,\ \mathbf{r}_2,\ \rho) - M(\xi,\ \mathbf{r}_2,\ \rho')] +$$

$$+\iint d^2 r \Big[H\Big(\xi,\ \rho(1 - \xi/L) + \int_\xi^L d\eta \mathbf{v}(\eta) - \mathbf{r}\Big) - H\Big(\xi,\ \rho'(1 - \xi/L) + \int_\xi^L \mathbf{v}'(\eta)\, d\eta - \mathbf{r}\Big)\Big] \times$$

$$\times [M(\xi,\ \mathbf{r},\ \rho) - M(\xi,\ \mathbf{r},\ \rho')]\Big\}, \qquad (10)$$

$H(\xi, \rho) = 2\iint d^2\varkappa\Phi_\varepsilon(\xi. \varkappa)[1 - \cos\varkappa\rho]$, $\Phi(\xi, \varkappa)$ — пространственный спектр флуктуаций $\varepsilon(\xi, \rho)$; $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — континуальные переменные. Используя выражение для $\langle I(L, 0)\rangle$, рассмотрим задачу об оптимальном выборе $\varphi(\rho)$. Для этого вычислим вариационную производную от (5) по функции $M(\xi, \mathbf{r}, \rho)$ и, приравнивая ее нулю, получаем уравнение для определения оптимального ядра.

$$\frac{\delta < I(L,\ 0) >}{\delta M(\tau,\ \mathbf{R},\ \mathbf{p})} = \frac{\pi K^2}{2}\iint d^2\rho D\mathbf{v}D\mathbf{v}' A(\rho)\,\delta\Big(\int_0^L \mathbf{v}(\eta)\, d\eta\Big)\,\delta\Big(\int_0^L \mathbf{v}'(\eta)\, d\eta\Big) \times$$

$$\times \exp\Big\{-\frac{1}{2}D(\mathbf{p},\ \rho;\ \mathbf{v},\ \mathbf{v}')\Big\}\Big\{ H\Big(\tau,\ \mathbf{p}(1 - \tau/L) + \int_\tau^L \mathbf{v}'(\eta)\, d\eta - \mathbf{R}\Big) -$$

$$- H\Big(\tau,\ \rho(1 - \tau/L) + \int_\tau^L \mathbf{v}(\eta)\, d\eta - \mathbf{R}\Big) - \iint d^2 r H(\tau,\ \mathbf{r} - \mathbf{R}) \times$$

$$\times [M(\tau,\ \mathbf{r},\ \mathbf{p}) - M(\tau,\ \mathbf{r},\ \rho)] \cos\Big\{\frac{K}{2}\int_0^L [v^2(\xi) - v'^2(\xi)]\, d\xi\Big\} = 0. \qquad (11)$$

Попытка получения точного решения уравнения (11) наталкивается на значительные трудности как в силу его нелинейного характера по искомой функции M, так и по причине сложной зависимости от континуальных переменных $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$.

Решение (11) может быть получено методом возмущений, что в первом приближении эквивалентно пренебрежению экспонентой (11). Следует отметить, что использование метода возмущений при решении задач, связанных с распространением скорректированных тем или иным способом пучков, является более оправданным, чем для излучения с фиксированными характеристиками, так как целью коррекции является компенсация возмущений, вносимых средой. Случай «слабых возмущений» является более типичным для таких пучков. Анализ на основе возмущений позволяет оценить условия эффективного применения адаптивных оптических систем и определить требования к их характеристикам.

Решение (11) в первом приближении запишется в виде

$$M_1(\tau,\ \mathbf{R},\ \mathbf{p}) = \frac{K}{2\pi\tau(1 - \tau/L)} \sin \frac{K[\mathbf{R} - \mathbf{p}(1 - \tau/L)]^2}{2\tau(1 - \tau/L)}. \qquad (12)$$

Если описывать распространение излучения в фазовом приближении метода Гюйгенса—Кирхгофа [5], то для средней интенсивности получается выражение, аналогичное (9), отличающееся отсутствием $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ в функции $D(\rho, \rho'; \mathbf{v}, \mathbf{v}')$ из выражения (10). Действуя далее так же, как с (9), с выражением для $\langle I(L, 0)\rangle$, вычисленным в фазовом приближении метода Гюйгенса—Кирхгофа, получим вместо (12)

$$M_2(\tau,\ \mathbf{R},\ \rho) = \delta[\mathbf{R} - \rho(1 - \tau/L)]. \qquad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (8), получим выражение для оптимальной корректирующей фазы, совпадающее в первом случае с фазой сферической волны, рассчитанной в первом приближении МПВ, а во втором — с геометрооптическим выражением для фазы сферической волны [10]. Другими словами, оптимальной (в смысле максимизации средней интенсивности на оси) фазой для коррекции искажений гауссова пучка является фаза точечного опорного источника, помещенного в начале координат, и если описание распространения излучения проводить в приближении параболического уравнения, то оптимальная фаза должна вычисляться в первом приближении МПВ.

Докажем, что получаемая при этом фаза (8) является оптимальной: отклонения средней интенсивности от дифракционной минимальны. Для этого сравним остаточные искажения для корректирующей фазы в виде (12) и (13). Пусть исходное амплитудное распределение гауссово

$$A(\rho) = \exp(-\rho^2/2a^2).$$

Проведенный в первом приближении метода возмущений расчет средней интенсивности, нормированной на значение в однородной среде I_0, для фазы в виде (12), (8) приводит к следующему выражению для относительной вариации средней интенсивности:

$$\Delta_1 = \frac{I_0 - \langle I(L,\ 0)\rangle}{I_0} = \frac{\pi\kappa^2}{2}\int_0^L d\xi \iint d^2\varkappa\,\Phi_\varepsilon(\xi,\ \varkappa) \times$$

$$\times\,[1 - \exp(-\varkappa^2 a^2 (1-\xi/L)^2)]\sin^2\frac{\varkappa^2\xi}{2\kappa}(1-\xi/L), \tag{14}$$

а для фазы в виде (13), (8)

$$\Delta_2 = \frac{I_0 - \langle I(L,\ 0)\rangle}{I_0} = \pi\kappa^2\int_0^L d\xi \iint d^2\varkappa\,\Phi_\varepsilon(\varepsilon,\ \varkappa) \times$$

$$\times\,[1 - \exp(-\varkappa^2 a^2 (1-\xi/L)^2)]\left[1 - \cos\frac{\varkappa^2\xi}{2\kappa}(1-\xi/L)\right]. \tag{15}$$

В то же время для сфокусированного пучка в отсутствие коррекции метод возмущения дает

$$\Delta_0 = \frac{I_0 - \langle I(L,\ 0)\rangle}{I_0} = \frac{\pi\kappa^2}{2}\int_0^L d\xi \iint d^2\varkappa\,\Phi_\varepsilon(\xi,\ \varkappa)\,[1 - \exp(-\varkappa^2 a^2 (1-\xi/L)^2)]. \tag{16}$$

Обозначения Δ_0, Δ_1, Δ_2 введены для относительных вариаций средней интенсивности в фокусированном пучке соответственно для системы без коррекции, при коррекции с оптимальной фазой и при коррекции на основе геометрооптической фазы. Введя для степенного спектра $\Phi_\varepsilon(\xi, \varkappa) = 0{,}033 C_\varepsilon^2(\xi)\varkappa^{-11/3}$ безразмерные параметры $\Omega = \kappa a^2 / L$ и $q = \kappa\rho_0^2 / L$, где ρ_0 — радиус когерентности волны [10], преобразуем (16):

$$\Delta_0 = 1{,}1 a^{5/3}\kappa^2 L \int_0^1 dt\, C_\varepsilon^2(Lt)(1-t)^{5/3} = 0(\Omega^{5/6} q^{-5/6}). \tag{17}$$

При $q < \Omega$ (даже если $q > 1$) сфокусированный пучок испытывает сильное уширение.

В широких пучках ($\Omega \gg 1$) из (14) и (15) получаем соответственно

$$\Delta_1 \simeq \beta_0^2/4,\ \ \Delta_2 \simeq \beta_0^2/2^{5/6}, \tag{18}$$

где

$$\beta_0^2 = 0{,}56\kappa^{7/6} L^{11/6}\int_0^1 dt\, C_\varepsilon^2(Lt)\, t^{5/6}(1-t)^{5/6} = 0(q^{-5/6}).$$

В то же время для узких пучков ($\Omega \ll 1$) имеем

$$\Delta_1 \simeq 0{,}54 a^{5/3} \kappa^2 L \int_0^1 dt C_\varepsilon^2 (Lt)(1-t)^{5/3} \simeq 0{,}49 \Delta_0, \tag{19}$$

$$\Delta_2 \simeq 2{,}2 a^{5/3} \kappa^2 L \int_0^1 dt C_\varepsilon^2 (Lt)(1-t)^{5/3} \simeq 2\Delta_0. \tag{20}$$

Малость первых частей (18), (19) и (20) является как условием полной коррекции уширения пучка, так и условием применимости метода возмущений к расчету средней интенсивности совместно с (12) и (13). Как следует из (18), в широких пучках применение любого из способов фазовой коррекции (12) или (13) приводит к практически полной коррекции уширения при $1 < q < \Omega$, когда, как видно из (17), нескорректированный пучок сильно уширен, причем относительное изменение вариаций осевой интенсивности за счет коррекции составляет

$$\frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_0} \sim 0\left(\Omega^{-5/6}\right).$$

При переходе к узким пучкам ($\Omega \ll 1$), как видно из сравнения (17), (19), (20), эффективность коррекции по алгоритму (7), (8) существенно ухудшается. Так, оптимальная фазовая коррекция дает увеличение средней интенсивности примерно вдвое, а коррекция (13) даже уменьшает среднее значение осевой средней интенсивности Δ_0. Этот результат является ожидаемым, так как из [6] следует, что коррекция в узком пучке с использованием точечного опорного источника малоэффективна (не удается сколько-нибудь существенно изменить в результате такой фазовой коррекции значения моментов распределения интенсивности). Даже само разложение поля в виде (1) для узкого пучка неприменимо. В этой же работе показано, что для коррекции искажений в узких пучках необходимо использовать широкий опорный источник, в пределе — опорную плоскую волну.

Полученные в данной статье результаты являются последовательным обоснованием коррекции по алгоритму фазового сопряжения. Предложенную методологию поиска оптимальной фазы можно развивать в дальнейшем, но при условии согласования метода вычисления и той характеристики, которая при этом оценивается.

В то же время выводы работы [7] имеют отношение только к области применимости фазового приближения, если использовать полученные в ней результаты для расчета качества коррекции.

1. Адаптивная оптика /Под ред. Д. Фрида. Сборник статей. М.: Мир, 1980. 482 с.
2. Харди Дж.У. //ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 6. С. 31–89.
3. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах/Сборник научных трудов. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 205.
4. Гельфгат В.И. //Акустический журнал. 1976. Т. 22. № 1. С. 123.
5. Миронов В.Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1981. С. 247.
6. Лукин В.П. //Квантовая электроника. 1981. Т. 8. № 10. С. 2145.
7. Бакут П.А., Логинов В.А. //Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 6. С. 1167.
8. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. 238 с.
9. Чарноцкий М.И. //V Всесоюз. симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. (Тезисы докл.). Томск. 1979. Ч. II. С. 74–78.
10. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
15 сентября 1990 г.

V.P. Lukin, M.I. Charnotskii. **Optimal Phase Correction of Focused Beams in Randomly Inhomogeneous Media.**

An algorithm is considered in the paper for optimal selection of the phase when correcting the focused Gaussian beam for the influence of the turbulent fluctuations. In calculations we used the continuous integration method. It is shown that optimization of the mean intensity on the axis of a focused Gaussian beam requires the use of the phase conjugation method for making correction, and of the spherical wave phase as a correcting one, the spherical wave phase being calculated using the smooth perturbation method.