«Оптика атмосферы и океана», **20**, № 12 (2007)

УДК 535.31; 681.7; 53.082.5

Л.А. Больбасова, В.П. Лукин

Лазерные опорные звезды и модели атмосферной турбулентности

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 29.08.2007 г.

Анализируется качество изображения внеатмосферного объекта, формируемого астрономической оптической системой через турбулентную атмосферу. Рассчитано относительное увеличение параметра Штреля изображения при адаптивной коррекции на основе применения техники лазерных опорных звезд. Сравнивается эффективность адаптивной коррекции искажений для различных видов опорных источников. Применяется специальный датчик волнового фронта, работающий с использованием широкого лазерного пучка в качестве опорной волны. Расчеты выполнены для различных моделей высотной зависимости структурного параметра показателя преломления турбулентной атмосферы. Применяется специальный датчик волнового фронта, позволяющий восстановить непрерывную фазу опорной волны. Как показывают оценки, сформированное поле достаточно близко по параметрам к плоской волне. Поэтому получаем высокую коррекцию и большое увеличение параметра Штреля, что косвенно указывает на хорошую коррекцию высших модовых составляющих, которые плохо корректируются при использовании традиционных схем формирования лазерной опорной звезды с помощью фокусированного лазерного пучка. Как показали сравнительные расчеты для различных моделей высотного изменения структурного параметра показателя преломления, имеют место серьезные отличия в поведении радиусов корреляции для плоской и сферической волн.

Введение

Атмосферная турбулентность является серьезным ограничением для астрономических наблюдений. Применение адаптивных оптических систем может значительно улучшить качество наблюдаемых через атмосферу изображений. В адаптивных системах информация о распределении турбулентных неоднородностей среды на трассе распространения измерения извлекается из измерений с использованием опорных источников. Опорный источник как объект с известным амплитудно-фазовым распределением, находящийся на известном расстоянии, может быть сформирован непосредственно на поверхности объекта, изображение которого анализируется в оптической системе, или это может быть опорный источник, вынесенный на бесконечность (опорная естественная звезда), наконец это может быть опорный источник, расположенный в атмосфере, так называемая лазерная опорная звезда (ЛОЗ). В данной статье рассмотрен новый способ формирования лазерной опорной звезды.

Исходные положения

Пусть наблюдаемый с помощью астрономического телескопа объект (естественная звезда) находится на бесконечности. Формируемая им волна на входной апертуре телескопа представляет собой плоскую волну. Предположим, что опорный источник помещен в плоскость x. Входная апертура телескопа, строящего изображение внеатмосферного источника, аппроксимируется экспоненциальной функцией $W(\rho) = \exp(-\rho^2/2R^2)$, действие телескопа заменим эквивалентной линзой, вносящей фазовый член $\exp(-ik\rho^2/2f)$, где f — эквивалентное фокусное расстояние оптической системы телескопа; $2R$ — диаметр входной апертуры телескопа. Рассмотрим случай адаптивной коррекции искажений на основе алгоритма фазового сопряжения с использованием данных измерений волнового фронта от лазерной опорной звезды. При этом обычно предполагается для традиционной ЛОЗ, что ее видимый размер таков, что она не разрешается оптической системой телескопа, поэтому может рассматриваться как точечный источник.

Фаза волны с волновым числом излучения $k = 2\pi/\lambda$ от точечного опорного источника в плоскости входной апертуры телескопа $x=0$ может быть записана как

$$S_{\text{оп}}(0,\boldsymbol{\rho}) = kx + \frac{k\rho^2}{2x} + S_{\text{сф}}(0,\boldsymbol{\rho};x,0), \qquad (1)$$

где $S_{\text{сф}}(0,\boldsymbol{\rho};x,0)$ — обусловленная турбулентностью случайная фаза сферической волны при ее распространении из плоскости x в точку $\boldsymbol{\rho}$, лежащую в плоскости входной апертуры телескопа $x=0$. Здесь предполагается, что точечный источник расположен на оптической оси телескопа. Это означает, что условия работы адаптивной оптической системы позволяют сформировать опорный источник на той же оптической оси, на которой наблюдается исследуемый объект. При формировании в фокальной плоскости телескопа ($x = -f$) изображения естественной звезды получаем поле в следующем виде:

$$U(-f,\rho) = \iint d^2\rho_1 \exp(-\rho_1^2/2R^2)\exp(-\rho_1^2/2f)\times$$
$$\times G_0(0,\rho_1;-f,\rho)\exp[iS_{\text{пл}}(\rho_1)]. \qquad (2)$$

Здесь $G_0(0,\rho_1;-f,\rho)$ — функция Грина для свободного пространства; $S_{\text{пл}}(\rho_1)$ — фазовые флуктуации, обусловленные атмосферной турбулентностью, для плоской волны на входной апертуре телескопа. Выражение (2) записано в предположении, что распределение поля можно представить как дифракционный интеграл Кирхгофа [1] при условии, что на входную апертуру падает плоская волна с фазовыми искажениями $S_{\text{пл}}(\rho_1)$. Для большинства астрономических приложений можно учитывать только фазовые флуктуации в падающей волне, амплитудные флуктуации вносят меньший вклад по сравнению с фазовыми. Можно показать [5], что в результате фазовой адаптивной коррекции с использованием флуктуационной части сферической опорной волны (1) от ЛОЗ скорректированное поле в фокальной плоскости примет вид

$$U(-f,\rho) = \iint d^2\rho_1 \exp(-\rho_1^2/2R^2)G_0(0,\rho_1;-f,\rho)\times$$
$$\times\exp[iS_{\text{пл}}(\rho_1) - iS_{\text{сф}}(x,0;0,\rho_1) - ik\rho_1^2/2f]. \qquad (3)$$

Отметим, что в выражении (3) интеграл вычисляется в пределах входной апертуры телескопа, т.е. по кругу площадью πR^2.

В настоящее время практически все лазерные опорные звезды создаются фокусировкой лазерного излучения с поверхности земли. Однако использование сфокусированных лазерных пучков для формирования опорной звезды обладает серьезным ограничением, связанным с тем, что точечный опорный источник и плоская волна (формируемая от реальной звезды) будут изображаться в различных плоскостях, а также тем, что фазовые флуктуации для плоской и сферических волн отличаются друг от друга по величине. Это приводит к тому, что в результате фазовосопряженной коррекции [5] будет иметь место неполная компенсация искажений. В литературе это явление получило название — «фокусный неизопланатизм» [2].

Ориентированный датчик волнового фронта

Для борьбы с проявлением «фокусного неизопланатизма» был предложен ряд подходов. Например, в [2, 3] для формирования ЛОЗ предлагается использовать широкий коллимированный пучок, который освещает достаточно большую область и формирует вторичный источник размером, несколько превышающим диаметр апертуры телескопа. При этом предлагается [4] применить датчик волнового фронта такой конструкции, что каждая из субапертур этого датчика видит только ограниченную часть всей освещенной поверхности ЛОЗ. Мы можем рассматривать такую опорную звезду как диффузно светящуюся поверхность [3, 4], и поскольку поле зрения каждой из субапертур много меньше, чем размер всей этой светящейся области, то дрожание самой ЛОЗ практически не дает вклада в измерение смещения отдельного фрагмента (для отдельной субапертуры). Получается, что отдельная субапертура «не видит» края освещенной поверхности вторичного источника и поэтому собственное дрожание вторичного источника не дает вклад в измерения дрожания его изображения в фокальной плоскости телескопа. В результате измеренное дрожание изображения отдельной субапертуры обусловлено только распространением излучения через турбулентные флуктуации атмосферы на трассе от ЛОЗ до телескопа.

В наших работах [3, 4, 6] было доказано, что для каждой субапертуры мы имеем отдельный вторичный источник, формирумый полем зрения каждой из субапертур. Радиус пространственной когерентности поля такого вторичного парциального источника (диффузно отраженного излучения) можно оценить по формуле $\rho_{\text{ког}} \approx \lambda/\theta$, где $\theta = d/x$ — угол, под которым видна освещенная часть вторичного источника (d — область ЛОЗ, видимая в пределах поля зрения отдельной субапертуры). Если выбрать угол $\theta = d/x < \lambda/r_0^{\text{сф}}$, т.е. угол поля зрения каждой из субапертур будет меньше угла когерентности для сферической волны, то получим [1, 5, 6], что в пределах радиуса когерентности $r_0^{\text{сф}}$ можно считать поле такого парциального вторичного источника когерентным и восстановленную из таких измерений фазу гладко сшивать с соседними субапертурами, в результате удается получить непрерывную фазу. Если использовать квадратную матрицу субапертур и расстояние между соседними субапертурами выбрать равным радиусу когерентности для сферической волны ($d = r_0^{\text{сф}}$), тогда можно гладко сшивать фазу, восстановленную в соседних субапертурах.

Расчет распределения средней интенсивности поля в фокальной плоскости телескопа

Для оценки эффективности предлагаемой новой схемы формирования ЛОЗ выполним сравнительный расчет распределения средней интенсивности для поля в фокальной плоскости телескопа в условиях отсутствия коррекции, при коррекции по традиционной схеме, т.е. на основе формулы (3), и в рамках нового подхода, с использованием коллимированного пучка, формирующего опорную звезду. В последнем случае опорным источником будет служить большая освещенная поверхность, которую с помощью специального датчика волнового фронта [3, 4] разобъем на систему сферических источников (для простоты используем квадратную сетку разбиения, т.е. получаем $N \times N = N^2$ сферических волн), тогда поле (2) после коррекции системой сферических волн [4], при условии, что фаза опорного источника восстанавливается как сплошная, запишется следующим образом:

$$U(-f,\rho)=\sum_{j=1}^{N^2}\iint d^2\rho_1 G_0(0,\rho_1;-f,\rho)\exp(-(\rho_1-\rho_j)^2/2d^2)\times$$
$$\times\exp[iS_{\text{пл}}(\rho_1)-iS_{\text{сф}}(\rho_1;\rho_j)-ik\rho_1^2/2f], \qquad (4)$$

где $S_{\text{сф}}(\rho_1;\rho_j)$ – фазовые флуктуации отдельной сферической волны в точке ρ_1 на входной апертуре телескопа, источник которой находится в плоскости ЛОЗ в точке ρ_j. Заметим, что интеграл в (4) вычисляется по площади отдельной субапертуры $\Sigma = \pi d^2/4$, центр которой находится в точке ρ_j. Всего мы имеем $N \times N = N^2$ таких парциальных опорных волн. Поскольку формируемое вторичной системой источников оптическое поле на входной апертуре телескопа остается когерентным (для отдельной субапертуры) в пределах зоны $d < r_0^{\text{сф}}$, то после суммирования и усреднения по всей апертуре телескопа и по флуктуациям турбулентности атмосферы из (4) получим для распределения средней интенсивности скорректированного поля в фокальной плоскости следующее выражение:

$$\langle I(-f,\rho)\rangle=\sum_{j=1}^{N^2}\sum_{l=1}^{N^2}\iint d^2\rho_1 d^2\rho_2\exp(-(\rho_1-\rho_j)^2/2d^2)\times$$
$$\times\exp(-(\rho_2-\rho_l)^2/2d^2)G_0(0,\rho_1;-f,\rho)\times$$
$$\times G_0^*(0,\rho_2;-f,\rho)\exp(-ik\rho_1^2/2f+ik\rho_2^2/2f)\times$$
$$\times\langle\exp\{i[S_{\text{пл}}(\rho_1)-S_{\text{пл}}(\rho_2)]-i[S_{\text{сф}}(\rho_1;\rho_j)-S_{\text{сф}}(\rho_2;\rho_l)]\}\rangle. \qquad (5)$$

Распределение средней интенсивности для поля в фокальной плоскости телескопа без адаптивной коррекции можно записать аналогично:

$$\langle I(-f,\rho)\rangle=\iint d^2\rho_1 d^2\rho_2\exp(-(\rho_1^2+\rho_2^2)/2R^2)\times$$
$$\times G_0(0,\rho_1;-f,\rho)G_0^*(0,\rho_2;-f,\rho)\times$$
$$\times\exp(-ik\rho_1^2/2f+ik\rho_2^2/2f)\langle\exp\{i[S_{\text{пл}}(\rho_1)-S_{\text{пл}}(\rho_2)]\}\rangle. \qquad (6)$$

Поясним, что здесь угловые скобки обозначают операцию усреднения по флуктуациям турбулентности атмосферы. Оценку относительной эффективности коррекции на основе опорной звезды, формируемой с помощью широкого коллимированного пучка, проведем по сравнению с традиционной схемой. Для этого сравним результат коррекции при использовании одной сферической волны, расположенной на оптической оси телескопа и системы N^2 сферических волн.

Телескоп без адаптивной коррекции

В первую очередь выполним расчет распределения средней интенсивности в фокальной плоскости телескопа в отсутствие коррекции. В подынтегральной части выражения (6) предварительно вычислим сомножитель, связанный с действием атмосферной турбулентности, который стоит в угловых скобках выражения (6). При усреднении по флуктуациям атмосферной турбулентности используем представление о том, что флуктуации фазы S гауссовы и имеют нулевое среднее значение, тогда получим

$$\langle\exp(-iS)\rangle=\exp\left(-\frac{\langle S^2\rangle}{2}\right).$$

Воспользуемся изотропной моделью [1] спектральной плотности флуктуаций показателя преломления, учитывающей внутренний масштаб турбулентности l_0 вида

$$\Phi_n(\kappa,\xi)=0{,}033C_n^2(\xi)\kappa^{-11/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2),$$
$$\kappa_m=5{,}92/l_0.$$

В итоге член, стоящий в угловых скобках выражения (6), при условии $\kappa_m|\rho_1-\rho_2|\gg 1$, запишется следующим образом:

$$\langle\{\ldots\}\rangle=\exp\{-\frac{1}{2}D_s^{\text{пл}}(\rho_1-\rho_2)\}=$$
$$=\exp[-3{,}44|\rho_1-\rho_2|^{5/3}/(r_0^{\text{пл}})^{5/3}]. \qquad (7)$$

Здесь $r_0^{\text{пл}}$ – радиус когерентности для плоской волны при распространении волны из бесконечности в плоскость приемной апертуры телескопа. Далее предварительно вычислим произведение функций Грина свободного пространства, т.е.

$$G_0(0,\rho_1;-f,\rho)G_0^*(0,\rho_2;-f,\rho)=$$
$$=f^{-2}\exp[-ik\rho_1^2/2f+ik\rho_2^2/2f+ik\rho(\rho_1-\rho_2)/f].$$

В итоге распределение интенсивности в фокусе телескопа в условиях вакуума дается формулой

$$I_{\text{вак}}(-f,\rho)=4\pi^2R^4f^{-2}\exp(-k^2\rho^2R^2/f^2). \qquad (8)$$

Для выполнения аналитических расчетов без привлечения численных методов используем квадратичную аппроксимацию для (7), в итоге для телескопа без коррекции имеем

$$\langle I(-f,\rho)\rangle=4\pi^2R^4f^{-2}\times$$
$$\times\frac{\exp[-k^2\rho^2R^2/f^2(1+13{,}76R^2/(r_0^{\text{пл}})^2)}{(1+13{,}76R^2/(r_0^{\text{пл}})^2)}. \qquad (9)$$

Используя (8) и (9), можно рассчитать значение параметра Штреля, представляющего собой отношение значения средней интенсивности (9) на оси системы в случайно-неоднородной среде к значению интенсивности в вакууме, т.е.

$$\mathrm{St}=\langle I(-f,0)\rangle/I_{\text{вак}}(-f,0)=(1+13{,}76R^2/(r_0^{\text{пл}})^2)^{-1}. \qquad (10)$$

Надо заметить, что параметр Штреля является одним из ключевых значений для определения эффективности применения оптико-электронной системы в случайно-неоднородной среде. Этот параметр определяет «проникающую силу» оптико-электронной системы, например в астрономии, он определяет минимальную светимость звезды, которую в состоянии обнаружить телескоп. Из (10) понятно, что значение параметра Штреля системы при наблюдении через турбулентную среду зависит от величины радиуса когерентности плоской волны

$$r_0^{\text{пл}} = 1{,}707\{k^2 \int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)\}^{-3/5}.$$

При этом радиус когерентности рассчитывается по всей толще этой случайно-неоднородной среды.

Традиционная коррекция с использованием сфокусированного пучка

Нетрудно показать аналогичным образом, что для поля, формируемого естественной звездой, в результате адаптивной коррекции с использованием одной опорной звезды, находящейся на оси телескопа [5–8], получаем следующее выражение:

$$<I(-f,\rho)> = \iint d^2\rho_1 d^2\rho_2 \exp(-\rho_1^2/2R^2)\times$$
$$\times\exp(-\rho_2^2/2R^2) G_0(0,\rho_1;-f,\rho) G_0^*(0,\rho_2;-f,\rho)\times$$
$$\times\exp(-ik\rho_1^2/2f + ik\rho_2^2/2f) <\exp\{i[S_{\text{пл}}(\rho_1) - S_{\text{пл}}(\rho_2)] -$$
$$- i[S_{\text{сф}}(x,0;0,\rho_1) - S_{\text{сф}}(x,0;0,\rho_2)]\}>, \qquad (11)$$

при этом член, стоящий в угловых скобках:

$$<\{\ldots\}> = \exp\{-\frac{1}{2} D_s^{\text{пл}}(\rho_1 - \rho_2) - \frac{1}{2} D_s^{\text{сф}}(\rho_1 - \rho_2) +$$
$$+ <S_{\text{пл}}(\rho_1) S_{\text{сф}}(x,0;0,\rho_1)> - <S_{\text{пл}}(\rho_1) S_{\text{сф}}(x,0;0,\rho_2)> +$$
$$+ <S_{\text{пл}}(\rho_2) S_{\text{сф}}(x,0;0,\rho_2)> - <S_{\text{пл}}(\rho_2) S_{\text{сф}}(x,0;0,\rho_1)>\}. \qquad (12)$$

Здесь $D_s^{\text{пл}}(\rho_1 - \rho_2)$, $D_s^{\text{сф}}(\rho_1 - \rho_2)$ — структурные функции фазы для плоской и сферических волн. Для расчетов составляющих уравнения (12) запишем выражение для фазы в плоской и сферической волнах (с центром в начале координат) в приближении геометрической оптики. Поскольку волна идет сверху вниз, то для плоской волны имеем [1]:

$$S_{\text{пл}}(0,\rho) = k \int_0^x d\xi \iint d^2 n(\kappa, x-\xi) \exp(i\kappa\rho + ik\alpha\rho), \qquad (13)$$

где α — угол наклона волнового фронта для звезды по отношению к оси телескопа. Если угол $\alpha = 0$, то это нормально падающая плоская волна. Запишем выражение для сферической волны, исходящей из точки ρ_0 в плоскости x:

$$S_{\text{сф}}(0,\rho) = k \int_0^x d\xi\, n_1[\xi,\ \rho\xi/x + \rho_0(1-\xi/x)]. \qquad (14)$$

Здесь и далее воспользуемся спектральным представлением для флуктуаций показателя преломления

$$n_1(\xi, \mathbf{R}) = \iint d^2 n(\kappa, \xi) \exp(i\kappa\mathbf{R}),$$

тогда для флуктуаций в сферической волне

$$S_{\text{сф}}(0,\rho) = k \int_0^x d\xi \iint d^2 n(\kappa, x-\xi)\times$$
$$\times\exp[i\kappa\rho\xi/x + i\kappa\rho_0(1-\xi/x)].$$

Продолжим вычисление составляющих членов выражения (12) и для краткости записи введем

$$\Delta_j(\rho_1) = S_{\text{пл}}(\rho_1) - S_{\text{сф}}(\rho_1, \rho_j). \qquad (15)$$

Здесь ρ_j, $j = 1,\ldots,N$ — координаты источников сферических волн. Далее получим

$$<[\Delta_j(\rho_1) - \Delta_j(\rho_2)]^2> = <[S_{\text{пл}}(\rho_1) - S_{\text{пл}}(\rho_2)]^2> +$$
$$+ <[S_{\text{сф}}(\rho_1,\rho_j) - S_{\text{сф}}(\rho_2,\rho_j)]^2> -$$
$$-2<[[S_{\text{пл}}(\rho_1) - S_{\text{пл}}(\rho_2)][S_{\text{сф}}(\rho_1,\rho_j) - S_{\text{сф}}(\rho_2,\rho_j)]> . \qquad (16)$$

Воспользуемся также изотропной моделью [1] спектральной плотности флуктуаций показателя преломления, и тогда для условия $\kappa_m|\rho_1 - \rho_2| \gg 1$ первые два слагаемых (12) будут иметь вид:

$$D_s^{\text{пл}}(\rho_1 - \rho_2) + D_s^{\text{сф}}(\rho_1 - \rho_2) =$$
$$= 2{,}94k^2\{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) + \int_0^x d\xi(\xi/x)^{5/3} C_n^2(x-\xi)\}|\rho_1 - \rho_2|^{5/3}, \qquad (17)$$

а взаимные члены из (12) дают

$$-2<[S_{\text{пл}}(\rho_1) - S_{\text{пл}}(\rho_2)][S_{\text{сф}}(\rho_1,\rho_j) - S_{\text{сф}}(\rho_2,\rho_j)]> =$$
$$= -8\pi^2 0{,}033k^2 \int_0^x d\xi C_n^2(x-\xi) \int_0^\infty d\kappa\kappa\kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)[\ldots], \qquad (18)$$

где для удобства обозначения, суммируя все эти члены, запишем их в виде $[\ldots] = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = -2\pi J_0[\kappa(1-\xi/x)|\rho_1 - \rho_j|],$$
$$I_2 = -2\pi J_0[\kappa(1-\xi/x)|\rho_2 - \rho_j|],$$
$$I_3 = 2\pi J_0[\kappa|\rho_j(1-\xi/x) - \rho_2 + \rho_1\xi/x|],$$
$$I_4 = 2\pi J_0[\kappa|\rho_j(1-\xi/x) - \rho_1 + \rho_2\xi/x|].$$

Видно, что для расчета всех четырех членов в (18) нужно вычислить следующий интеграл:

$$-2\langle[S_{\text{пл}}(\rho_1)-S_{\text{пл}}(\rho_2)]\cdot[S_{\text{сф}}(\rho_1,\rho_j)-S_{\text{сф}}(\rho_2,\rho_j)]\rangle=$$

$$=-8\pi^2 0{,}033k^2\int_0^x d\xi C_n^2(x-\xi)\int_0^\infty d\kappa\kappa\kappa^{-11/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)[\ldots]. \tag{19}$$

Пусть на большей части трассы остается верным неравенство

$$\frac{(1-\xi/x)^2|\rho_1-\rho_j|^2\kappa_m^2}{4}\gg 1,$$

тогда можно воспользоваться в выражении (19) следующей асимптотикой:

$${}_1F_1\left(-5/6,1;-\frac{(1-\xi/x)^2|\rho_1-\rho_j|^2\kappa_m^2}{4}\right)\approx$$

$$\approx\frac{(1-\xi/x)^{5/3}}{\Gamma(11/6)}\frac{|\rho_1-\rho_j|^{5/3}}{2^{5/3}}\kappa_m^{5/3}.$$

В результате чего получим

$$\int_0^\infty(\ldots)d\kappa=\frac{\Gamma(-5/6)}{2^{8/3}\Gamma(11/6)}(1-\xi/x)^{5/3}|\rho_1-\rho_j|^{5/3}.$$

Просуммировав все 6 членов выражения (16), имеем

$$\langle[\Delta_j(\rho_1)-\Delta_j(\rho_2)]^2\rangle=$$

$$=-8\pi^2 0{,}033k^2\int_0^x d\xi C_n^2(x-\xi)\frac{\Gamma(-5/6)}{2^{8/3}\Gamma(11/6)}\times$$

$$\times[|\rho_1-\rho_2|^{5/3}+(\xi/x)^{5/3}|\rho_1-\rho_2|^{5/3}+$$

$$+(1-\xi/x)^{5/3}|\rho_1-\rho_j|^{5/3}+(1-\xi/x)^{5/3}|\rho_2-\rho_j|^{5/3}-$$

$$-|\rho_j(1-\xi/x)-\rho_2+\rho_1(\xi/x)|^{5/3}-$$

$$-|\rho_j(1-\xi/x)-\rho_1+\rho_2(\xi/x)|^{5/3}]. \tag{20}$$

Далее выполним первую проверку. Положив в (20) $\rho_1=\rho_2$, получим для подынтегрального выражения

$$\langle[\Delta_j(\rho_1)-\Delta_j(\rho_2)]^2\rangle=$$

$$=-8\pi^2 0{,}033k^2\int_0^x d\xi C_n^2(x-\xi)\frac{\Gamma(-5/6)}{2^{8/3}\Gamma(11/6)}\times$$

$$\times[|\rho_1-\rho_1|^{5/3}+(\xi/x)^{5/3}|\rho_1-\rho_1|^{5/3}+$$

$$+(1-\xi/x)^{5/3}|\rho_1-\rho_j|^{5/3}+(1-\xi/x)^{5/3}|\rho_1-\rho_j|^{5/3}-$$

$$-|\rho_j(1-\xi/x)-\rho_1+\rho_2(\xi/x)|^{5/3}-$$

$$-|\rho_j(1-\xi/x)-\rho_2+\rho_1(\xi/x)|^{5/3}]\equiv 0.$$

Следовательно, выражение (20) верно. Рассмотрим далее член, стоящий в квадратной скобке выражения (20):

$$[\ldots]=[|\rho_1-\rho_2|^{5/3}+(\xi/x)^{5/3}|\rho_1-\rho_2|^{5/3}+$$

$$+(1-\xi/x)^{5/3}|\rho_1-\tilde\rho_j|^{5/3}+(1-\xi/x)^{5/3}|\rho_2-\rho_j|^{5/3}-$$

$$-|\rho_j(1-\xi/x)-\rho_2+\rho_1(\xi/x)|^{5/3}-$$

$$-|\rho_j(1-\xi/x)-\rho_1+\rho_2(\xi/x)|^{5/3}].$$

Коэффициент $-8\pi^2 0{,}033\dfrac{\Gamma(-5/6)}{2^{8/3}\Gamma(11/6)}=2{,}82$. Нетрудно показать, что для случая традиционной опорной звезды, когда опорная сферическая волна расположена на оси системы, т.е. значение $\rho_j=0$, в приближении квадратичной аппроксимации имеем

$$\langle[\Delta_j(\rho_1)-\Delta_j(\rho_2)]^2\rangle\approx 2{,}82\int_0^x d\xi C_n^2(x-\xi)[|\rho_1-\rho_2|^2+$$

$$+(\xi/x)^2|\rho_1-\rho_2|^2+(1-\xi/x)^2|\rho_1|^2+(1-\xi/x)^2|\rho_2|^2-$$

$$-|\rho_2-\rho_1(\xi/x)|^2-|\rho_1-\rho_2(\xi/x)|^2]=$$

$$=2{,}82k^2\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)(\xi/x)^2|\rho_1-\rho_2|^2. \tag{21}$$

В итоге в подынтегральном выражении (11), как результат коррекции с использованием одной сферической опорной волны, будет присутствовать сомножитель вида

$$\exp\left[-\frac{|\rho_1-\rho_2|^2}{(r_0^{\text{пл}})^2}\frac{\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)(\xi/x)^2}{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)}\right]. \tag{22}$$

Таким образом, для распределения средней интенсивности в фокальной плоскости телескопа при традиционной схеме коррекции получим выражение

$$\langle I(-f,\rho)\rangle=\frac{4\pi^2R^4}{f^2[1+4R^2/(\tilde r_0^{\text{пл}})^2]}\times$$

$$\times\exp\{-k^2\rho^2R^2/[f^2(1+4R^2/(\tilde r_0^{\text{пл}})^2)]\}, \tag{23}$$

в которое введен радиус когерентности поля $\tilde r_0^{\text{пл}}$ (при коррекции с опорной сферической волной) в виде

$$\tilde r_0^{\text{пл}}=r_0^{\text{пл}}\left[\frac{\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)(\xi/x)^2}{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)}\right]^{-1/2}. \tag{24}$$

В результате параметр Штреля для телескопа, корректируемого с помощью фокусируемой ЛОЗ:

$$\mathrm{St} = [1 + 4R^2/(\tilde{r}_0^{\text{пл}})^2]^{-1}, \quad (25)$$

т.е. в (25), по сравнению с (10), видно существенное увеличение параметра Штреля в результате применения адаптивной коррекции на традиционной основе ЛОЗ. Следовательно, адаптивная коррекция с использованием традиционной сфокусированной ЛОЗ фактически будет эквивалентна увеличению размера когерентной части апертуры телескопа, причем это увеличение оказывается численно равно

$$\left[\frac{\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)(\xi/x)^2}{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)}\right]^{-1/2}$$

и может быть рассчитано с помощью моделей высотного изменения структурного параметра показателя преломления атмосферы $C_n^2(\xi)$.

Модели атмосферной турбулентности

Воспользуемся для численных расчетов моделями вертикального изменения структурного параметра показателя преломления [7–15] и проведем вычисления радиусов когерентности для плоской и сферической волн в условиях вертикального распространения (в этом случае переменная ξ соответствует распространению по вертикали). Сравним флуктуации фазы в плоской и сферической волнах и рассчитаем следующие интегралы:

$$D_s^{\text{пл}}(\rho_1, \rho_2) = 2{,}82k^2|\rho_1 - \rho_2|^{5/3}\int_0^x d\xi C_n^2(\xi) =$$

$$= 6{,}88|\rho_1 - \rho_2|^{5/3}(r_0^{\text{пл}})^{-5/3}, \quad (26)$$

$$D_s^{\text{сф}}(\rho_1, \rho_2) = 2{,}82k^2|\rho_1 - \rho_2|^{5/3}\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)(1-\xi/x)^{5/3} =$$

$$= 6{,}88|\rho_1 - \rho_2|^{5/3}(r_0^{\text{сф}})^{-5/3}, \quad (27)$$

и введем следующие обозначения:

$$r_0^{\text{пл}} = \{0{,}41k^2\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)\}^{-3/5}$$

– радиус когерентности в плоской волне;

$$r_0^{\text{сф}} = \{0{,}41k^2\int_0^x d\xi(1-\xi/x)^{5/3}C_n^2(\xi)\}^{-3/5}$$

– радиус когерентности в сферической волне.

Рассчитаем отношение радиусов корреляции для плоской и сферических волн и получим, что в сферической волне радиус когерентности выше, чем в плоской. Причем это увеличение равно отношению

$$\frac{r_0^{\text{сф}}}{r_0^{\text{пл}}} = \left\{\frac{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)}{\int_0^x d\xi(1-\xi/x)^{5/3}C_n^2(\xi)}\right\}^{3/5}. \quad (28)$$

Данные расчетов радиусов когерентности (для высоты x =100 км) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Модель	$r_0^{\text{пл}}$, см	$r_0^{\text{сф}}$, см
Профиль Геофизической лаборатории ВВС США	20,80	22,90
Модель для обсерватории Сьерра Паранал	13,16	14,80
Профиль турбулентности Хафнагеля–Стенли	5,01	8,10
Модифицированный профиль Хафнагеля–Стенли	8,03	18,70
Турбулентный профиль Гринвуда	12,92	13,10
Профиль для условий ночной атмосферы	19,91	21,97

Данные табл. 1 позволяют оценить размер когерентной площадки или допустимый размер субапертуры, а также сделать оценку параметра Штреля в телескопе без коррекции. Безусловно, эти результаты совпадают с ранее полученными [5, 16–18]. В табл. 2 приведены результаты численного расчета увеличения размера когерентной части апертуры телескопа, которое обусловлено действием адаптивной коррекции. Вычисления сделаны на основе формулы (24) для трех наиболее применимых моделей. Расчеты выполнены для трех высот формирования ЛОЗ – 20, 40 и 100 км.

Таблица 2

x, км	Модель Гринвуда	Модифицированный профиль Хафнагеля–Стенли	Профиль США для условий ночи
20	6,08	5,19	7,07
40	11,32	10,15	13,74
100	27,74	25,82	27,42

Как показывают эти расчеты, увеличение когерентной части телескопа для различных моделей вертикального изменения структурного параметра показателя преломления для высоты x = 100 км составляет от 25 до 27 раз. Таким образом, если радиус когерентности для плоской волны равен, например, 20 см, то традиционная коррекция увеличивает размер когерентной части апертуры телескопа примерно до 5 м. В результате можно констатировать, что традиционная коррекция с использованием одиночной точечной опорной звезды существенно увеличивает эффективность телескопа, но для достаточно больших телескопов (свыше 10 м) традиционная схема не дает «полной» коррекции.

Кроме того, как видно из табл. 1, есть серьезные различия в величинах радиусов когерентности для плоской и сферических волн. Именно эти нюансы различия в радиусах когерентности и использует датчик волнового фронта [3, 4]. В нем размер субапертуры равен радиусу когерентности для сферических волн, который несколько больше радиуса когерентности для плоской волны.

Коррекция с опорной звездой, представляющей собой широкий коллимированнный пучок

Рассчитаем параметр Штреля для телескопа, работающего через турбулентную атмосферу с коррекцией на основе широкого коллимированного пучка. При этом предполагается применение специального датчика волнового фронта. Используя формулу (5), запишем среднюю интенсивность скорректированного поля в следующем виде:

$$<I(-f,\rho)>=\sum_{l=1}^{N^2}\sum_{j=1}^{N^2}\iint d^2\rho_1 d^2\rho_2 G_0(0,\rho_1;-f,\rho)\times$$
$$\times G_0^*(0,\rho_2;-f,\rho)\exp(-(\rho_1-\rho_j)^2/2R^2)\times$$
$$\times\exp(-(\rho_2-\rho_l)^2/2R^2)\exp(-ik\rho_1^2/2f+ik\rho_2^2/2f)\times$$
$$\times<\exp\{i[S_{\text{пл}}(\rho_1)-S_{\text{пл}}(\rho_2)]-$$
$$-i[S_{\text{сф}}(\rho_1;\rho_j)-S_{\text{сф}}(\rho_2;\rho_l)]\}>, \quad (29)$$

где ρ_j, ρ_l $(j, l = 1, \ldots, N^2)$ — координаты источников сферических волн. Повторяя операцию усреднения аналогично выполненным ранее, имеем

$$<[\Delta_j(\rho_1)-\Delta_l(\rho_2)]^2>=$$
$$=-8\pi^2 0{,}033k^2\int_0^x d\xi C_n^2(x-\xi)\frac{\Gamma(-5/6)}{2^{8/3}\Gamma(11/6)}\times$$
$$\times[|\rho_1-\rho_2|^{5/3}+|(1-\xi/x)(\rho_1-\rho_2)+(\xi/x)(\rho_j-\rho_l)|^{5/3}+$$
$$+(\xi/x)^{5/3}|\rho_1-\rho_j|^{5/3}+(\xi/x)^{5/3}|\rho_2-\rho_l|^{5/3}-$$
$$-|\rho_j(\xi/x)-\rho_2+\rho_1(1-\xi/x)|^{5/3}-$$
$$-|\rho_l(\xi/x)-\rho_1+\rho_2(1-\xi/x)|^{5/3}]. \quad (30)$$

Далее, используя квадратичную аппроксимацию вместо 5/3 зависимости, для члена, стоящего в квадратных скобках выражения (28), получим

$$[\ldots]\approx[|\rho_1-\rho_2|^2+|(1-\xi/x)(\rho_1-\rho_2)+(\xi/x)(\rho_j-\rho_l)|^2+$$
$$+(\xi/x)^2|\rho_1-\rho_j|^2+(\xi/x)^2|\rho_2-\rho_l|^2-$$
$$-|\rho_j(\xi/x)-\rho_2+\rho_1(1-\xi/x)|^2-$$
$$-|\rho_l(\xi/x)-\rho_1+\rho_2(1-\xi/x)|^2]=$$
$$=(\xi/x)^2[(\rho_1-\rho_2)-(\rho_j-\rho_l)]^2.$$

В результате для скорректированной средней интенсивности запишем

$$<I(-f,\rho)>=\frac{\exp(-ik\rho(\rho_j-\rho_l)/f)}{f^2}\times$$
$$\times\sum_{l=1}^{N^2}\sum_{j=1}^{N^2}\iint d^2\rho_1 d^2\rho_2\exp(-\rho_1^2/2d^2)\times$$
$$\times\exp(-(\rho_2^2/2d^2)\exp[-ik\rho(\rho_1-\rho_2)/f-$$
$$-1{,}41k^2\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)(\xi/x)^2|(\rho_1-\rho_2)|^2]. \quad (31)$$

Следует отметить, что для внеосевых точек (когда $\rho \neq 0$) в выражении (31) для членов с $j \neq l$ в подынтегральной функции появится осциллирующий множитель вида $\exp[-ik\rho_j(\rho_j-\rho_l)/f]$, поэтому эти члены будут сильно подавлены (примерно как N^{-2}, где N — размерность матрицы субапертур), но для оси системы, т.е. когда $\rho = 0$, выражение (31) переходит в формулу

$$<I(-f,0)>=\frac{N^4}{f^2}\iint d^2\rho_1 d^2\rho_2\exp(-\rho_1^2/2d^2)\exp(-\rho_2^2/2d^2)\times$$
$$\times\exp[-ik\rho(\rho_1-\rho_2)/f-1{,}41k^2\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)(\xi/x)^2|(\rho_1-\rho_2)|^2]. \quad (32)$$

Выражение (32) полностью совпадает с выражением (23) для распределения средней интенсивности при коррекции с использованием традиционной схемы, только в последнем выражении интегрирование ведется не по всей входной апертуре телескопа, а по области субапертуры, размер которой равен $2R/N = d \approx r_0^{\text{сф}}$, и тогда практически вся приемная апертура телескопа становится когерентной. В результате вычислений для адаптивной коррекции с использованием широкого коллимированного пучка параметр Штреля (отношение значения средней интенсивности на оси системы в случайной среде к интенсивности в вакууме) такого телескопа будет равен

$$\text{St} = [1 + R^2N^{-2}(\tilde{r}_0^{\text{пл}})^{-2}]^{-1}. \quad (33)$$

Таким образом, увеличивая число разбиения N исходной апертуры телескопа, можно для любого телескопа сделать параметр Штреля как угодно близким к единице, т.е. сделать практически любую апертуру полностью когерентной.

Выводы

Просуммируем и сведем к простым формулам результаты наших расчетов. При этом учтем, что все расчеты были выполнены при использовании квадратичной аппроксимации, т.е. при замене степени 5/3 на степень 2. Сделаем обратную замену, тогда из (10) получим, что параметр Штреля для телескопа без коррекции

$$\mathrm{St} \approx [1 + 4\pi^2 \frac{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)(2R)^{-1/3}}{(\lambda/2R)^2}]^{-1}. \quad (34)$$

В системе с коррекцией, которая использует традиционную фокусируемую ЛОЗ, получим путем преобразования формулы (25)

$$\mathrm{St} \approx \left[1 + 4\pi^2 \frac{\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)(\xi/x)^2(2R)^{-1/3}}{(\lambda/2R)^2}\right]^{-1}. \quad (35)$$

И наконец, при коррекции с коллимированным пучком в качестве ЛОЗ, используя специальный датчик волнового фронта, имеем из (33)

$$\mathrm{St} \approx \left[1 + 4\pi^2 \frac{\int_0^x d\xi C_n^2(\xi)(\xi/x)^2(2R)^{-1/3}}{N^{5/3}(\lambda/2R)^2}\right]^{-1}. \quad (36)$$

В итоге результаты аналитических и численных расчетов показали высокую эффективность применения лазерной опорной звезды в виде широкого коллимированного пучка. Специальный датчик типа Гартмана [4] позволяет восстановить фазу опорной волны как непрерывную функцию. Как показывают оценки, сформированное поле опорного источника достаточно близко по параметрам к плоской волне. Поэтому получаем высокую коррекцию и большое увеличение параметра Штреля, что косвенно указывает на хорошую коррекцию высших модовых составляющих, которые плохо корректируются при использовании традиционных схем формирования ЛОЗ с помощью фокусированного лазерного пучка. Как показали сравнительные расчеты для различных моделей высотного изменения структурного параметра показателя преломления, имеют место серьезные отличия в поведении радиусов корреляции для плоской и сферической волн.

Следует заметить, что учет влияния амплитудных флуктуаций, наряду с фазовыми флуктуациями, естественно, уменьшит предельно достижимый уровень коррекции. В итоге параметр Штреля будет несколько ниже, чем определено в формулах (35) и (36).

Отметим еще одну особенность предлагаемой схемы формирования ЛОЗ. Широкий коллимированный пучок и специальный датчик волнового фронта [3, 4], каждая из субапертур которого «видит» только ограниченную область ЛОЗ, снимают проблему [16–18] коррекции глобального наклона волнового фронта при использовании ЛОЗ, поскольку дрожание исходного пучка, обусловленного распространением из апертуры телескопа вверх, не дает вклада в дрожание изображения субапертуры. Поэтому суммирование локальных наклонов волнового фронта по всей матрице субапертур датчика волнового фронта может дать сигнал и для коррекции глобального наклона волнового фронта. Это несколько упрощает, в целом, достаточно сложную схему коррекции с использованием ЛОЗ, поскольку отпадает необходимость в применении, наряду с лазерной, еще и естественной звезды, дающей сигнал для коррекции глобального наклона волнового фронта.

Работа выполнена при частичной поддержке комплексного интеграционного проекта СО РАН № 3.2 «Развитие адаптивных систем коррекции изображения для наземных телескопов» и Программы Президиума РАН № 16. Часть 3. Проект 1. «Дневной астроклимат и проблемы построения адаптивного телескопа».

1. *Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С.* Лазерное излучение в атмосфере. М.: Наука, 1976. 277 с.
2. *Buscher D.F., Love G., Myers R.* Laser beacon wavefront sensing without focal anisoplanatism // Opt. Lett. 2002. V. 27. N 3. P. 149–151.
3. *Bonaccini D., Lukin V.* Laser guide star with collimated laser beam for large aperture telescope. Frontiers in Optics 2006. Abstracts. Rochester. USA. 2006. P. 129.
4. *Bolbasova L.A., Goncharov A., Lukin V.P.* Field-Oriented Wavefront Sensor for Laser Guide Stars // 6th Int. Workshop for Industry and Medicine: Ireland. Galway. Abstract. 2007. P. 174–175.
5. *Лукин В.П.* Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1983. 250 с.
6. *Лукин В.П.* Некоторые особенности формирования опорных источников // Оптика атмосф. и океана. 2006. Т. 19. № 12. С. 1021–1028.
7. *Beland R.R.* Propagation Through Atmospheric Optical Turbulence, The Infrared and Electro-Optical Systems Handbook. 1993. V. 2. Chap. 2. P. 157–232.
8. *Roggemann M.C., Welsh B.* Imaging Through Turbulence. Boca Raton: CRC Press, 1996.
9. *Andrews L.C., Phillips R.* Laser Beam Propagation through Random Media. Bellingham, WA, SPIE. 1998.
10. *Грачева М.Е., Гурвич А.С.* Простая модель турбулентности // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. Т. 16. № 10. 1980. С. 1107–1110.
11. *Vernin J.* Astronomical site selection: a new meteorological approach // Proc. SPIE. 1986. V. 628. P. 142–147.
12. *Erasmus D.A., Thompson L.A.* Ground turbulence at Mauna Kea Observatory: location and ground height for future telescopes // Proc. SPIE. 1986. V. 628. P. 148–155.
13. *Beland R.R., Brown J.H.* A deterministic temperature model for stratospheric optical turbulence // Phys. Scripta. 1988. V. 37. N 3. P. 419–423.
14. *Jumper G.Y., Beland R.R.* From twinkling stars to theater missile defense // AFRL Technology Horizons. March, 2001. N 1. P. 25–26.
15. *Magee P.* A toolbox for Atmospheric Propagation Modeling User's Guide Version 4.1.455 // MZA Associates Corporation, March 13, 2007. 174 p.

16. *Parenti R.R., Sasiela R.J.* Laser-guide-star systems for astronomical applications // J. Opt. Soc. Amer. A. 1994. V. 11. N 1. P. 288–309.
17. *Лукин В.П., Фортес Б.В.* Сопоставление предельной эффективности различных схем формирования лазерных опорных звезд // Оптика атмосф. и океана. 1997. Т. 10. № 1. С. 56–68.
18. *Лукин В.П.* Гибридная схема формирования лазерной опорной звезды // Оптика атмосф. и океана. 1997. Т. 10. № 8. С. 975–979.

L.A. Bol'basova, V.P. Lukin. **Laser guide stars and models of atmospheric turbulence.**

The quality of the image extraterrestrial object, formed by astronomical optical system through turbulent atmosphere is analyzed. Relative increase of the Strehl parameter is calculated under adaptive correction on the base of using the technology of the laser guide stars. The efficiency of adaptive correction and the distortions for different types of the guide sources are compared. A special sensor of the wave front, is working with the use of the broad laser beam as a reference wave. The calculations are executed for different models of the high-altitude evolution of the structure parameter of the refractive index of turbulent atmosphere. The results of analytical and numerical calculations have shown high efficiency of using the laser guide star as a broad collimated beam. The wave front sensor allows one to restore the phase of the reference wave. The estimations show that the formed field is enough close by parameters to the plane wave. The comparative calculations for different models of the high-altitude change of the structure parameter of the refractive index have shown that there are serious differences in the correlation radius behavior for plane and spherical waves.