УДК 519.21:502.3

Использование марковских процессов для оценки экологической безопасности воздушного пространства города

О.В. Адмаев[1], Т.В. Гавриленко[2]*

[1]*Красноярский институт железнодорожного транспорта – филиал ГОУВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения»*
660028, г. Красноярск, ул. Ладо Кецховели, 89
[2]*ФГАОУ «Сибирский федеральный университет»*
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79

Поступила в редакцию 30.03.2010 г.

Состояние атмосферного воздуха в городе рассматривается как система, которая может находиться в одном из четырех несовместных состояний. Поведение системы описывается однородной марковской цепью. Элементы матрицы вероятностей перехода определяются по агрегированной информации. В качестве исходных данных используются еженедельные сводки о концентрациях диоксида азота в атмосфере г. Красноярска, выпускаемые Центром по мониторингу загрязнения окружающей среды. Для решения задачи используется метод наименьших квадратов с ограничениями.

Ключевые слова: состояние атмосферного воздуха, марковская цепь, агрегированная информация, метод наименьших квадратов с ограничениями; condition of atmospheric air, Markovian chain, aggregated data, method of the restricted least squares.

Введение

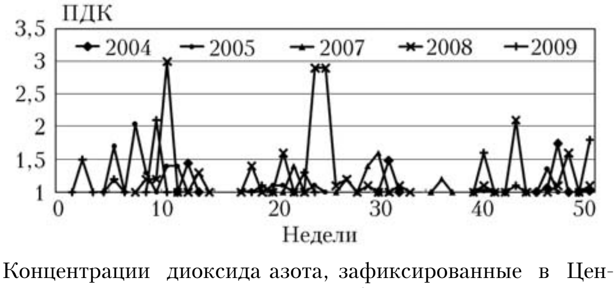
Оценка состояния воздушной среды больших городов представляет собой актуальную задачу. Методики прогноза состояний городской атмосферы базируются на различных математических моделях, использующих как аппарат дифференциальных уравнений, так и вероятностно-статистические методы [1, 2].

В данной статье предлагается использовать марковские цепи для прогноза состояний воздушной среды города. Методики, основанные на цепях Маркова, позволяют оценивать вероятностные параметры состояния объекта исследования при различных интервалах осреднения как по времени, так и по пространству.

В качестве статистической информации использовались официальные данные территориального Центра по мониторингу загрязнения окружающей среды в г. Красноярске, основанные на показаниях стационарных районных постов. Схема их размещения приведена в [3]. В еженедельной справке по районам города приводится перечень загрязняющих веществ в атмосферном воздухе, превысивших значения предельно допустимых максимально разовых концентраций ($ПДК_{мр}$) в течение недели, и указывается величина зафиксированных максимальных выбросов в единицах $ПДК_{мр}$.

Для анализа экологической безопасности воздушного пространства города был выбран диоксид азота NO_2, который является одним из основных загрязнителей воздуха. Нами были проанализированы статистические ряды еженедельных наибольших величин концентраций диоксида азота, превышающих $ПДК_{мр}$, за период с 2001 по 2009 г. Данные за 2001–2005 гг. были пересчитаны с учетом нового значения $ПДК_{мр}$, так как с 1 февраля 2006 г. оно составляет 0,2 мг/м^3 вместо прежнего 0,085 мг/м^3 [4]. В соответствии с данным документом изменился и класс опасности диоксида азота – вместо II он стал относиться к III классу опасности. Гигиеническое обоснование этих изменений приведено в [5].

На рисунке в качестве примера показано распределение выбросов диоксида азота, зафиксированных в Центральном районе города Красноярска за рассматриваемый период.



Концентрации диоксида азота, зафиксированные в Центральном районе г. Красноярска

* Олег Васильевич Адмаев (oadmaev@mail.ru); Татьяна Валентиновна Гавриленко (gavtan@mail.ru).

В этом административном районе практически отсутствуют промышленные предприятия, но территория перегружена автомобильным транспортом.

1. Математическая постановка задачи

Будем считать, что атмосферный воздух представляет собой систему $S(t)$, принимающую в момент времени t какое-либо из возможных состояний. В качестве состояния системы примем событие, заключающееся в том, что в течение недели в городе фиксировались выбросы диоксида азота из некоторого интервала значений концентраций. Разобьем совокупность всевозможных состояний системы на дискретные состояния s_j, $j = 1, ..., 4$. Под малоопасным состоянием s_1 понимается состояние, в котором концентрация диоксида азота не превышает в течение недели 1 ПДК$_{\text{мр}}$; умеренно опасным состоянием s_2 — 2 ПДК$_{\text{мр}}$; опасным состоянием s_3 — 3 ПДК$_{\text{мр}}$; очень опасным состоянием s_4 — свыше 3 ПДК$_{\text{мр}}$. В основу данного разбиения положена классификация, принятая в [6].

Предположим, что случайные переходы системы из одного состояния в другое происходят только в определенные моменты времени t_0, t_1, t_2, ..., t_m..., тогда последовательность переходов системы из одного состояния в другое будет представлять собой марковскую цепь [7]. В качестве t_m примем время составления еженедельного отчета о состоянии атмосферы в городе. Моменты времени t_0, t_1, t_2,... представляют собой шаги процесса: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, ..., $t_m = m$, ... и в нашем случае являются порядковыми номерами недель.

Условную вероятность того, что в момент $m + 1$ система будет находиться в состоянии s_j, если в момент m она находилась в состоянии s_i, определим следующим образом:

$$p_{ij}(m+1) = P\{S(m+1) = s_j \mid S(m) = s_i\}, \quad i, j = 1, \ldots, 4. \tag{1}$$

Вероятности $p_{ij}(m + 1)$ являются переходными вероятностями марковской цепи на $m + 1$ шаге. Из определения марковской цепи следует, что для нее вероятность перехода системы $S(t)$ в состояние s_j на $m + 1$ шаге зависит только от того, в каком состоянии s_i находилась система на предыдущем m-м шаге, и не зависит от того, как она вела себя до этого m-го шага.

Переходные вероятности $p_{ij}(m + 1)$ можно записать в виде матрицы размерности 4 x 4:

$$\|p_{ij}(m+1)\| = \\ = \begin{Vmatrix} p_{11}(m+1) & p_{12}(m+1) & p_{13}(m+1) & p_{14}(m+1) \\ p_{21}(m+1) & p_{22}(m+1) & p_{23}(m+1) & p_{24}(m+1) \\ p_{31}(m+1) & p_{32}(m+1) & p_{33}(m+1) & p_{34}(m+1) \\ p_{41}(m+1) & p_{42}(m+1) & p_{43}(m+1) & p_{44}(m+1) \end{Vmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Так как на каждом шаге система $S(t)$ может находиться только в одном из взаимно исключающих состояний, то для любой i-й строки матрицы (2) выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{4} p_{ij}(m+1) = 1; \quad i = 1, \ldots, 4, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Также предположим, что условная вероятность зависит только от состояний и не зависит от времени, тогда в матрице (2) элементы p_{ij} будут стационарными вероятностями перехода из состояния s_i в состояние s_j. В этом случае цепь Маркова — однородная. Она определится матрицей вероятностей перехода:

$$\|p_{ij}\| = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Вероятность того, что система $S(t)$ на $m + 1$ шаге будет находиться в состоянии s_j, определится по рекуррентной формуле

$$p_j(m+1) = \sum_{i=1}^{n} p_i(m) p_{ij}, \quad m = 0, 1, \ldots; \quad j = 1, \ldots, 4. \tag{5}$$

Обычно для систем, состоящих из объектов массового производства, вероятности перехода оцениваются по результатам большого количества наблюдений за однотипными изделиями. В данном случае имеется только агрегированная информация в виде относительных частот состояний (количество пунктов наблюдений, фиксирующих уровень концентрации NO_2, который соответствует i-му состоянию атмосферного воздуха, отнесенное к общему числу пунктов наблюдений) в каждый из моментов времени m. Тогда выборочные наблюдения за состоянием атмосферы удовлетворяют стохастическому уравнению [8]:

$$\mathbf{y}_j(m+1) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{y}_i(m) p_{ij} + \mathbf{u}_j(m+1). \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{y}_i(m)$ — вектор наблюдавшихся частот появления состояния s_i (доля пунктов наблюдений, зафиксировавших состояние атмосферного воздуха s_i в неделю m); $\mathbf{y}_j(m + 1)$ — вектор наблюдаемых частот появления состояния s_j (доля пунктов наблюдений, зафиксировавших состояние атмосферного воздуха s_j в неделю $m + 1$); $\mathbf{u}_j(m + 1)$ — вектор случайных ошибок.

В матричной форме уравнение (6) имеет вид

$$\mathbf{y}_j = X_j \mathbf{p}_j + \mathbf{u}_j, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{y}_j = \{y_j(1), y_j(2), \ldots, y_j(M)\};$$

$$\mathbf{u}_j = \{u_j(1), u_j(2), \ldots, u_j(M)\}; \quad \mathbf{p}_j = \{p_{1j}, p_{2j}, p_{3j}, p_{4j}\};$$

$$X_j = \begin{Vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) & y_4(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) & y_4(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1(M-1) & y_2(M-1) & y_3(M-1) & y_4(M-1) \end{Vmatrix},$$

M — длина выборки (количество недель, в течение которых велись наблюдения за состоянием атмосферы).

Расписав (7) по компонентам, получим четыре системы уравнений:

$$\begin{cases} y_i(1) = y_1(0)p_{1i} + y_2(0)p_{2i} + y_3(0)p_{3i} + y_4(0)p_{4i} + u_i(1), \\ y_i(2) = y_1(1)p_{1i} + y_2(1)p_{2i} + y_3(1)p_{3i} + y_4(1)p_{4i} + u_i(2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_i(M) = y_1(M-1)p_{1i} + y_2(M-1)p_{2i} + y_3(M-1)p_{3i} + \\ + y_4(M-1)p_{4i} + u_i(M), \end{cases}$$

где $i = 1, ..., 4$.

2. Метод решения

Вероятности p_{ij} определяются по методу наименьших квадратов с ограничениями, так как обычные оценки по этому методу могут не удовлетворять условиям

$$0 \le p_{ij} \le 1, \quad i, j = 1, \dots, 4. \tag{8}$$

В силу равенства (3) условия

$$\sum_{j=1}^{4} p_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, 4, \tag{9}$$

выполняются автоматически.

В методе наименьших квадратов с ограничениями требуется найти минимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{4} \mathbf{u}'_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{4} (\mathbf{y}_j - X_j \mathbf{p}_j)' \cdot (\mathbf{y}_j - X_j \mathbf{p}_j) \tag{10}$$

при условиях (8) и (9) [8].

Функция (10) представляет собой квадратичную форму

$$F(p_{11}, p_{12}, \dots, p_{44}) = \sum_{j=1}^{4} f_j(p_{1j}, p_{2j}, p_{3j}, p_{4j}), \tag{11}$$

где

$$f_j(p_{1j}, p_{2j}, p_{3j}, p_{4j}) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} a_{ik} p_{ij} p_{kj} - 2\sum_{i=1}^{4} b_i^j p_{ij} + c^j, \tag{12}$$

$$a_{ik} = \sum_{m=0}^{M-1} y_i(m) y_k(m); \quad b_i^j = \sum_{m=0}^{M-1} y_j(m+1) y_i(m);$$

$$c^j = \sum_{m=0}^{M-1} y_j^2(m+1); \quad i, j, k = 1, \ \dots, 4. \tag{13}$$

Коэффициенты a_{ik} образуют матрицу $\|a_{ik}\|$; коэффициенты b_i^j — векторы $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$, $\mathbf{b}^4$; коэффициенты c^j — свободные члены c^1, c^2, c^3, c^4.

Задача о нахождении минимума квадратичной формы (11) с линейными ограничениями (8) относится к типичным задачам квадратичного программирования.

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации переходных вероятностей p_{ij} определяется по формуле

$$\varepsilon_j = \sqrt{\sum_{m=1}^{M} u_j^2(m) / M}, \tag{14}$$

где $u_j(m)$ — компоненты вектора случайных ошибок, определяемые из уравнения (7), $j = 1, ..., 4$.

3. Результаты и выводы

В результате расчетов были получены матрицы вероятностей перехода для каждого года наблюдений. Ниже приведены матрицы перехода, полученные для 2001, 2005, 2008 и 2009 гг.:

$$\left\| p_{ij}^{2001} \right\| = \begin{Vmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 & 0 & 0 \\ 0{,}69 & 0{,}31 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{Vmatrix},$$

$$\left\| p_{ij}^{2005} \right\| = \begin{Vmatrix} 0{,}91 & 0{,}07 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}57 & 0{,}34 & 0{,}09 & 0 \\ 0{,}11 & 0{,}89 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}79 & 0 & 0{,}1 \end{Vmatrix},$$

$$\left\| p_{ij}^{2008} \right\| = \begin{Vmatrix} 0{,}79 & 0{,}16 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}52 & 0{,}46 & 0 & 0{,}02 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\left\| p_{ij}^{2009} \right\| = \begin{Vmatrix} 0{,}90 & 0{,}07 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}89 & 0{,}11 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}21 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}29 \end{Vmatrix}.$$

Значения среднеквадратической ошибки аппроксимации переходных вероятностей p_{ij}, вычисленные по формуле (14), не превысили 14% для периодов 2001–2007 и 2009 гг., а для 2008 г. — 27%.

Вероятности состояний, подсчитанные по формуле (5) при начальных условиях: $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0$, приведены в таблице. Указанные предельные значения достигаются уже на 11–12-м шаге марковской цепи.

Вероятности наступления состояний воздушной среды

Год	Значения вероятностей			
	p_1	p_2	p_3	p_4
2001	0,89	0,09	0,01	0,01
2002	0,93	0,05	0,01	0,01
2004	0,93	0,05	0,01	0,01
2005	0,84	0,13	0,02	0,01
2006	0,91	0,08	0,01	0,00
2007	0,92	0,08	0,00	0,00
2008	0,71	0,25	0,02	0,02
2009	0,89	0,07	0,02	0,01

Из анализа результатов можно сделать следующие выводы:

1. Для всех лет наблюдений значение p_1 близко к 0,9, что говорит об устойчивом малоопасном состоянии атмосферного воздуха по концентрации диоксида азота вблизи стационарных пунктов наблюдений и современных нормативных значениях ПДК$_{мр}$.

2. Наиболее неблагоприятным был 2008 г., когда с вероятностью 0,25 воздушная среда находилась в опасном состоянии ($p_3 = 0{,}25$). Как видно из рисунка, в этом году фиксировались наибольшие концентрации диоксида азота.

3. Значения p_{3i} и p_{4i} для матрицы перехода в 2001 г., p_{4i} для матрицы перехода в 2009 г. близки к 1/4. Равновероятное наступление событий говорит о том, что опасные и очень опасные состояния в эти годы были редкими событиями.

4. В матрицах перехода для 2008 и 2009 гг. вероятности перехода, равные 1, свидетельствуют об однозначном переходе в соответствующее состояние, оцененное по наблюдавшимся реализациям.

1. *Алоян А.Е., Пененко В.В., Козодеров В.В.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды // Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования: в 2 т. Т. 2. Математическое моделирование. М.: Наука, 2005. С. 279–351.
2. *Горчаков Г.И., Семутникова Е.Г., Аношин Б.А., Карпов А.В., Колесникова А.Б.* Статистический прогноз загрязнения городской атмосферы. 2. Методика прогноза межсуточной и внутрисуточной изменчивости концентраций угарного газа и оксидов азота // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 4. С. 287–293.
3. *Состояние* загрязнения атмосферы в городах на территории России за 2007 г.: Ежегодник. СПб.: Росгидромет, 2009. 196 с.
4. *Гигиенические* нормативы ГН 2.1.6.1983-05.: Постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 03.11.2005. Введ. в действие с 01.02.2006. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: справ.-правовая сист. «КонсультантПлюс».
5. *Пинигин М.А., Тепикина Л.А., Сафиулин А.А., Шипулина З.В., Плахин А.Е.* Гигиеническое обоснование уточнения максимально разовой предельно допустимой концентрации диоксида азота // Токсикол. вестн. 2006. № 3. С. 32–36.
6. *Показатели* и нормы экологической безопасности автомобильной дороги. ОДН 218.5.016-2002. М.: Министерство транспорта РФ, 2003. 46 с.
7. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1991. 384 с.
8. *Ли Ц., Джардж Д., Зельнер А.* Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам: Пер. с англ. М.: Статистика, 1977. 221 с.

O.V. Admaev, T.V. Gavrilenko. **The use of Markovian processes for estimation of ecological safety of urban airspace.**

The condition of atmospheric air in a city is considered as a system which can be in one of four incompatible conditions. The behaviour of the system is described by homogeneous Markovian chains. Elements of a transition matrix are defined by aggregated data. Weekly reports about NO_2 concentration in Krasnoyarsk air issued by Environmental Pollution Monitoring Center are used as initial data; the method of restricted least squares is used for problem solution.