

В.А. Банах, А.В. Фалиц

Восстановление фазы оптического поля из ее градиента при наличии точек ветвления

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 18.08.2006 г.

Реализован и протестирован алгоритм восстановления фазы из градиента фазы при наличии дислокаций волнового фронта. Алгоритм основан на использовании комплексного экспоненциального реконструктора фазы Д. Фрида и метода наименьших квадратов. При восстановлении скрытой компоненты фазы алгоритм не требует определения положения и парности точек ветвления и осуществляет коррекцию ошибки сглаживания метода наименьших квадратов. На примере моделирования обращения волнового фронта в турбулентной атмосфере продемонстрирована высокая точность алгоритма.

Введение

Для восстановления фазы оптической волны

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp[i\phi(\mathbf{r})], \quad (1)$$

где $U(\mathbf{r})$, $A(\mathbf{r})$ и $\phi(\mathbf{r})$ – комплексная амплитуда, амплитуда и фаза волны; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ – двумерный вектор, из измерений наклонов волнового фронта датчиками Гартмана или интерферометрами сдвига [1], как и в радарной интерферометрии [2], широко применяется метод наименьших квадратов [2, 3]. Этот метод обладает сглаживающими [4, 5] и фильтрующими свойствами, поскольку основывается на потенциальной части вектора градиента фазы и не восстанавливает так называемую «скрытую» фазу [6, 7], определяемую соленоидальной компонентой градиента фазы [2, 3, 6–8]. В области, где соленоидальная часть градиента фазы отлична от нуля, фаза испытывает скачки $\pm 2\pi n$, причиной которых во многих случаях являются шумы [9]. Фильтрация этих шумов [9, 10] осуществляется с помощью метода наименьших квадратов. Однако при распространении случайных оптических полей и регулярных полей в случайных средах могут реализоваться ситуации, когда происходит сильная случайная пространственная модуляция интенсивности распространяющейся волны. При этом в областях пространства, где интенсивность близка к нулю, возникают дислокации волнового фронта [11], признаком которых является неравенство нулю соленоидальной компоненты вектора градиента фазы. В этом случае использование метода наименьших квадратов приводит к потере полезной информации о фазе. Фазу оптической волны в этом случае можно записать в виде суммы двух слагаемых [7]:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{mse}}(\mathbf{r}) + \phi_{\text{hid}}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где $\phi_{\text{mse}}(\mathbf{r})$ – фаза, восстановленная методом наименьших квадратов; $\phi_{\text{hid}}(\mathbf{r})$ – скрытая фаза, определяемая соленоидальной компонентой градиента фазы.

В дискретном представлении градиент фазы можно записать в виде [5, 7]:

$$\mathbf{g}(i, k) = \frac{\arg[U(i+1, k)U^*(i, k)]}{d} \mathbf{e}_x + \frac{\arg[U(i, k+1)U^*(i, k)]}{d} \mathbf{e}_y, \quad (3)$$

где i, k определяют положение пикселя в двумерном массиве дискретных значений фазы; d – расстояние между соседними узлами сетки; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ – единичные векторы. Характерным признаком наличия дислокации в некоторой точке является то, что главное значение градиента фазы при обходе вокруг этой точки по замкнутому контуру меняется на $\pm 2\pi$ [7]:

$$\mathbf{g}(i, k) \cdot \mathbf{e}_x d + \mathbf{g}(i+1, k) \mathbf{e}_y d - \mathbf{g}(i, k+1) \mathbf{e}_x d - \mathbf{g}(i, k) \mathbf{e}_y d = \begin{cases} \pm 2\pi, & \text{если точка ветвления находится} \\ & \text{внутри контура,} \\ 0, & \text{если точка ветвления внутри контура} \\ & \text{отсутствует.} \end{cases} \quad (4)$$

Положительные и отрицательные точки ветвления фазы возникают попарно и связаны друг с другом через разрывы фазовой поверхности. Зная координаты точек ветвления, можно определить скрытую фазу $\phi_{\text{hid}}(\mathbf{r})$ [7] и тем самым получить оценку полной фазы. Однако при расчете скрытой фазы по точкам ветвления могут возникать ложные фазовые разрезы из-за ошибок в определении парных точек [5], что снижает эффективность данного алгоритма [5, 12, 13].

Д. Фридом предложен алгоритм восстановления фазы, основанный на введенном им так называемом комплексном экспоненциальном реконструкторе, который дает оценку фазовой поверхности по ее локальным наклонам или градиенту, а модификация этого метода позволяет, как и метод наименьших квадратов, минимизировать влияние шума [10]. Алгоритм восстанавливает полную фазу $\phi(\mathbf{r})$ в ее главном значении, т.е.

$$\phi_{\text{CER}}(\mathbf{r}) = P[\phi(\mathbf{r})], \quad (5)$$

где оператор $P[\dots]$ означает приведение величины в скобках к интервалу главного значения фазы $(-\pi, \pi]$, после чего осуществляется операция развертки главного значения фазы $P[\phi(\mathbf{r})]$ в фазовую поверхность $\phi(\mathbf{r})$ с использованием информации о местоположении точек ветвления.

В данной статье предлагается алгоритм получения фазы $\phi(\mathbf{r})$ из ее градиента $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ на основе комплексного экспоненциального реконструктора Д. Фрида и метода наименьших квадратов. Особенностью алгоритма является то, что он, в отличие от комплексного экспоненциального реконструктора, не требует определения расположения точек ветвления фазы.

Алгоритм восстановления фазы

Восстановление фазы волны $\phi(\mathbf{r})$ из ее градиента $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ осуществляется следующим образом. Комплексный экспоненциальный реконструктор Д. Фрида применяется к заданному массиву значений градиента фазы $\mathbf{g}(\mathbf{r})$. В результате получается массив комплексных чисел

$$\chi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) + iB(\mathbf{r}) = \text{CER}[\mathbf{g}(\mathbf{r})] = \exp[i\phi(\mathbf{r})], \quad (6)$$

где A и B – реальная и мнимая части комплексного числа; $\text{CER}[\dots]$ – алгоритм комплексного экспоненциального реконструктора [10]. Из него следует, что комплексные числа $\chi(\mathbf{r})$, полученные в результате применения реконструктора, связаны с фазой волны соотношением

$$\phi_{\text{CER}}(\mathbf{r}) = \arg[\chi(\mathbf{r})] = P[\phi(\mathbf{r})]. \quad (7)$$

Формула (7) показывает, что полная фаза $\phi(\mathbf{r})$ определена в главном значении на интервале $(-\pi, \pi]$. Развертка фазы, ограниченной интервалом $(-\pi, \pi]$, осуществляется методом наименьших квадратов, в результате чего восстанавливается «гладкая» фаза $\phi_{\text{lmse}}(\mathbf{r})$. А для оценки скрытой компоненты фазы, основываясь на (6) и (2), нужно просто выполнить следующую процедуру:

$$\chi(\mathbf{r}) / \exp[i\tilde{\phi}_{\text{lmse}}(\mathbf{r})] = \exp[i\tilde{\phi}_{\text{hid}}(\mathbf{r})], \quad (8)$$

откуда

$$\tilde{\phi}_{\text{hid}}(\mathbf{r}) = \arg\{\exp[i\tilde{\phi}_{\text{hid}}(\mathbf{r})]\}. \quad (9)$$

Из (8), (9) следует, что скрытая компонента фазы определяется в главном значении на интервале $(-\pi, \pi]$ и включает в себя ошибку сглаживания Δ_{sm} , возникающую при использовании метода наименьших квадратов [4]:

$$\tilde{\phi}_{\text{hid}}(\mathbf{r}) = \phi_{\text{hid}} + \Delta_{\text{sm}}.$$

Полная фаза получается суммированием компонент $\phi_{\text{lmse}}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\phi}_{\text{hid}}$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{lmse}}(\mathbf{r}) + \tilde{\phi}_{\text{hid}}(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Таким образом, можно восстановить фазу $\phi(\mathbf{r})$ из ее градиента $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ и при определении скрытой фазы не использовать информацию о расположении точек ветвления и разрывов фазовой поверхности.

Численный эксперимент

Чтобы проверить эффективность восстановления фазы оптической волны предложенным методом, был проведен численный эксперимент по распространению гауссова коллимированного пучка $U(0, \mathbf{r}) = U_0 \exp\{-r^2/(2a^2)\}$ (рис. 1) в турбулентной атмосфере с использованием программ моделирования [5, 13].

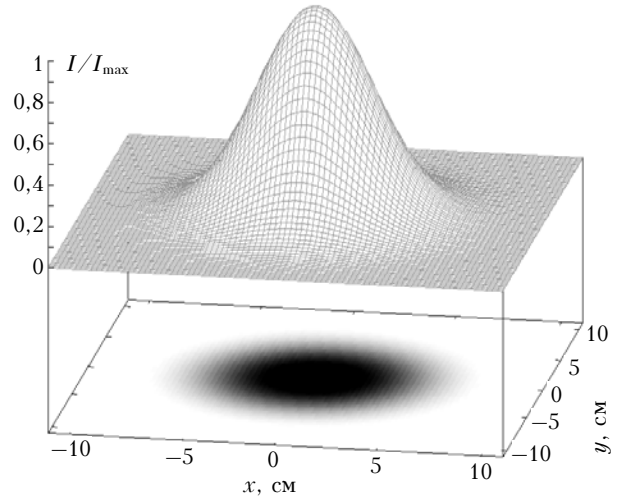


Рис. 1. Нормированное распределение интенсивности исходного гауссова пучка

Турбулентные условия распространения удобно характеризовать индексом мерцаний плоской волны [14]:

$$\beta_0^2 = 1,23C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad (11)$$

где C_n^2 – структурная характеристика флуктуаций показателя преломления воздуха; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; L – длина трассы. Согласно [15, 16] при $\beta_0^2 > 1$ реализуется режим сильных флуктуаций интенсивности и распределение интенсивности в поперечном сечении пучка разбивается на спеклы, т.е. происходит сильная пространственная модуляция оптического поля по амплитуде. На рис. 2 показано распределение интенсивности поля $U(\mathbf{r}, L)$, прошедшего через турбулентную атмосферу ($L = 1,5$ км, $a = 4$ см, $\lambda = 1,06$ мкм, $C_n^2 = 7,7 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-2/3}$, $\beta_0^2 = 5$).

Воспользуемся следующим свойством обратимости волнового фронта [17]: если волна, прошедшая трассу в прямом направлении, распространяется в обратном направлении после изменения в конце трассы знака фазы этой волны на противоположный $[\phi(\mathbf{r}) \rightarrow -\phi(\mathbf{r})]$, то в начале трассы поле обратной волны примет исходное распределение. Замена фазы $\phi(\mathbf{r})$ на $-\phi(\mathbf{r})$ эквивалентна операции комплексного сопряжения поля $U(\mathbf{r}, L)$: $U^*(\mathbf{r}, L) = A(\mathbf{r})\exp[-i\phi(\mathbf{r})]$.

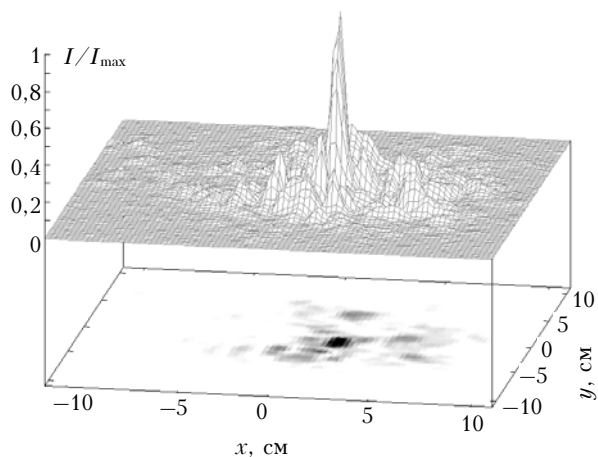


Рис. 2. Распределение интенсивности гауссова пучка после прохождения трассы в турбулентной атмосфере, $\beta_0^2=5$

Следовательно, если при обращении волнового фронта в результате операций определения фазы волны из градиентных измерений фаза будет найдена с ошибкой, то восстановления первоначального распределения поля не произойдет.

Из результатов моделирования поля $U(\mathbf{r}, L)$ в турбулентной атмосфере был рассчитан градиент фазы по формуле (3). Фаза оптической волны, представленная на рис. 3, получена с использованием комплексного экспоненциального реконструктора из градиента.

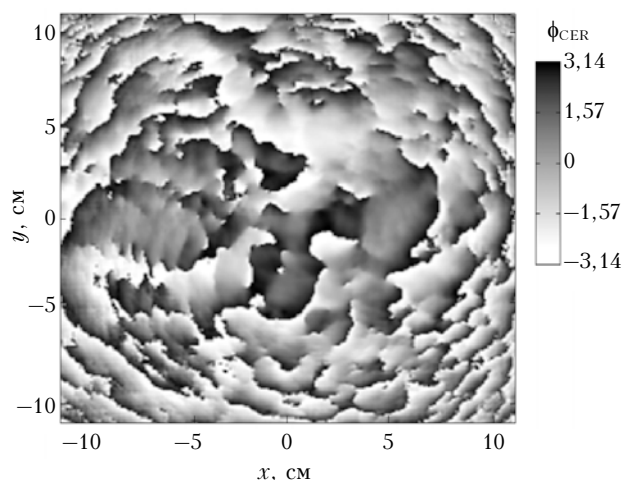


Рис. 3. Распределение фазы поля гауссова оптического пучка, восстановленной комплексным экспоненциальным реконструктором Фрида [9]

Значения фазы, как видно из рис. 3, находятся в интервале $(-\pi, \pi]$, т.е. ограничены главным значением. Анализ фазового распределения показывает, что оно содержит дислокации волнового фронта.

На рис. 4 представлена центральная часть распределений интенсивности и фазы оптического поля $U(\mathbf{r}, L)$ с отмеченными дислокациями волнового фронта, местоположение которых было найдено по формуле (4).

Развертка фазы осуществлялась методом наименьших квадратов. Как отмечалось выше, данный

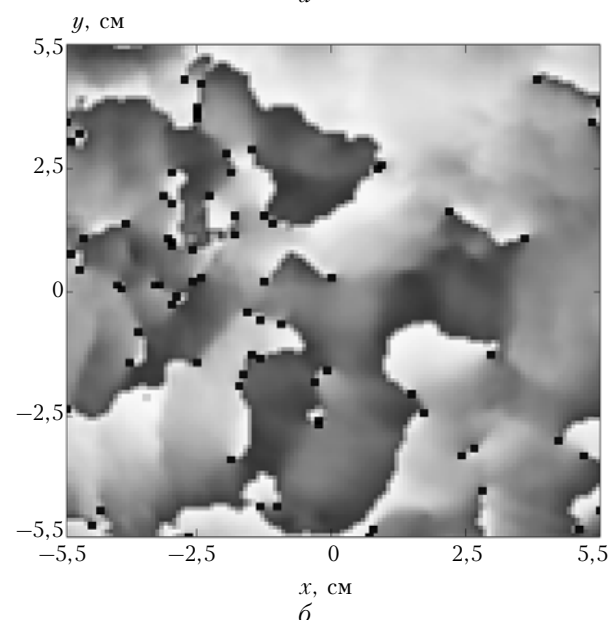
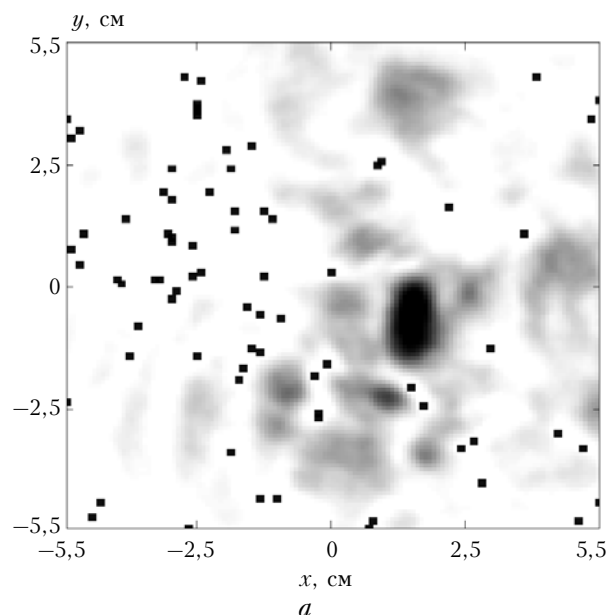


Рис. 4. Распределение интенсивности (а) и фазы (б) в центральной области поперечного сечения пучка с идентификацией точек ветвления фазы

метод восстанавливает фазу не полностью. Компонента фазы, которая связана с наличием дислокаций волнового фронта, методом наименьших квадратов не восстанавливается, а также, как показано в [4], этот метод не восстанавливает часть фазовой функции, обусловленную ошибкой сглаживания. На рис. 5 представлен результат развертки фазы из ее главного значения (см. рис. 4, б) методом наименьших квадратов. Видно, что это — гладкое распределение, разрывы фазы отсутствуют.

Скрытая компонента фазы была получена по формулам (8) и (9) с использованием результатов применения комплексного экспоненциального реконструктора и метода наименьших квадратов. Полная фаза рассчитывалась как сумма найденных компонент

по формуле (10) (рис. 6) и затем использовалась для формирования обращенной волны

$$U^*(\mathbf{r}, L) = A(\mathbf{r}) \exp\{-i[\phi_{\text{lmse}}(\mathbf{r}) + \tilde{\phi}_{\text{hid}}(\mathbf{r})]\}. \quad (12)$$

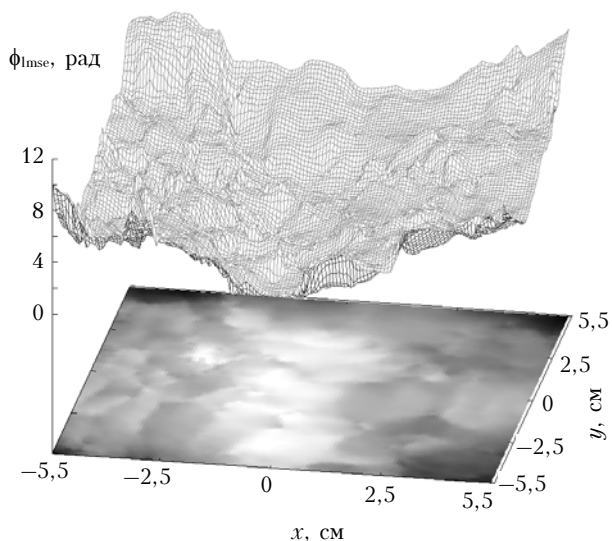


Рис. 5. Распределение фазы, восстановленной методом наименьших квадратов

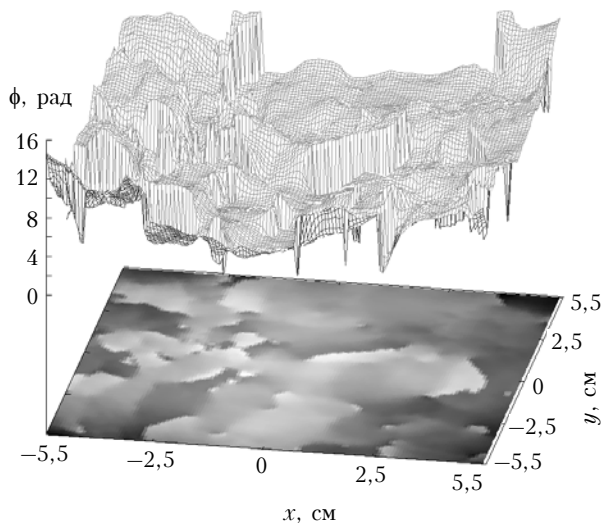


Рис. 6. Распределение фазы, рассчитанной по формуле (10)

При распространении такой волны в обратном направлении, при сохранении тех же неоднородностей среды, что и для прямого распространения, происходит полное восстановление начального распределения интенсивности гауссова пучка (см. рис. 1). Если учитывать только фазу, найденную с помощью метода наименьших квадратов $\phi_{\text{lmse}}(\mathbf{r})$, то при распространении обращенной волны $U^*(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp[-i\phi_{\text{lmse}}(\mathbf{r})]$ в обратном направлении восстановления исходного оптического поля не происходит (рис. 7). Тот факт, что сформированная обращенная волна (12) при обратном распространении полностью восстанавливает начальное гауссово распределение оптического пучка, свидетельствует о том, что фаза по предлагаемому алгоритму произведена точно.

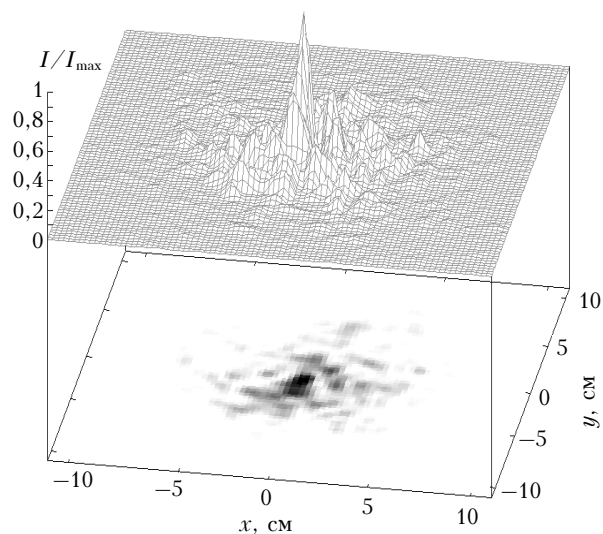


Рис. 7. Распределение интенсивности гауссова пучка после прохождения трассы в обратном направлении с обращением лишь фазы, восстановленной методом наименьших квадратов

Заключение

Реализован алгоритм восстановления фазы при наличии дислокаций волнового фронта. Алгоритм основан на использовании комплексного экспоненциального реконструктора фазы Д. Фрида [10] и метода наименьших квадратов, но, в отличие от [10], при восстановлении скрытой компоненты фазы не требует определения положения и парности точек ветвления и осуществляет коррекцию ошибки сглаживания метода наименьших квадратов. Алгоритм не позволяет восстановить фазу с учетом топологии винтовых дислокаций, когда фаза испытывает скачки, превышающие 2π , так как скрытая фаза $\tilde{\phi}_{\text{hid}}$ рассчитывается в пределах главного значения (9). Однако число таких скачков столь ничтожно мало для рассматриваемых здесь типов задач, что это никак не сказывается на эффективности алгоритма.

1. Тараненко В.Г., Шанин О.И. Адаптивная оптика. М.: Радио и связь, 1990. 111 с.
2. Goldstein R.M., Zebker H.A., Werner C.L. Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping // Radio Sci. 1988. V. 23. N 4. P. 713–720.
3. Takajo H., Takahashi T. Least-squares phase estimation from the phase difference // J. Opt. Soc. Amer. A. 1988. V. 5. N 3. P. 416–425.
4. Банах В.А., Фалиц А.В. Восстановление фазы из ее главного значения // Оптика атмосф. и океана. 2006. Т. 19. № 12. С. 1033–1036.
5. Банах В.А., Фалиц А.В. Восстановление фазы оптической волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, из измерений разностей фаз // Оптика атмосф. и океана. 2001. Т. 14. № 5. С. 424–431.
6. Aksenov V., Vanakh V., Tikhomirova O. Potential and vortex features of optical speckle fields and visualization of wave-front singularities // Appl. Opt. 1998. V. 37. N 21. P. 4536–4540.

7. *Fried D.L.* Branch point problem in adaptive optics // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 1998. V. 15. N 10. P. 2759–2768.
8. *Aksenov V., Tikhomirova O.* Theory of singular-phase reconstruction for an optical speckle field in the turbulent atmosphere // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 2002. V. 19. N 2. P. 345–355.
9. *Bamler R., Adam N., Davidson G., Just D.* Noise-induced slope distortion in 2-D phase unwrapping by linear estimators with application to SAR interferometry // *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.* 1998. V. 36. N 3. P. 913–921.
10. *Fried D.L.* Adaptive optics wave function reconstruction and phase unwrapping when branch point are present // *Opt. Commun.* 2001. V. 200. P. 43–72.
11. *Baranova N.B., Mamaev A.V., Pilipetsky N.F., Shkunov V.V., Zel'dovich B.Ya.* Wave-front islocations: topological limitation for adaptive systems with phase conjugation // *J. Opt. Soc. Amer.* 1983. V. 73. N 5. P. 525–528.
12. *Barchers J.D., Fried D.L., Link D.J.* Evaluation of the performance of Hartmann sensors in strong scintillation // *Appl. Opt.* 2002. V. 41. N 6. P. 1012–1021.
13. *Banakh V.A., Falits A.V.* Comparison of phase reconstruction algorithms when branch points are present // *Proc. SPIE.* 2002. V. 4884. P. 107–113.
14. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
15. *Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С.* Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 280 с.
16. *Зуев В.Е., Банах В.А., Покасов В.В.* Оптика турбулентной атмосферы. Л.: Гидрометеопиздат, 1988. 272 с.
17. *Зельдович Б.Я., Пилипецкий Н.Ф., Шкунов В.В.* Обращение волнового фронта. М.: Наука, 1985. 247 с.

V.A. Banakh, A.V. Falits. Optical phase retrieval from its gradients when branch points are present.

In this work, we have suggested, implemented, and tested the algorithm of reconstruction of the total phase from the phase gradient in the presence of wave front dislocations. The suggested algorithm is based on the Fried complex exponential phase reconstructor and the least squares method. Reconstruction of the hidden phase does not require the localization and pair matching of branch points. Impact of 2π phase discontinuities on efficiency of wave front conjugation is studied in the paper as well.