«Оптика атмосферы и океана», т. **5**, № 12 (1992)

УДК 621.373.826

А.А. Докторов

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОМПЕНСАЦИИ ФАЗОВЫХ ИСКАЖЕНИЙ АДАПТИВНЫМИ ОПТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Предложен метод описания адаптивной оптической системы (АОС) в виде матриц коэффициентов разложения характеристик датчика и корректора волнового фронта в едином базисе ортогональных полиномов. Получены расчетные соотношения для оценки качества и потенциальной эффективности компенсации фазовых искажений произвольными АОС. Результаты применены для критерия минимальной по апертуре квадратической ошибки коррекции. Рассчитана эффективность 7-каналыюй АОС компенсации влияния атмосферной турбулентности.

1. Введение

Вопросу эффективности адаптивных оптических систем (АОС), компенсирующих искажения световых пучков, возникающих при их распространении в турбулентной атмосфере или в оптическом тракте, посвящен ряд работ (например, [1—4]). Однако, как правило, в этих работах эффективность АОС анализируется с точки зрения либо точности аппроксимации волнового фронта корректором [2], либо качества его оценивания на выходе датчика [3]. В [4] анализируется эффективность алгоритма компенсации фазовых искажений. Полученные в ней выражения позволяют также оценивать качество систем по числу Штреля, но сопряжены с громоздкими вычислениями. Вместе с тем задача расчета качества и эффективности АОС достаточно просто формализуется путем матричного описания ее элементов в едином базисе ортогональных полиномов и представлением искажений волнового фронта в том же базисе. Полученные при этом соотношения позволяют также оценивать потенциальную эффективность АОС при произвольных критериях качества системы.

2. Эффективность компенсации фазовых искажений

Представим искаженный волновой фронт в пределах приемной апертуры измерителя $\varphi(\mathbf{r})$ в виде разложения по ортогональной системе функций $\{\varphi_n(\mathbf{r})\}$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \varphi_n(\mathbf{r}) \tag{1}$$

и опишем его вектор-столбцом $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = p_1, p_2, \ldots$ (Т — знак транспонирования). Пусть каждый канал m M-канального датчика волнового фронта реализует некоторое линейное преобразование $L_m\{\varphi(\mathbf{r})\}$ попадающего в его апертуру волнового фронта, формируя на его выходе сигнал

$$u_m = L_m\{\varphi(\mathbf{r})\}.$$

Таким датчиком может быть датчик Гартмана, вырабатывающий на выходах сигналы, пропорциональные усредненным по субапертурам значениям градиента волнового фронта. В этом случае взаимодействие излучения с датчиком можно описать выражением

$$\mathbf{u} = G\mathbf{p},$$

где $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = u_1, u_2, \ldots, u_m$, а G — матрица, состоящая из элементов

$$g_{mn} = L_m\{\varphi_n(\mathbf{r})\}. \tag{2}$$

Опишем взаимодействие излучения с корректором. При подаче сигналов управления корректор вносит фазовый сдвиг

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\kappa=1}^{K} v_\kappa \Psi_\kappa(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $\Psi_\kappa(\mathbf{r})$ и v_κ — функции отклика и сигналы управления каналами корректора; $K = 1, \ldots, \kappa$ — номера каналов. Представим функции отклика в базисе $\{\varphi_n(\mathbf{r})\}$:

$$\Psi_\kappa(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{n\kappa} \varphi_n(\mathbf{r}), \tag{4}$$

где

$$q_{n\kappa} = \int_\Omega \varphi_n(\mathbf{r}) \Psi_\kappa(\mathbf{r})\, d^2\mathbf{r},$$

а интегрирование ведется по апертуре корректора. Подставляя (4) в (3) и представляя внесенный корректором фазовый сдвиг в виде разложения (1), имеем

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = v_1, v_2, \ldots, v_\kappa$, а матрица Q составлена из элементов $q_{n\kappa}$.

Для полного описания системы необходимо ввести связь сигналов управления корректором с информацией, поступающей с датчика волнового фронта. Ограничимся рассмотрением линейной зависимости вида

$$\mathbf{v} = R\mathbf{u},$$

где R — матрица управления. Учитывая определенные выше матрицы и вводя вектор $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_M$, описывающий вносимую датчиком волнового фронта погрешность, составим выражение для вектора остаточной ошибки коррекции

$$\Delta\mathbf{p} = (E - QRG)\,\mathbf{p} + QR\boldsymbol{\gamma}, \tag{5}$$

где E — единичная матрица. Зададим критерий качества системы I в виде функционала от остаточной ошибки коррекции $J(\Delta\mathbf{p})$, усредненного по ансамблю реализаций волнового фронта. Тогда с учетом (5) имеем

$$I = \langle J((E - QRG)\,\mathbf{p} + QR\boldsymbol{\gamma})\rangle, \tag{6}$$

где $\langle\ldots\rangle$ — знак усреднения по ансамблю реализаций. Подставляя в (6) матрицы, определяющие конкретные АОС, и производя усреднение, можно оценивать качество таких систем по выбранному критерию. Отсюда также понятно, что при заданных датчике, корректоре волнового фронта и статистике векторов $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ качество системы является функцией от R и ограничено максимальным по R значением I. Как известно [1], эффективность АОС можно охарактеризовать отношением функционалов качества в отсутствие и при наличии АОС. С учетом сказанного эффективность АОС ограничена значением

$$\eta = \frac{\langle J(\mathbf{p})\rangle}{\min\limits_R \langle J((E - QRG)\,\mathbf{p} + QR\boldsymbol{\gamma})\rangle}, \tag{7}$$

где матрица R определяется методами вариационного исчисления. Таким образом, выражения (6)— (7) определяют качество и потенциальную эффективность АОС, составленных из конкретных элементов. Сопоставляя эффективность реальных АОС с (7), можно оценивать оптимальность построения таких систем по выбранному критерию качества.

3. Эффективность АОС по критерию минимума средней по апертуре квадратической ошибки коррекции

Получим оценку максимальной эффективности АОС для важного частного случая — критерия минимума средней по апертуре квадратической ошибки коррекции $\overline{\varepsilon}^2$. Легко убедиться, что в этом случае качество АОС определяется выражением

$$\overline{\varepsilon^2} = \langle[(E - QRG)\,\mathbf{p} + QR\boldsymbol{\gamma}]^{\mathrm{T}}[(E - QRG)\,\mathbf{p} + QR\boldsymbol{\gamma}]\rangle. \tag{8}$$

Пусть погрешности отсчетов на выходах датчика статистически независимы и имеют одинаковую статистику. Тогда, производя усреднение, имеем

$$\overline{\varepsilon^2} = \mathrm{Tr}\,[(E - QRG)\,B\,(E - QRG)^{\mathrm{T}}] + \sigma^2\,\mathrm{Tr}\,QRR^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

$$\eta = \mathrm{Tr}B/\overline{\varepsilon^2}, \tag{10}$$

где знак Tr означает сумму диагональных элементов матрицы; B — матрица, состоящая из элементов

$$b_{ij} = \langle p_i p_j \rangle = \iint_{\Omega} B_\varphi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \varphi_i(\mathbf{r}') \varphi_j(\mathbf{r}'') d^2\mathbf{r}' d^2\mathbf{r}'',$$

$B_\varphi(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')$ — ковариационная функция фазы; σ^2 — дисперсия ошибок отсчета на выходах датчика волнового фронта. Чтобы получить оптимальное значение R, запишем (8) через компоненты матриц

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sum_{l=1}^{N} \Big[\sum_{n=1}^{N} \Big(\delta_{ln} - \sum_{\kappa=1}^{K} q_{l\kappa} \sum_{m=1}^{M} r_{\kappa m} g_{mn} \Big) \sum_{n'=1}^{N} \Big(\delta_{ln'} - \sum_{\kappa'=1}^{K} q_{l\kappa'} \sum_{m'=1}^{M} r_{\kappa' m'} g_{m'n'} \Big) B_{nn'} + \sigma^2 \Big(\sum_{\kappa=1}^{K} q_{l\kappa} \sum_{m=1}^{M} r_{\kappa m} \Big)^2 \Big],$$

(здесь δ_{in}, $q_{i\kappa}$, $r_{\kappa m}$, g_{mn} — компоненты единичной матрицы и матриц Q, R, G; N — размерность матрицы B), продифференцируем по компонентам матрицы R, приравняем нулю производные и вернемся к матричной форме записи

$$Q^{\mathrm{T}} QRG (B + B^{\mathrm{T}}) G^{\mathrm{T}} - Q^{\mathrm{T}} (B + B^{\mathrm{T}}) G^{\mathrm{T}} + \sigma^2 Q^{\mathrm{T}} QR = 0. \tag{11}$$

Решая (11) относительно R, получим

$$R = (Q^{\mathrm{T}} Q)^{-1} Q^{\mathrm{T}} BG^{\mathrm{T}} (GBG^{\mathrm{T}} + \sigma^2 E)^{-1}, \tag{12}$$

где E — единичная матрица размерностью $N \times N$. Таким образом, матрица (12) реализует такую связь сигналов управления корректором и датчика волнового фронта, при которой обеспечивается минимальная по апертуре квадратическая ошибка коррекции (9). Подставляя выражения R, полученные для конкретных АОС и статистик искажений волнового фронта в (9) и (10), можно получить максимально достижимые в этих случаях качество и эффективность системы. Проиллюстрируем предложенный подход на примере оценки эффективности АОС, компенсирующей влияние атмосферной турбулентности.

4. Эффективность компенсации влияния атмосферной турбулентности

Проведем расчет потенциальной эффективности 7-канальной АОС, включающей датчик Гартмана и гибкое управляемое зеркало. Пусть измерительные апертуры датчика и приводы корректора расположены с одинаковым шагом кольцом вокруг центрального элемента в узлах гексагональной сетки. При этом функции отклика зеркала одинаковы и имеют гауссовскую форму, а размеры измерительных апертур и ширина функций отклика равны половине расстояния между центрами соседних каналов. Пусть искажения волнового фронта излучения имеют структурную функцию

$$D(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 6{,}88 (|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| r_0)^{5/3},$$

где r_0 — радиус Фрида. Определим матрицы, описывающие датчик, корректор и ковариацию флуктуаций искажений волнового фронта, выбрав в качестве базиса систему полиномов Цернике. Будем считать, что в каждом канале датчика реализуется измерение двух проекций среднего по субапертуре наклона волнового фронта. Тогда элементы матрицы можно записать в виде

$$g_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{s} \displaystyle\int_{\Omega_l} \dfrac{d\varphi_n(\mathbf{r})}{dx} d^2\mathbf{r}, & m = l, \\ \dfrac{1}{s} \displaystyle\int_{\Omega_l} \dfrac{d\varphi_n(\mathbf{r})}{dy} d^2\mathbf{r}, & m = l + 7, \end{cases} \tag{13}$$

где $l = 1, \ldots, 7$ — номера субапертур датчика; $m = 1, \ldots, 14$ — номера измерительных каналов; (x, y) — декартовы координаты в плоскости входной апертуры датчика; s — площадь субапертуры, а интегрирование ведется по субапертурам датчика. Элементы матрицы Q получаются непосредственно из (4). Что касается матрицы B, то для рассматриваемого случая она известна [1]. Ее элементы составляют

$$b_{ij} = a_{ij} (D/r_0)^{5/3},$$

где D — диаметр входной апертуры датчика, a_{ij} — элементы матрицы численных коэффициентов A. Эта матрица близка к диагональной, причем ее элементы уменьшаются по абсолютной величине с ростом индексов. Будем полагать, что средняя по апертуре фаза волны несущественна для решаемой задачи. Поэтому исключим из базиса полином, описывающий постоянную составляющую фазы. Тогда первые диагональные элементы имеют вид [1] $a_{11} = a_{22} = 4{,}49 \cdot 10^{-1}$, $a_{33} = a_{44} = a_{55} = 2{,}32 \cdot 10^{-2}$, $a_{66} = a_{77} = a_{88} = a_{99} = 6{,}19 \cdot 10^{-3}$. Определим матрицу управления R и значение средней по апертуре квадратической ошибки коррекции. Видно, что в рассматриваемом случае

$$R = (Q^{\mathrm{T}} Q)^{-1} Q^{\mathrm{T}} AG^{\mathrm{T}} (GAG^{\mathrm{T}} + \sigma^2 E)^{-1},$$

$$\bar{\varepsilon}^2 = \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \mathrm{Tr}\,[(E - QRG)\,A\,(E - QRG)^{\mathrm{T}}] + \sigma^2\,\mathrm{Tr}\,QRR^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}},$$

$$\eta = \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \mathrm{Tr}\,A/\bar{\varepsilon}^2. \tag{14}$$

Для получения численных значений эффективности необходимо рассчитать матрицы G и Q в соответствии с выражениями (13) и (4), затем, используя стандартные программы ЭВМ, рассчитать R и подставить результат в (14). Указанные операции были произведены на персональном компьютере IBM AT/286 в базисе из 50 полиномов Цернике для различных значений q^2. При этом значения дисперсии погрешности, вносимой датчиком волнового фронта, были соотнесены со средней суммарной мощностью сигнала на выходе датчика

$$\langle \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \rangle = \mathrm{Tr}\,GBG^{\mathrm{T}}$$

и характеризовались параметром

$$q^2 = \frac{\mathrm{Tr}\,GBG^{\mathrm{T}}}{\sigma^2},$$

имеющим смысл отношения сигнал/шум. Численные значения достигаемой при этом эффективности представлены в таблице. Как и следовало ожидать, эффективность коррекции увеличивается с ростом q^2 и асимптотически приближается к значению 3,56.

Эффективность компенсации влияния атмосферной турбулентности 7-канальной АОС

q^2	∞	10^4	10^3	10^2	10
η	3,56	3,50	3,46	3,18	2,15

Для реализации максимальной эффективности достаточно ограничиться величиной $q^2 = 10^2, \ldots, 10^3$. Аналогичным образом может быть рассчитана эффективность других типов АОС при различных q^2.

5. Заключение

При помощи описания элементов АОС и возмущений волнового фронта в едином базисе ортогональных полиномов можно получить соотношения для оценки качества и потенциальной эффективности таких систем, устанавливать связь сигналов управления корректором с информацией, поступающей с датчика волнового фронта, обеспечивающую максимальную эффективность АОС. Сопоставление эффективности реальных АОС с предельным ее значением позволяет оценить оптимальность схемы построения таких систем по выбранному критерию качества.

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 335 с.
2. Безуглов Д.А. //Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. № 12. С. 1303–1310.
3. Буцев С.В., Хисматуллин В.Ш. //Оптико-механическая промышленность. 1991. № 10. С. 3–5.
4. Киракосянц В.Е., Логинов В.А., Слонов В.В. и др. //Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. № 7. С. 770–778.

Государственное научно производственное объединение «Альтаир»,
Москва

Поступила в редакцию
23 июня 1992 г.

A.A. Doctorov. **Optimization of the Efficiency of Compensation for Phase Distortions by Adaptive Optical Systems**.

An approach to description of an adaptive optical system (AOS) in the form of matrices of coefficient of the wave front sensors and correctors characteristics series expansions over a common basis of orthogonal polynomials is proposed. The relation enabling one to estimate the quality and potential efficiency of compensation for phase distortions by an arbitrary AOS are derived. These relations are used for estimations according to the criterion of minimum, over the aperture, rms error of corrections The efficiency of a 7-channel AOS in compensating the atmospheric turbulence is calculated.