

А.Л. Вольпов, Ю.А. Зимин, В.Н. Лопаткин

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИГНАЛА ПРИ СИНТЕЗЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ МАЛОРАЗМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДОМ АКТИВНОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

Проведен анализ статистических характеристик и плотности распределения вероятности сигнала, регистрируемого при использовании метода активной интерферометрии для синтеза изображений малоразмерных объектов, наблюдаемых через турбулентную атмосферу. Рассмотрены два вида сигналов, различие которых обусловлено соотношением диаметра освещающих апертур и радиуса корреляции фазовых искажений оптического поля. Для обоих случаев проанализирована зависимость статистических характеристик от расстояния между освещающими апертурами, от дискрета его изменения. Показано, что плотность распределения вероятности сигналов подчиняется логарифмически нормальному закону. Исследована ее зависимость от дисперсии фазовых искажений оптического поля и числа независимых пространственных и пространственно-частотных областей корреляции регистрируемого сигнала. Показано, в каких случаях плотность распределения стремится к нормальному закону.

Для решения проблемы «видения» малоразмерных удаленных объектов через турбулентную атмосферу, интенсивности отраженного сигнала от которых явно не хватает для применения традиционных методов обработки, связанных с телескопическим приемом, было предложено использовать методы активной интерферометрии. Суть методов заключается в подсвете объекта парами взаимно когерентных источников, разнесенных на различные расстояния, и регистрации интегральной по приемной апертуре оптической системы интенсивности отраженного сигнала [1–3]. При этом полученное разрешение определяется пространственной частотой интерференционной картины, создаваемой источниками (т. е. расстоянием между ними), и теоретически ограничено лишь отношением сигнал-шум, а энергетический потенциал резко повышается за счет использования в качестве приемной оптики крупногабаритного энергетического коллектора (или матрицы коллекторов), требования к качеству изготовления которого существенно ниже, чем для телескопа.

Известно, что любой оптический сигнал, прошедший через турбулентную атмосферу, в том числе и после отражения от поверхности объекта, носит случайный характер, зависящий от флуктуаций показателя преломления атмосферы. Для получения информации об объекте необходимо применять методы обработки случайных сигналов аналогично тому, как это делается при наблюдении астрономических объектов традиционными методами [4]. Однако виды исходной информации при различных методах наблюдения за объектами различны, и для реализации тех или иных алгоритмов обработки необходимо составить статистическую модель исходного сигнала.

Условие наблюдения малоразмерного удаленного объекта через турбулентную атмосферу означает выполнение требования изопланатичности объекта, что эквивалентно локализации слоя турбулентной атмосферы вблизи приемопередающей системы. Рассмотрим подсвет объекта двумя коллимированными световыми пучками, обладающими взаимной когерентностью, через пространственно разнесенные апертуры конечных размеров. Поле в плоскости освещающих апертур будет иметь вид

$$E(\rho) = E_0 [W(\rho) e^{i\varphi(\rho)} + W(\rho - \mathbf{b}) e^{i\varphi(\rho)}], \quad (1)$$

где ρ — радиус-вектор в этой плоскости; \mathbf{b} — вектор пространственного разнесения центров апертур; E_0 — напряженность электрического поля подсвета; $\varphi(\rho)$ — фазовые атмосферные искажения; $W(\rho)$ — функция зрачка передающей апертуры, причем

$$W(\rho) = \begin{cases} 1, & |\rho| \leq \frac{d}{2}, \\ 0, & |\rho| > \frac{d}{2}, \end{cases}$$

где d — диаметр передающей апертуры. Как было показано в [3], в картинной плоскости объекта формируется сложная интерференционная картина, зависящая не только от разнесения \mathbf{b} , но и от $\varphi(\rho)$, в силу чего регистрируемая интегральная интенсивность отраженного сигнала принимает вид

$$I = \frac{S_{\text{кол}}}{2\pi R^2} \int_{\Omega_{\text{об}}} \{|E_1(\mathbf{r})|^2 + |E_2(\mathbf{r})|^2 + 2\text{Re} E_1(\mathbf{r}) E_2^*(\mathbf{r})\} d\mathbf{r}, \quad (2)$$

где

$$E_1(\mathbf{r}) = \frac{E_0 Q(\mathbf{r})}{\lambda R} e^{i \frac{k}{2R} |\mathbf{r}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\boldsymbol{\rho}) \exp(i\varphi(\boldsymbol{\rho}) + i \frac{k}{2R} |\boldsymbol{\rho}|^2 - i \frac{k}{R} \mathbf{r}\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}; \quad (3)$$

$$E_2(\mathbf{r}) = \frac{E_0 Q(\mathbf{r})}{\lambda R} e^{i \frac{k}{2R} |\mathbf{r}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{b}) \exp(i\varphi(\boldsymbol{\rho}) + i \frac{k}{2R} |\boldsymbol{\rho}|^2 - i \frac{k}{R} \mathbf{r}\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho},$$

$S_{\text{кол}}$ — площадь приемной апертуры коллектора; λ — длина волны подсвета; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; R — расстояние до объекта; \mathbf{r} — радиус-вектор в картинной плоскости объекта; $E_0 Q(\mathbf{r})$ — распределение комплексной амплитуды светового поля в картинной плоскости; $\Omega_{\text{об}}$ — двумерная проекция объекта на картинную плоскость.

Информационным в (2) является только 3-й (перекрестный) член, который выделяется из сигнала I различными путями, например, с помощью временной фазовой модуляции [1], откуда находится не только действительная, но и мнимая часть произведения $E_1(\mathbf{r})E_2^*(\mathbf{r})$. В результате этого информационная составляющая сигнала в условиях турбулентной атмосферы приобретает вид

$$q_{\tau}(\mathbf{b}) = \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} \int_{\Omega_{\text{об}}} E_1(\mathbf{r}) E_2^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{S_{\text{кол}}}{\pi \lambda^2 R^4} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{\omega}) \int_{-\infty}^{+\infty} W(\boldsymbol{\rho}_1) W(\boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{b}) \exp[i\varphi(\boldsymbol{\rho}_1) - i\varphi(\boldsymbol{\rho}_2) + i \frac{k}{2R} (|\boldsymbol{\rho}_1|^2 - |\boldsymbol{\rho}_2|^2)] d\boldsymbol{\rho}_1 d\boldsymbol{\rho}_2 \int_{\Omega_{\text{об}}} \exp(-i \frac{k}{R} (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \mathbf{r} + i\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}) d\mathbf{r} d\boldsymbol{\omega}, \quad (4)$$

где $F(\boldsymbol{\omega})$ — комплексный Фурье-спектр изображения объекта $I(\mathbf{r}) = |E_0 Q(\mathbf{r})|^2$; $\boldsymbol{\omega}$ — радиус-вектор в плоскости пространственных частот.

Так как

$$\int_{\Omega} \exp\left(-i \frac{k}{R} (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \mathbf{r} + i\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}\right) d\mathbf{r} \rightarrow (\lambda R)^2 \delta\left(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 + \frac{R}{k} \boldsymbol{\omega}\right),$$

то $q_{\tau}(\mathbf{b})$ преобразуется к виду

$$q_{\tau}(\mathbf{b}) = \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\boldsymbol{\omega}) W(\boldsymbol{\rho}) W\left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{b} - \frac{R}{k} \boldsymbol{\omega}\right) \exp\left(i\varphi(\boldsymbol{\rho}) - i\varphi\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{R}{k} \boldsymbol{\omega}\right) + i\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho}\right) d\boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\rho}, \quad (5)$$

где

$$\tilde{F}(\boldsymbol{\omega}) = F(\boldsymbol{\omega}) \exp\left(-i \frac{R}{2k} |\boldsymbol{\omega}|^2\right).$$

Полученное выражение $q_{\tau}(\mathbf{b})$ характеризует информационный сигнал при произвольных соотношениях между размером передающей апертуры d и радиусом пространственной корреляции светового поля ρ_0 , определяющим «силу» флуктуаций $\varphi(\boldsymbol{\rho})$. При уменьшении размеров d до выполнения условия $d \ll \rho_0$ функция $W(\boldsymbol{\rho})$ становится более узкой, чем $\varphi(\boldsymbol{\rho})$, и тогда

$$q_{\tau}(\mathbf{b}) \approx \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} F\left(\frac{k\mathbf{b}}{R}\right) \exp\left[-i \frac{k}{2R} |\mathbf{b}|^2 + i\varphi(0) - i\varphi(\mathbf{b})\right]. \quad (6)$$

Наряду с измеряемыми сигналами в регистрирующих и измерительных системах всегда присут-

стует аддитивный шум, обусловленный различными факторами: шумом фотоприемного устройства, фотонным шумом, ошибками определения перекрестного члена (4) и т.д. При формировании комплексного сигнала типа $q_T(\mathbf{b})$ шум также становится комплексным. Таким образом, полный измеряемый сигнал будет иметь вид

$$q_T(\mathbf{b}) = \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\boldsymbol{\omega}) W(\boldsymbol{\rho}) W\left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{b} - \frac{R}{k} \boldsymbol{\omega}\right) \times \\ \times \exp\left(i\varphi(\boldsymbol{\rho}) - i\varphi\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{R}{k} \boldsymbol{\omega}\right) + i\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}\right) d\boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\rho} + n(\mathbf{b}), \quad (7)$$

где $n(\mathbf{b})$ — комплексный случайный (шумовой) сигнал.

Рассмотрим вначале статистические характеристики шума. Множество независимых источников шума в силу центральной предельной теоремы приводит к тому, что $n(\mathbf{b})$ можно считать гауссовским и δ -коррелированным со средним значением

$$\langle n(\mathbf{b}) \rangle = \bar{n}$$

и корреляционной функцией

$$\langle n(\mathbf{b}_1) n^*(\mathbf{b}_2) \rangle = N_0 \delta(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2), \quad (8)$$

где N_0 — спектральная плотность мощности шума.

Анализ статистических характеристик сигнала начнем с наиболее простого случая, наблюдающегося при условии $d \ll \rho_0$. Среднее значение $q_T(\mathbf{b})$ будет иметь вид

$$\langle q_T(\mathbf{b}) \rangle = \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} F\left(\frac{k\mathbf{b}}{R}\right) \exp\left[i\frac{k}{2R} |\mathbf{b}|^2 - \frac{1}{2} D_\varphi(|\mathbf{b}|)\right], \quad (9)$$

где $D_\varphi(\mathbf{x})$ — структурная функция фазовых искажений. Корреляционная функция $q_T(\mathbf{b})$ определяется следующим образом:

$$Q_T(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \langle q_T(\mathbf{b}_1) q_T^*(\mathbf{b}_2) \rangle = \left(\frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2}\right)^2 F\left(\frac{k\mathbf{b}_1}{R}\right) F^*\left(\frac{k\mathbf{b}_2}{R}\right) \times \\ \times \exp\left[\left[-\frac{1}{2} D_\varphi(|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2|)\right]\right], \quad (10)$$

откуда можно найти дисперсию $\sigma_{q_T}^2$ при $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$:

$$\sigma_{q_T}^2 = \left(\frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2}\right)^2 \left|F\left(\frac{k\mathbf{b}}{R}\right)\right|^2.$$

Как известно, функция $\exp\left(-\frac{1}{2} D_\varphi(\mathbf{x})\right)$ имеет характерный вид $\exp\left(-3,44 \left|\frac{\mathbf{x}}{\rho_0}\right|^{5/3}\right)$ [5], т.е. сосредоточена в интервале изменения $|x| \lesssim \rho_0$. Поскольку для малоразмерного удаленного объекта характерны неравенства типа

$$\frac{2\pi R}{kl} > \rho_0 \quad \text{или} \quad \frac{R}{kl} \gg \rho_0, \quad (11)$$

где l — поперечный размер объекта; $\frac{2\pi R}{kl}$ — радиус пространственной когерентности объектного поля, то функция $\exp(-3,44 |\mathbf{b} / \rho_0|^{5/3})$ существенно более узкая, чем $F\left(\frac{k\mathbf{b}}{R}\right)$, и $\langle q_T(\mathbf{b}) \rangle$ отлична от ну-

ля только в области расстояний между центрами излучающих апертур $|\mathbf{b}| \leq \rho_0$ (рис. 1). Обозначив $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 + \Delta\mathbf{b}$, можно корреляционную функцию записать в виде

$$Q_T(\mathbf{b}, \Delta\mathbf{b}) = \left(\frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2}\right)^2 F\left(\frac{k\mathbf{b}}{R}\right) F^*\left(k(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})\right) \exp\left(-i\frac{k}{2R}|\Delta\mathbf{b}|^2 + i\frac{k}{R}\mathbf{b}\Delta\mathbf{b} - 3,44\left|\frac{\Delta\mathbf{b}}{\rho_0}\right|^{5/3}\right). \quad (12)$$

Откуда с учетом неравенств (11) ясно, что она определена в области приращений $\Delta\mathbf{b}$: $|\Delta\mathbf{b}| \leq \rho_0$.

Перейдем к анализу плотности распределения вероятности $q_T(\mathbf{b})$. Поскольку в турбулентной атмосфере флуктуации фазы подчиняются нормальному закону вероятности [6], то в силу независимости величин $\varphi(0)$ и $\varphi(\mathbf{b})$ их разность также подчиняется нормальному закону, а $q_T(\mathbf{b})$ в результате этого имеет логарифмически нормальную плотность распределения [6] (рис. 2).

$$w(q_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varphi q_T(\mathbf{b})}} \exp\left\{-\ln^2[q_T(\mathbf{b})/A]/2\sigma_\varphi^2\right\}, \quad (13)$$

где σ_φ^2 — дисперсия фазовых флуктуаций; $A = \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} F\left(\frac{k\mathbf{b}}{R}\right) \exp\left(i\frac{k}{2R}|\mathbf{b}|^2\right)$. В выражении (13) использовано условие $\langle \varphi(0) - \varphi(\mathbf{b}) \rangle = 0$.

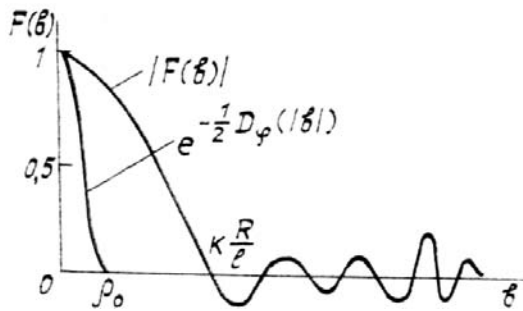


Рис. 1. Соотношение Фурье спектра объекта $F(\mathbf{b})$ и средней ОПФ турбулентной атмосферы $e^{-1/2 D_\varphi(|\mathbf{b}|)}$, формирующее сигнал $q_T(\mathbf{b})$

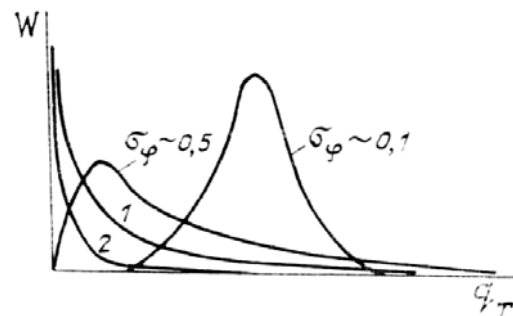


Рис. 2. Плотность распределения сигнала q_T при различных дисперсиях σ_φ^2

Рассмотрим теперь общий случай: сигнал $q_T(\mathbf{b})$ при $d \gtrsim \rho_0$. Среднее значение его будет иметь вид

$$\langle q_T(\mathbf{b}) \rangle = \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\boldsymbol{\omega}) \exp\left(-\frac{1}{2} D_\varphi\left|\frac{R}{k}\boldsymbol{\omega}\right|\right) H_0\left(\mathbf{b} + \frac{R}{k}\boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega}, \quad (14)$$

где

$$H_0\left(\mathbf{b} + \frac{R}{k}\boldsymbol{\omega}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\boldsymbol{\rho}) W\left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{b} - \frac{R}{k}\boldsymbol{\omega}\right) e^{i\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} \quad (15)$$

имеет смысл взаимной безабберационной оптической передаточной функции (ОПФ) передающих апертур. Используя неравенства (11) и определение $D_\varphi(\mathbf{x})$, запишем

$$\langle q_T(\mathbf{b}) \rangle \approx \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} \tilde{F}(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-3,44\left|\frac{R\boldsymbol{\omega}}{k\rho_0}\right|^{5/3}\right) H_0\left(\mathbf{b} + \frac{R}{k}\boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega}, \quad (16)$$

откуда ясно, что среднее значение отлично от нуля лишь в области расстояний $|\mathbf{b}| < d + \rho_0$. При выполнении условия $d \gg \rho_0$, т.е. при больших диаметрах передающих апертур, функция $e^{(-1/2)D_\varphi}$ становится существенно более узкой, в результате чего можно записать, разложив H_0 в ряд Тейлора в точке \mathbf{b} и оставив первые 2 члена,

$$\langle q_{\tau}(\mathbf{b}) \rangle \approx \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} \tilde{F}(0) [H_0(\mathbf{b}) M + \nabla H_0(\mathbf{b}) \theta], \quad (17)$$

где

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-3,44 \left|\frac{R\omega}{k\rho_0}\right|^{5/3}\right) d\omega; \quad \theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{R\omega}{k}\right| \exp\left(-3,44 \left|\frac{R\omega}{k\rho_0}\right|^{5/3}\right) d\omega.$$

Для определения корреляционной функции $Q(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ запишем согласно [3]

$$\begin{aligned} Q_{\tau}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) &= \langle q_{\tau}(\mathbf{b}_1) q_{\tau}^*(\mathbf{b}_2) \rangle \approx \\ &\approx \left(\frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2}\right)^2 MP \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 H_0\left(\mathbf{b}_1 + \frac{R}{k}\omega\right) H_0^*\left(\mathbf{b}_2 + \frac{R}{k}\omega\right) d\omega, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-3,44 \left|\frac{\rho}{\rho_0}\right|^{5/3}\right) d\rho.$$

Обозначив, как и в предыдущем случае, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$, можно увидеть, что $Q_{\tau}(\mathbf{b}, \Delta\mathbf{b})$ определена в области $|\Delta\mathbf{b}| \leq d$ и имеет максимум при $\Delta\mathbf{b} = 0$, когда $Q(\mathbf{b}, 0)$ имеет смысл дисперсии $\sigma_{q_{\tau}}^2$:

$$\sigma_{q_{\tau}}^2 = \left(\frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2}\right)^2 MP \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \left|H_0\left(\mathbf{b} + \frac{R}{k}\omega\right)\right|^2 d\omega. \quad (19)$$

При больших \mathbf{b} , таких что $|\mathbf{b}| \gg d$, в (18) происходит интегрирование высокочастотной части $|F(\omega)|^2$, которая достаточно быстро осциллирует, причем положения минимумов и максимумов чередуются на расстояниях, гораздо меньших d . Поэтому поведение функции Q в этой области с увеличением $|\mathbf{b}|$ будет: а) монотонно убывающим (подобно $\frac{1}{x^2}$), если $|\mathbf{b}| \lesssim d$; б) осцилляционно убывающим (подобно $\sim \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$), если $|\Delta\mathbf{b}| \ll d$. При значениях $|\mathbf{b}| < d$ происходит интегрирование низких и средних частот $|F(\omega)|^2$, на которых флуктуации Фурье-спектра не столь характерны из-за условия малоразмерности объекта. В результате чем меньше $|\mathbf{b}|$, тем меньше осцилляций с изменением \mathbf{b} и слабее зависимость $Q(\mathbf{b}, \Delta\mathbf{b})$ от $\Delta\mathbf{b}$, т.е. в этой области, как и в вышерассмотренном случае, $Q(\mathbf{b}, \Delta\mathbf{b}) \approx |F(\omega)|^2$.

Прежде чем приступить к анализу плотности распределения вероятности сигнала $q_{\tau}(\mathbf{b})$, рассмотрим ту характеристику, которая и определяет его случайную природу — мгновенную ОПФ «передающие апертуры — атмосфера»:

$$H_{\varphi}\left(\mathbf{b} + \frac{R}{k}\omega\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\rho) W\left(\rho - \mathbf{b} - \frac{R}{k}\omega\right) \exp\left[i\omega\rho + i\varphi(\rho) - i\varphi\left(\rho - \frac{R}{k}\omega\right)\right] d\rho. \quad (20)$$

Выше упоминалось, что распределение фазовых флуктуаций оптического поля в турбулентной атмосфере, а также разностей этих флуктуаций подчиняется нормальному закону, в силу чего все подынтегральное выражение в (20) имеет логарифмически нормальную плотность распределения. Всю ОПФ H_{φ} можно приближенно выразить суммой

$$H_{\varphi}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=0}^{N(\mathbf{x})} \tilde{W}_j e^{i\Delta\varphi_j}, \quad (21)$$

где $N(\mathbf{x}) \approx IP \left\{ \frac{1}{\pi\rho_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\rho)W(\rho - \mathbf{x})d\rho \right\}$, IP — целая часть, $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \frac{R}{k}\omega$.

Как было показано в [7], сумма логарифмически нормально распределенных величин также является логарифмически нормальной при конечном N , так что при $\left(\frac{d}{\rho_0}\right)^2 \gg 1$ H_φ распределена по логарифмически нормальному закону на всех частотах $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \frac{R}{k}\boldsymbol{\omega}$. Рассмотрим теперь сигнал $q_\tau(\mathbf{b})$, являющийся сверткой спектра $\tilde{F}(\boldsymbol{\omega})$ с мгновенной ОПФ H_φ на частоте $\frac{k\mathbf{b}}{R}$:

$$q_\tau(\mathbf{b}) = \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\boldsymbol{\omega}) H_\varphi\left(\mathbf{b} + \frac{R}{k}\boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega}. \quad (22)$$

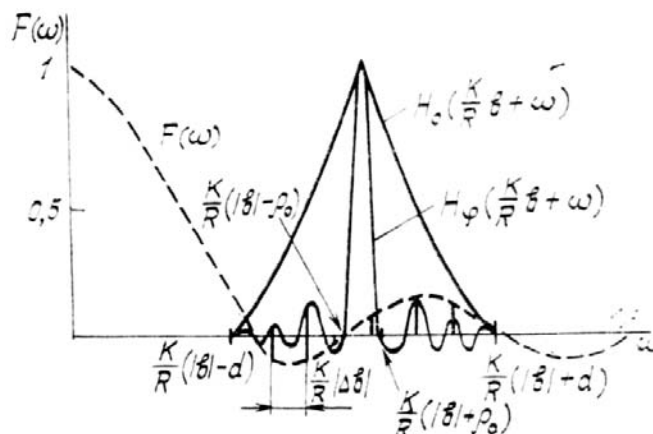


Рис. 3. Соотношение Фурье спектра объекта $F(\boldsymbol{\omega})$ мгновенной $H_\varphi(\boldsymbol{\omega})$ и средней $H_0(\boldsymbol{\omega})$ ОПФ турбулентной атмосферы, формирующее сигнал $q_\tau(\mathbf{b})$

Поскольку $\tilde{F}(\boldsymbol{\omega})$ представляет собой спектр двумерной финитной функции (у объекта имеются четкие границы), определенной в области, плохо разрешаемой традиционными наблюдательными средствами (условие малоразмерности), постольку область определения $\tilde{F}(\boldsymbol{\omega})$ существенно превышает область определения $H_\varphi\left(\mathbf{b} + \frac{R}{k}\boldsymbol{\omega}\right)$, существующую лишь в пределах $H_0\left(\mathbf{b} + \frac{R}{k}\boldsymbol{\omega}\right)$, т. е.

$\frac{k}{R}(b-d) \leq |\boldsymbol{\omega}| \leq \frac{k}{R}(b+d)$. Поэтому и область интегрирования (22) ограничена теми же пределами (см. рис. 3). Согласно теореме отсчетов дискрет изменения вектора \mathbf{b} для определения спектра $\tilde{F}(\boldsymbol{\omega})$ финитной функции $I(\mathbf{r})$, например в направлении α , будет составлять

$$\Delta b_\alpha \approx \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right) \frac{2\pi R}{kl_\alpha}, \quad (23)$$

где l_α — размер объекта в направлении α . Условие малоразмерности объекта характерно тем, что дает плохое его разрешение с помощью традиционных методов наблюдения (даже в отсутствие турбулентной атмосферы). Это означает, что при использовании телескопов достаточно хорошего качества, имеющих приемлемые диаметры входных зрачков и не емких с технологической точки зрения, изображение объекта будет состоять лишь из нескольких элементов разрешения. Для подсвета объекта в данном случае нет смысла использовать коллиматоры с большим диаметром апертуры, т.к. отсутствие дорогостоящих телескопов — это одно из достоинств метода активной интерферометрии. В связи с этим условие малоразмерности можно охарактеризовать соотношением

$$\frac{2\pi R}{kl} \gtrless d, \quad (24)$$

откуда с учетом (23) следует, что

$$|\Delta \mathbf{b}| \gtrless \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right) d, \quad (25)$$

где $|\Delta \mathbf{b}| = \Delta b_\alpha$ в направлении α . Таким образом, при интегрировании в (22) участвует лишь несколько (M) независимых частот спектра $F(\omega)$, отстоящих друг от друга на расстоянии $|\Delta \mathbf{b}|$:

$$q_\tau^{(\mathbf{b})} \approx \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} \sum_{m=0}^M \tilde{F}_m H_{\varphi_m}(\mathbf{b}), \quad (26)$$

где

$$M \approx \left(\frac{2d}{|\Delta \mathbf{b}|} \right)^2.$$

С учетом (21) $q_\tau(\mathbf{b})$ можно выразить в виде

$$q_\tau(\mathbf{b}) = \frac{S_{\text{кол}}}{\pi R^2} \sum_{m=0}^M \sum_{j=0}^N \tilde{F}_m \tilde{W}_j e^{i\Delta \varphi_{jm}}, \quad (27)$$

что характеризует суммирование $M \times N(\mathbf{b})$ независимых логарифмически нормально распределенных величин. При конечных $N = \left(\frac{d}{\rho_0} \right)^2 \gg 1$ умножение на M с учетом условия (25) мало изменяет закон распределения суммы $q_\tau(\mathbf{b})$, т. к. согласно работе Митчела [8] логарифмически нормальный закон очень устойчив к суммированию и стремится к нормальному закону по центральной предельной теореме крайне медленно. Однако при условии $N = \left(\frac{d}{\rho_0} \right)^2 \gg 1$ суммирование по $N \times M$ реализациям может оказаться заметным. Для оценки числа реализаций $L = NM$, при которых закон распределения $q_\tau(\mathbf{b})$ можно считать нормальным, воспользуемся разложением плотности распределения суммы L независимых случайных величин по полиномам Эрмита [7]

$$f_L(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \left(1 + \frac{\gamma_1}{64L^{1/2}} h_3(\mathbf{z}) + \frac{\gamma_2}{24L} h_4(\mathbf{z}) + \dots + O(L^{-3/2}) \right), \quad (28)$$

где $h_n(z)$ — полиномы Эрмита; γ_1, γ_2 — коэффициенты асимметрии и эксцесса; $z = (x - L\langle x \rangle) / \sigma_x L^{1/2}$, x — случайная величина; $\langle x \rangle, \sigma_x^2$ — ее среднее значение и дисперсия соответственно. Так как наибольший вклад в $f_L(z)$ из всей суммы (после единицы) вносит член $\frac{\gamma_1}{64L^{1/2}} h_3(z)$, то величину $L_{\text{кр}}$ можно оценить из условия

$$\frac{\gamma_1 h_3(\mathbf{z})}{64\sqrt{L_{\text{кр}}}} \ll 1 \quad \text{или} \quad L_{\text{кр}} \gtrsim 0,025 \gamma_1^2 h_3^2(\mathbf{z}). \quad (29)$$

Для логарифмически нормального распределения величины коэффициент асимметрии [7] определяется как

$$\gamma_1 = (\exp \sigma_{\Delta \varphi}^2 + 2) \sqrt{\exp \sigma_{\Delta \varphi}^2 - 1}. \quad (30)$$

Так как при формировании разностей фаз $\Delta \varphi \equiv \varphi(\rho) - \varphi\left(\rho - \frac{R}{k} \omega\right)$ фактически вычисляются фазы, некоррелированные друг с другом, и (передающие апертуры разнесены на вектор \mathbf{b} , для которого выполняется условие $b > \rho_0$) то $\sigma_{\Delta \varphi}^2 \equiv \sigma_\varphi^2$. Полином Эрмита $h_3(z) = z^3 - 3z$, будучи умноженным на $\exp(-z^2/2)$, заметно проявляет свои свойства при малых и средних значениях z (на больших z произведение стремится к 0 как $e^{-z^2/2}$), поэтому для расчета $L_{\text{кр}}$ положим $h_3(z) \sim 1$. В таблице приведены оценки значений для различных величин дисперсии фазы σ_φ^2 и соответствующие им предельные значения

$$\left(\frac{d}{\rho_0} \right)_{\text{кр}}^2 \quad \text{при различных величинах} \quad M = \left(\frac{2d}{|\Delta \mathbf{b}|} \right)^2.$$

Из таблицы видно, что на $L_{\text{кр}}$ и на предельное отношение площадей передающей апертуры d^2 и ячейки пространственной когерентности фазовых искажений ρ_0^2 самое сильное влияние оказывает дис-

персия флуктуаций фазы σ_φ^2 . Чем меньше дисперсия, тем быстрее наступает переход $q(\mathbf{b})$ к нормальному распределению. При слабых флуктуациях ($\sigma_\varphi \sim 0,1\pi \div 0,2\pi$) распределение $q(\mathbf{b})$ можно считать нормальным даже при относительно небольших соотношениях $(d/\rho_0)^2$, что согласуется с результатами [8].

σ_φ	M				
	$L_{\text{вп}}$	4	9	25	100
0,8 π	$1,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^4$	$1,7 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^3$
π	$1,25 \cdot 10^9$	$3,2 \cdot 10^8$	$1,4 \cdot 10^8$	$4,75 \cdot 10^7$	$1,25 \cdot 10^7$
1,5 π	$3 \cdot 10^{23}$	$7,5 \cdot 10^{22}$	$3,3 \cdot 10^{22}$	$1,2 \cdot 10^{22}$	$3 \cdot 10^{21}$

Однако в турбулентной атмосфере дисперсия фазы обычно достигает больших значений $\sigma_\varphi^2 \sim \sim (10\pi)^2$ [6], в результате чего при любых приемлемых соотношениях $(d/\rho_0)^2 \gg 1$ сигнал $q_T(\mathbf{b})$ подчиняется логарифмически нормальному закону. Таким образом, случайный сигнал $q_T(\mathbf{b})$ состоит из двух составляющих: информационного сигнала $q_T(\mathbf{b})$ и шума $n(\mathbf{b})$. Шум $n(\mathbf{b})$ является нормально распределенным и δ -коррелированным со спектральной плотностью мощности N_0 . Сигнал $q_T(\mathbf{b})$ при $(d/\rho_0)^2 \ll 1$ распределен по логарифмически нормальному закону с нулевым средним значением для реальных значений $|\mathbf{b}| > \rho_0$ и корреляционной функции (10) и дисперсией

$$\sigma_{q_T}^2 = \left(\frac{S_{\text{фоЛ}}}{\pi R^2} \right)^2 \left| F \left(\frac{\mathbf{kb}}{R} \right) \right|^2.$$

При $(d/\rho_0) \gtrsim 1$ сигнал $q_T(\mathbf{b})$ распределен по логарифмически нормальному закону при значениях $\sigma_\varphi \gtrsim 0,2\pi$, а при $(d/\rho_0)^2 \gg 1$ граница σ_φ перехода к нормальному распределению повышается примерно до $0,5 \div 0,7\pi$. В турбулентной атмосфере со средними и сильными флуктуациями фазы практически при всех значениях $(d/\rho_0) \gg 1$ распределение имеет логарифмически нормальный закон.

1. Устинов Н. Д. и др. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. № 10. С. 1970.
2. Aleksoff S. C. // Appl. Opt. 1978. V. 15. № 8.
3. Вольпов А. Л., Зимин Ю. А., Лопаткин В. Н. // Квантовая электроника. 1990. Т. 17. № 12.
4. Бакут П. А. и др. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 9. С. 1757.
5. Fried D. L. // Opt. Act. 1979. V. 26. № 5. P. 597.
6. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере/Под ред. Дж. Стробена. М.: Мир, 1981. 414 с.
7. Barakat R. // J. Opt. Soc. Amer. 1976. V. 66. № 3. P. 211.
8. Mitchell R. L. // J. Opt. Soc. Amer. 1969. V. 58. № 9. P. 1267.

Научно-производственное объединение
«Астрофизика», Москва

Поступила в редакцию
15 февраля 1990 г.

A. L. Volpov, Yu. A. Zimin, V. N. Lopatkin. A Statistical Model of a Signal in the Synthesis of Small Objects Images Using Active-Interferometry Techniques.

An analysis is being carried out of statistical characteristics and probability density distribution of a signal recorded using active interferometry technique for synthesizing images of small objects observed through turbulent atmosphere. Two types of signals are considered in the paper, which differ by the value of ratio of the illuminating aperture and correlation radius of the optical field phase distortions. In both cases the analysis is made of the signal statistical properties dependence on the separation between illuminating apertures and on the separation change increment. It is shown that the probability density of signal obeys the lognormal law. The analysis is also made of the signal dependence on the optical field phase distortions and on the number of spatial and spatio-frequency regions of the recorded signal correlation. It is also shown in the paper in which cases the probability density tends to normal distribution law.