«Оптика атмосферы и океана», **19,** № 12 (2006)

УДК 534.222

И.И. Орлов, В.И. Куркин, А.В. Ойнац

Распространение волн и геометрическая оптика

Институт солнечно-земной физики СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 18.08.2006 г.

Рассмотрен формально строгий метод построения решений для обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в задачах распространения волн в слоисто-неоднородных средах. Изучаемый метод основан на преобразовании однородного дифференциального уравнения к формально неоднородному дифференциальному уравнению, оператор которого допускает точные решения типа приближений геометрической оптики.

Неоднородное дифференциальное уравнение стандартным способом сводится к интегральному уравнению вольтерровского типа, которое преобразуется к канонической системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для полученной системы дифференциальных уравнений предложен строгий метод построения последовательности приближений к точному решению исходного дифференциального уравнения.

Предложенная схема построения последовательности приближений для решений обыкновенного дифференциального уравнения может быть использована в задачах распространения волн в слоисто-неоднородных средах. Изложенный метод применим при наличии потерь и не имеет ограничений на масштабы неоднородностей, а его обоснование не связано с использованием асимптотических соображений.

Введение

Приближение геометрической оптики широко используется при решении различных физических задач, связанных с исследованиями распространения волн (см., например, [1]). В особенности велика его роль в задачах распространения волн в плавно неоднородных средах. В данной статье на примере распространения акустических волн в слоисто-неоднородной среде рассматривается формально строгий подход к исследованию волнового уравнения, тесно связанный с приближением геометрической оптики и свободный от ограничений на свойства среды.

Известно, что (см., например, [2]) даже небольшие изменения параметров среды могут существенно сказаться на коэффициенте отражения. В связи с этим желательно иметь метод построения решений волновых уравнений, позволяющий строить последовательные приближения к точному решению. С математической точки зрения, при одном из подходов геометрическая оптика является предельным случаем волновой теории при стремлении длины волны к нулю. Это и позволяет использовать асимптотические методы при обосновании геометрической оптики и построении ряда последовательных приближений.

В настоящей статье рассмотрим задачу построения последовательных приближений к решению акустического волнового уравнения для слоисто-неоднородной среды, не использующую асимптотические методы. В основу излагаемого далее подхода положена основная форма приближения геометрической оптики, без обращения к каким-либо асимптотическим соображениям (см., например, [3]).

Основная система уравнений

Пусть зависимость параметров среды от координаты x в акустическом случае задается вещественными функциями $\rho(x)$, $c(x)$, где $\rho(x)$ и $c(x)$ – плотность водной среды и скорость распространения звука в ней. Предположим также, что при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$ параметры водной среды стремятся к постоянным значениям, равным соответственно ρ_-, c_- и ρ_+, c_+ [2]. В рамках этой модели задача излучения акустических волн может быть сведена к уравнению для функции Грина

$$\frac{d^2G(x,k)}{dx^2} + k^2n^2(x)G(x,k) = \delta(x - x_0), \qquad (1)$$

где использованы обозначения $k = \omega/c_0$, а $n^2(x) = c_0^2/c^2(x)$. Отметим, что рассматриваемая задача может быть обычным образом обобщена на случай наклонного падения волны на слоистую среду, как это рассмотрено, например, в [2].

Известно, что для построения функции Грина $G(x, k)$ достаточно найти пару линейно независимых решений однородного уравнения

$$\frac{d^2u(x,k)}{dx^2} + k^2n^2(x)u(x,k) = 0. \qquad (2)$$

Именно эта задача и будет основной в настоящей работе. Известно [3], что отправным пунктом для нахождения приближения геометрической оптики являются решения стационарного волнового уравнения для однородной среды. Действительно, считается, что распространение волн в среде с медленно изменяющимися параметрами (на длине волны) близко к распространению волн в однородной среде с характеристиками решения, близкими к параметрам неоднородной среды на рассматриваемом участке. Такая точка зрения не связана с использованием асимптотических соображений и также имеет право на существование как особый метод.

Основываясь на аналогии с распространением в однородной среде, решения уравнения (2) будем искать в рамках следующей схемы. Введем пару функций

$$f_{\pm}(x,k) = \frac{1}{\sqrt{n(x)}} \exp\left(\pm ikn_{+}x \mp ik\int_{x}^{\infty}\left[n(y) - n_{+}\right]dy\right), \quad (3)$$

асимптотический характер поведения которых специальным образом нормирован в бесконечности. Эти функции формально удовлетворяют однородному уравнению

$$\frac{d^2 f_{\pm}(x,k)}{dx^2} + \left\{k^2 n^2(x) + \chi(x)\right\} f_{\pm}(x,k) = 0, \quad (4)$$

где использовано обозначение

$$\chi(x) = -\sqrt{n(x)}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{n(x)}} = -\frac{3(n'(x))^2}{4n^2(x)} + \frac{n''(x)}{2n(x)}. \quad (5)$$

Функция $\chi(x)$ называется шварцианом [4. Т. 5]. Шварциан обладает тем свойством, что он инвариантен относительно дробно-линейных преобразований определяющей его функции $n(x)$.

Преобразуем однородное уравнение (2) к неоднородному уравнению вида

$$\frac{d^2 u(x,k)}{dx^2} + \left\{k^2 n^2(x) + \chi(x)\right\} u(x,k) = \chi(x)u(x,k). \quad (6)$$

Запись уравнения (2) в виде уравнения (6) удобна тем, что для оператора, стоящего в левой части (6), функции (3) являются решениями однородного уравнения. Тем самым задача построения решений уравнения (2) сведена к построению решений неоднородного уравнения (6). Отметим, что проделанные преобразования точны и не основаны на асимптотических соображениях. Более того, они не требуют какой-либо плавности изменений свойств неоднородной среды. В том случае, когда функция $n(x)$ может принимать нулевые значения, функция $\chi(x)$ будет иметь особенность, но этот случай в данной статье не рассматривается.

Действуя стандартным образом, преобразуем неоднородное уравнение (6) к интегральному уравнению, задав соответствующие условия в бесконечности. Для этого построим функцию Грина следующего уравнения:

$$\frac{d^2 G(x,k)}{dx^2} + \left\{k^2 n^2(x) + \chi(x)\right\} G(x,k) = \delta(x - x_0). \quad (7)$$

Так как полный набор решений однородного уравнения, определяемого оператором, стоящим в левой части (7), известен, то функцию Грина будем искать в виде линейной комбинации этих решений при $x < x_0$:

$$G(x,x_0) = C_{+}f_{+}(x,k) + C_{-}f_{-}(x,k). \quad (8)$$

При $x > x_0$ считаем функцию Грина равной нулю. Для определения коэффициентов этой линейной комбинации имеются два условия: непрерывность функции Грина в точке $x = x_0$ и условие на разность ее производных в этой же точке. Из этих условий следует линейная система уравнений, разрешая которую, получаем

$$C_{+} = f_{-}(x_0,k)/\Delta, \quad C_{-} = -f_{+}(x_0,k)/\Delta, \quad (9)$$

где использовано обозначение

$$\Delta = f_{+}(x,k)f_{-}^{(1)}(x,k) - f_{+}^{(1)}(x,k)f_{-}(x,k). \quad (10)$$

Так как исследуемое уравнение без первой производной, то функция $\Delta(x, k) = \Delta(k)$ и ее значение (k и $n(x)$ вещественны) может быть вычислено, например, при $x \to \infty$. Легко убедиться, что это значение равно $\Delta = -2ik$. После этого, проделав стандартные преобразования, получаем функцию Грина в виде

$$G(x,x_0,k) = \frac{\theta(x_0 - x)}{2ik\sqrt{n(x)n(x_0)}} \times$$

$$\times\left\{\exp\left[ik\int_{x}^{x_0} n(y)dy\right] - \exp\left[-ik\int_{x}^{x_0} n(y)dy\right]\right\}, \quad (11)$$

которая тождественно равна нулю при $x > x_0$. Отметим, что функция Грина (11) играет вспомогательную роль, поэтому для нее нет необходимости ставить условия излучения в бесконечности. Такого рода условия имеют смысл лишь для той функции Грина, которая соответствует исходной задаче на излучение волн.

С помощью функции Грина (11) уравнение (6) может быть преобразовано к интегральному уравнению вольтерровского типа

$$u_{+}(x) = f_{+}(x) + \frac{1}{2ik}\int_{x}^{\infty}\frac{\chi(y)}{\sqrt{n(y)n(x)}}\left\{\exp\left[ik\int_{x}^{y} n(z)dz\right] -\right.$$

$$\left. - \exp\left[-ik\int_{x}^{y} n(z)dz\right]\right\} u_{+}(y)dy. \quad (12)$$

Эта же формула записывается и в виде

$$u_{+}(x) = f_{+}(x) -$$

$$-\frac{1}{2ik}\int_{x}^{\infty}\chi(y)\left\{f_{+}(x)f_{-}(y) - f_{-}(x)f_{+}(y)\right\}u_{+}(y)dy. \quad (13)$$

Введем теперь пару функций, определив их равенствами

$$\begin{cases} u_{+}^{+}(x,k) = f_{+}(x,k)\left\{1 - \dfrac{1}{2ik}\displaystyle\int_{x}^{\infty}\chi(y)f_{-}(y,k)u_{+}(y)dy\right\}, \\ u_{+}^{-}(x,k) = f_{-}(x,k)\dfrac{1}{2ik}\displaystyle\int_{x}^{\infty}\chi(y)f_{+}(y,k)u_{+}(y)dy. \end{cases} \quad (14)$$

Дифференцируя введенные функции, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{du_+^+(x)}{dx} = \dfrac{f_+^{(1)}(x)}{f_+(x)}u_+^+(x) + \dfrac{\chi(x)}{2ikn(x)}u_+(x), \\ \dfrac{du_+^-(x)}{dx} = \dfrac{f_-^{(1)}(x)}{f_-(x)}u_+^-(x) - \dfrac{\chi(x)}{2ikn(x)}u_+(x). \end{cases} \quad (15)$$

Аналогично этой системе получается вторая система дифференциальных уравнений, определяющая второе линейно независимое решение исходного волнового уравнения $u_-(x, k)$. Если из компонент $u_+^\pm(x,k)$ решения $u_+(x, k)$ образовать первый столбец матрицы $Z(x, k)$, а из компонент $u_-^\pm(x,k)$ второй столбец этой матрицы, то введенные две системы уравнений в матричной записи принимают вид

$$\frac{dZ(x,k)}{dx} = ikn(x)I_3Z(x,k) - \\ -\frac{n'(x)}{2n(x)}I_0Z(x,k) + \frac{\chi(x)}{ikn(x)}I_+Z(x,k), \quad (16)$$

где I_α – матрицы Паули; $I_+ = (I_3 + iI_2)/2$. При переходе от системы (15) и от второй системы, аналогичной ей, к матричному уравнению (16) использованы равенства

$$f_+^{(1)}(x) = \left\{ikn(x) - \frac{n'(x)}{2n(x)}\right\}f_+(x), \\ f_-^{(1)}(x) = \left\{-ikn(x) - \frac{n'(x)}{2n(x)}\right\}f_-(x). \quad (17)$$

Если перейти к новой функции с помощью замены $Z(x,k) \Rightarrow Z_1^{[0]}(x,k)/\sqrt{n(x)}$, то уравнение (16) примет следующий вид:

$$\frac{dZ_1^{[0]}(x,k)}{dx} = ikn(x)I_3Z_1^{[0]}(x,k) + \frac{\chi(x)}{ikn(x)}I_+Z_1^{[0]}(x,k). \quad (18)$$

Из формулы (18) следует, что уменьшение эффекта отражения исчезает с ростом частоты при условии ограниченности шварциана, а это обычно имеет место в акустическом случае.

Уравнение (18) можно также записать в виде

$$\frac{dZ_1^{[0]}(x,k)}{dx} = ikn(x)I_3\left[1 - \frac{\chi(x)}{2k^2n^2(x)}\right]Z_1^{[0]}(x,k) + \\ +\frac{\chi(x)}{2kn(x)}I_2Z_1^{[0]}(x,k). \quad (19)$$

Если же ввести обозначения

$$\alpha_3^{[0]}(x) = kn(x)\left[1 - \frac{\chi(x)}{2k^2n^2(x)}\right], \\ \alpha_2^{[0]}(x) = \frac{\chi(x)}{2kn(x)}, \quad (20)$$

то уравнение (19) примет вид

$$\frac{dZ_1^{[0]}(x,k)}{dx} = i\alpha_3^{[0]}(x)I_3Z_1^{[0]}(x,k) + \\ +\alpha_2^{[0]}(x)I_2Z_1^{[0]}(x,k). \quad (21)$$

Здесь нижний индекс у коэффициентов указывает на то, что это коэффициент при матрице Паули с тем же индексом, а верхний на то, что это коэффициенты на соответствующем шаге проводимых итераций. Нижний индекс у искомой матрицы указывает на отсутствующее слагаемое с соответствующей матрицей Паули, а верхний индекс указывает на номер цикла из трех последовательных исключений отдельных слагаемых уравнения. Детально это рассмотрено далее.

Схема построения решения

Рассмотрим схему построения последовательных приближений к точному решению, основанную на уравнении (21). Для этого с целью фиксации рассматриваемого множества решений потребуем выполнения условия

$$\lim_{x\to+\infty} Z_1^{[0]}(x,k)\exp(-ikI_3x) = I_0. \quad (22)$$

Введем функцию $Y_3^{[1]}(x,k)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{dY_3^{[1]}(x,k)}{dx} = i\alpha_3^{[0]}(x)I_3Y_3^{[1]}(x,k) \quad (23)$$

с условием в бесконечности типа (22). В случае вещественных $n(x)$, k функция $\alpha_3^{[0]}(x)$ будет вещественной, а матричная экспонента $Y_3^{[1]}(x,k)$ будет иметь вид суммы экспонент с матричными коэффициентами. Эту матрицу-функцию представим так:

$$Y_3^{[1]}(x) = \exp\left\{i\beta_3^{[1]}(x)I_3\right\} = \\ = I_0\cos\left[\beta_3^{[1]}(x)\right] + iI_3\sin\left[\beta_3^{[1]}\right], \quad (24)$$

где введено обозначение

$$\beta_3^{[1]}(x) = \alpha_3^{[0]}(\infty)x - \int_x^\infty\left\{\alpha_3^{[0]}(y) - \alpha_3^{[0]}(\infty)\right\}dy. \quad (25)$$

Такая форма вводимой функции выбрана для того, чтобы обеспечить выполнение условия типа (22) для матрицы $Y_3^{[1]}(x,k) = Y_3^{[1]}(x)$. Отметим, что (матричная) функция $Y_3^{[1]}(x,k)$ имеет вид, аналогичный приближению геометрической оптики, но с несколько иной фазой в экспоненте.

Если ввести теперь обозначение $Z_1^{[0]}(x,k) = Y_3^{[1]}(x,k)Z_3^{[1]}(x,k)$, то уравнение (21) преобразуется к следующему уравнению:

$$\frac{dZ_3^{[1]}(x)}{dx} = \alpha_2^{[0]}(x) \times$$

$$\times\left\{I_2\cos\left[2\beta_3^{[1]}(x)\right]-I_1\sin\left[2\beta_3^{[1]}(x)\right]\right\}Z_3^{[1]}(x). \quad (26)$$

Здесь использовано свойство матриц Паули $I_2I_3 = iI_1$. Вводя соответствующие обозначения, уравнение (26) записываем в стандартной форме

$$\frac{dZ_3^{[1]}(x)}{dx} = \alpha_2^{[1]}(x)I_2Z_3^{[1]}(x)+\alpha_1^{[1]}(x)I_1Z_3^{[1]}(z), \quad (27)$$

где использованы обозначения

$$\begin{gathered}\alpha_2^{[1]}(x) = \alpha_2^{[0]}(x)\cos\left[2\beta_3^{[1]}(x)\right],\\ \alpha_1^{[1]}(x) = -\alpha_2^{[0]}(x)\sin\left[2\beta_3^{[1]}(x)\right].\end{gathered} \quad (28)$$

Принцип введения обозначений тот же, что и сформулированный ранее. Условие в бесконечности для новой матрицы принимает вид

$$\lim_{x\to+\infty} Z_3^{[1]}(x,k) = I_0. \quad (29)$$

Теперь вводим решение $Y_2^{[2]}(x,k)$ следующего уравнения

$$\frac{dY_2^{[2]}(x)}{dx} = \alpha_2^{[1]}(x)I_2Y_2^{[2]}(x) \quad (30)$$

с условием в бесконечности типа (29). Это решение имеет вид

$$Y_2^{[2]}(x) = \exp\left\{-I_2\int_x^\infty \alpha_2^{[1]}(y)dy\right\} =$$

$$= I_0\mathrm{ch}\left[\int_x^\infty \alpha_2^{[1]}(y)dy\right] - I_2\mathrm{sh}\left[\int_x^\infty \alpha_2^{[1]}(y)dy\right]. \quad (31)$$

Полагая $Z_3^{[1]}(x) = Y_2^{[2]}(x)Z_2^{[2]}(x)$, для матрицы $Z_2^{[2]}(x)$ из (27) получаем уравнение

$$\frac{dZ_2^{[2]}(x)}{dx} = \alpha_1^{[2]}(x)I_1Z_2^{[2]}(x)+i\alpha_3^{[2]}(x)I_3Z_2^{[2]}(z). \quad (32)$$

Коэффициенты в этой формуле определены равенствами:

$$\begin{gathered}\alpha_1^{[2]}(x) = \alpha_2^{[1]}(x)\mathrm{ch}\left[2\int_x^\infty \alpha_2^{[1]}(y)dy\right],\\ \alpha_3^{[2]}(x) = -\alpha_2^{[1]}(x)\mathrm{sh}\left[2\int_x^\infty \alpha_2^{[1]}(y)dy\right].\end{gathered} \quad (33)$$

И если теперь ввести решение уравнения (третий шаг)

$$\frac{dY_1^{[3]}(x)}{dx} = \alpha_1^{[2]}(x)I_1Y_1^{[3]}(x), \quad (34)$$

то, учитывая представление этого решения в виде

$$Y_1^{[3]}(x) = \exp\left\{-I_1\int_x^\infty \alpha_1^{[2]}(y)dy\right\} =$$

$$= I_0\mathrm{ch}\left[\int_x^\infty \alpha_1^{[2]}(y)dy\right] - I_1\mathrm{sh}\left[\int_x^\infty \alpha_1^{[2]}(y)dy\right], \quad (35)$$

преобразуем уравнение (32) к виду

$$\frac{dZ_1^{[3]}(x)}{dx} = i\alpha_3^{[3]}(x)I_3Z_1^{[3]}(x)+\alpha_2^{[3]}(x)I_2Z_1^{[3]}(z). \quad (36)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{gathered}\alpha_3^{[3]}(x) = \alpha_3^{[2]}(x)\mathrm{ch}\left[2\int_x^\infty \alpha_1^{[2]}(y)dy\right],\\ \alpha_2^{[3]}(x) = -\alpha_3^{[2]}(x)\mathrm{sh}\left[2\int_x^\infty \alpha_1^{[2]}(y)dy\right].\end{gathered} \quad (37)$$

Уравнение (36) аналогично уравнению (21), и, следовательно, его решение может строиться по тому же алгоритму, что и изложенный выше. Отличие будет только в том, что теперь для всех вводимых матриц условие в бесконечности будет аналогично формуле (29). Подчеркнем, что рассмотренный выше алгоритм позволяет рекуррентно строить последовательные приближения в рамках формально строгой схемы, причем при слабых ограничениях на коэффициенты исходного уравнения.

Рассмотрим некоторые свойства полученных уравнений. Если интерпретировать введенные функции $u_+^\pm(x,k)$, $u_-^\pm(x,k)$ как части решения, ответственные за перенос энергии в одном из двух возможных направлений, то можно ввести (по определению) функцию отражения, положив $R_+(x,k) = u_+^-(x,k)/u_+^+(x,k)$. Для этой функции из уравнения (18) следует уравнение типа Риккати

$$\begin{gathered}\frac{dR_+(x,k)}{dx} = -2ikn(x)R_+(x,k) -\\ -\frac{\chi(x)}{2ikn(x)}\left[1+R_+(x,k)\right]^2.\end{gathered} \quad (38)$$

Заметим, что функция отражения удовлетворяет нулевому условию в бесконечности, что соответствует отсутствию отражения от бесконечно удаленной части среды. Это — при условии нахождения источника поля слева от участка неоднородности. Для второго линейно независимого решения можно получить аналогичное уравнение.

Выводы

Изложенный подход к изучению решений уравнения (1) на первых шагах формально напоминает метод геометрической оптики (метод ВКБ) для одномерного случая. Но, в действительности, это иной подход, который основан на том, что если мы знаем решение уравнения с близким, в некотором смысле, коэффициентом, то можно поставить задачу на изучение свойств решений нужного уравнения с помощью интегрального уравнения, получающегося из неоднородного дифференциального уравнения. Какие же решения вспомогательного уравнения мы будем использовать для построения интегрального уравнения, определяется конкретной задачей и может быть совсем не связано с методом геометрической оптики. Тем самым использованный в работе прием носит общий характер.

Кроме этого предложена рекуррентная схема построения последовательности приближений к точному решению, формально не зависящая от каких-либо предположений о коэффициентах исходного уравнения. Изложенная в работе схема может быть использована и при исследовании распространения радиоволн в слоистых средах. Определенные изменения при этом возможны в случае наличия отражающих барьеров, как это, например, имеет место в задачах, относящихся к вертикальному зондированию ионосферы.

Практическая эффективность предложенной в работе схемы может быть исследована на основе математического моделирования процесса распространения для случаев, представляющих самостоятельный интерес.

1. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
3. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: ГИФМЛ, 1960. 552 с.
4. *Математическая* энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1985. 1246 с.

I.I. Orlov, V.I. Kurkin, A.V. Oinats. **Wave propagation and geometrical optics.**

A formally strict method for solution of ordinary differential equations, which arise in the problems of wave propagation in a stratified inhomogeneous medium, is considered in the paper. The method is based on transformation of a homogeneous differential equation to a formally inhomogeneous one with operator that admits exact solutions similar to geometrical optics approximations.

Inhomogeneous differential equation is reduced to Volterra integral equation, which then is transformed to the first-order canonical combined differential equations. For obtained combined differential equations, a strict solution method by successive approximations to exact solution of the initial differential equation is proposed.

The proposed scheme can be used in problems of wave propagation in stratified inhomogeneous media. The method is applicable in the presence of losses and has no heterogeneity scale restrictions. Substantiation of the method does not use asymptotical expressions.