

В.Н. Крупчатников, А.А. Фоменко

## ПОЛУЛАГРАНЖЕВА СХЕМА ПЕРЕНОСА ТРАССЕРОВ В КЛИМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ECSib

Представлено описание полулагранжевой, полуэвлявной схемы переноса в климатической модели ECSib. Полулагранжев метод имеет ряд преимуществ по сравнению с эйлеровым подходом. Дается описание численной схемы модели для уравнений момента, температуры, приземного давления, влаги и химических трассеров.

## 1. Введение

В рамках всемирной климатической программы (WCRP) создан проект по моделированию распределения парниковых газов и влияния их на климат. Исследование парниковых газов в атмосфере проводится совместно специалистами по динамике атмосферы и специалистами по атмосферной химии. Первым этапом этого проекта было создание глобальных моделей переноса химических трассеров (описание таких моделей и сравнение результатов моделирования по ним можно найти, например, в [1–3]).

В данной работе предлагается описание полулагранжевой версии климатической модели ECSib [5–7], где полулагранжева схема переноса используется совместно с полуэвлявной схемой интегрирования по времени [4]. Формулировка полулагранжева метода не зависит от способа пространственной аппроксимации уравнений системы. Обсуждается результат тестового расчета переноса пассивной примеси на сфере через полюс.

## 2. Полулагранжева версия климатической модели ECSib. Численная схема

Рассмотрим систему уравнений динамики атмосферы в  $\sigma$ -системе координат на сфере [5]. Скорости изменения импульса, вызванные вертикальной мелкомасштабной диффузией и приземным напряжением трения, описываются уравнением диффузии и уравнениями теории Монино–Обухова. Параметрически учитываются процессы конвекции и мелкомасштабной диффузии тепла и влаги, процессы конденсации и испарения влаги, перенос радиации. В качестве краевых условий для динамического оператора ставятся условия периодичности по долготе, а также условие ограниченности решения на полюсах. По вертикали ставятся следующие краевые условия:

$\dot{\sigma} = 0$  при  $\sigma = 0,1$ ;  $\Phi_s = gz_s$  при  $\sigma = 1$ , где  $z_s$  — превышение земной поверхности над уровнем моря;  $\dot{\sigma}$  — вертикальная составляющая скорости в  $\sigma$ -системе

координат;  $g$  — ускорение свободного падения. На поверхности Земли заданы географическое среднеклиматическое распределение льдов, температуры поверхности океана, температуры и влажности почвы на глубине 2 м, широтное распределение угла склонения Солнца и концентрация озона. Влагосодержание почвы и толщина снежного покрова меняются во времени.

Систему уравнений запишем в векторном виде, более удобном для применения полулагранжева метода.

Уравнение для момента

$$\frac{d(\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{dt} = -\nabla\Phi - RT\nabla(\ln p) + F_v, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор горизонтальной скорости;  $T$  — температура;  $p$  — давление;  $\Phi$  — геопотенциал;  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловая скорость вращения Земли;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, равный по длине радиусу Земли;  $R$  — газовая постоянная сухого воздуха;  $F_v$  — скорости изменения момента количества движения, обусловленные напряжениями Рейнольдса.

Уравнения для температуры, пара, жидкой фракции, льда и пассивной примеси:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{c_p} \frac{\omega}{p} + F_T, \quad (2)$$

$$\frac{dq}{dt} = F_q, \quad (3)$$

$$\frac{dq_l}{dt} = F_{ql}, \quad (4)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = F_{qi}, \quad (5)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = F_\chi. \quad (6)$$

Здесь  $c_p$  — удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме;  $\omega$  — вертикальная составляющая скорости в  $p$ -системе координат;  $F_q, F_{ql}, F_{qi}$  — неадиабатические

тические источники (стоки);  $F_\chi$  – член, описывающий источник (сток) и диффузию примеси.

### 2.1. Полулагранжева схема с вертикальной интерполяцией. Общий случай

Когда мы численно решаем уравнения динамики атмосферы, записанные в эйлеровой форме, мы вычисляем значение любой искомой величины  $X(t + \Delta t)$  в момент времени  $t + \Delta t$  в некоторой точке  $F$  области, зная значение  $X(t - \Delta t)$  в этой же точке в момент времени  $t - \Delta t$ . При решении уравнений, записанных в лагранжевой форме, мы вычисляем  $X(t + \Delta t)$  в точке  $F$ , зная  $X(t - \Delta t)$  в некоторой другой точке  $O$ . Траектория, соединяющая точку  $O$  и точку  $F$ , является частью большого круга на сфере. Среднюю точку траектории будем обозначать буквой  $M$ . Точки  $O$  и  $M$  находятся как решение нелинейной системы уравнений характеристик итерационным методом. В общем случае любое уравнение из системы (1)–(6) можно записать в виде

$$\frac{dX}{dt} = \mathcal{A} + \mathcal{F},$$

где  $\mathcal{A}$  – суммарный вклад динамических источников;  $\mathcal{F}$  – суммарный вклад физических источников, при этом в динамическом источнике  $\mathcal{A}$  соответственно выделяется часть  $\mathcal{B}$ , которая аппроксимируется по полуэявной схеме. Если обозначить нижними индексами ( $F, O, M$ ) геометрическое положение точки, а верхними (+, −, 0) – время ( $t + \Delta t, t - \Delta t, t$ ) соответственно, то аппроксимация указанного уравнения примет вид

$$\begin{aligned} (X - (1 + \varepsilon_{\mathcal{B}}) \Delta t \beta \mathcal{B})_F^+ = & \{X^- + [(1 - \varepsilon_{\mathcal{A}}) \Delta t \mathcal{A} - \\ & - (1 - \varepsilon_{\mathcal{B}}) \Delta t \beta \mathcal{B}]^{\pm 0} + [(1 - \varepsilon_{\mathcal{C}}) \Delta t \beta \mathcal{B} + 2 \Delta t \mathcal{F}]_{F,O,M}^- + \\ & + \{(1 + \varepsilon_{\mathcal{A}}) \Delta t \mathcal{A} - (1 + \varepsilon_{\mathcal{B}}) \Delta t \beta \mathcal{B}\}_{F,0}^{\pm 0}, \end{aligned}$$

если явные члены в момент времени  $t$  вычисляются как среднее значение в конечной  $F$  и исходной  $O$  точках. Значения соответствующих величин в указанных точках находятся с помощью процедур изогеометрической интерполяции [2].

Если явные члены в момент времени  $t$  вычисляются в средней точке  $M$  (значения величин в этой точке также находятся путем интерполяции), то

$$\begin{aligned} (X - (1 + \varepsilon_{\mathcal{B}}) \Delta t \beta \mathcal{B})_F^+ = & \{X^- + [(1 - \varepsilon_{\mathcal{B}}) \Delta t \beta \mathcal{B} + \\ & + 2 \Delta t \mathcal{F}]_{F,O,M}^- - [(1 - \varepsilon_{\mathcal{B}}) \Delta t \beta \mathcal{B}]_{F,O,M}^{\pm 0} + \\ & + \{2 \Delta t \mathcal{A}\}_M^{\pm 0} + \{-(1 + \varepsilon_{\mathcal{B}}) \Delta t \beta \mathcal{B}\}_F^{\pm 0}, \end{aligned}$$

$\varepsilon_{\mathcal{A}}$  и  $\varepsilon_{\mathcal{B}}$  – параметры усреднения вдоль траектории для полуэявной схемы. Операция усреднения позволяет

убрать шум (гравитационные волны). Полуэявные члены входят в уравнения с весом  $\beta$ .

### 2.2. Уравнения для момента, температуры, влажности и пассивной примеси

В дальнейшем изложении все обозначения соответствуют тем, что приняты в [5–7].

Члены в момент времени  $t$  вычисляются следующим способом:

$$[\dots]^{\pm 0} = \frac{(1 - \varepsilon_{\mathcal{A}}) [\dots]_{F,O,M}^{\pm 0} + (1 + \varepsilon_{\mathcal{A}}) [\dots]_F^{\pm 0}}{2}$$

для явных членов и

$$[\dots]^{\pm 0} = \frac{(1 - \varepsilon_{\mathcal{B}}) [\dots]_{F,O,M}^{\pm 0} + (1 + \varepsilon_{\mathcal{B}}) [\dots]_F^{\pm 0}}{2}$$

для полуэявных членов.

#### Уравнение для момента

Определение  $X, \mathcal{A}, \mathcal{B}$  и  $\mathcal{F}$  и условия на верхней и нижней границах:

$$X = \mathbf{V} + \delta_v(2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}),$$

$$\mathcal{A} = -2(1 - \delta_v)(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) - \nabla\Phi - RT\nabla(\ln(p)),$$

$$\mathcal{B} = -\nabla \left[ \gamma T + \frac{R_a \bar{T}}{p} \Pi \right], \quad \mathcal{F} = \mathbf{F}_v,$$

$$\mathbf{V}_{\eta=0} = \mathbf{V}_{l=1}, \quad \mathbf{V}_{\eta=1} = \mathbf{V}_{l=L};$$

$\Phi = \gamma T$  – соотношение квазистатики;  $\eta = f(p, p_s)$  – обобщенная (гибридная) вертикальная координата (например,  $\sigma$ ), при этом давление на уровнях  $\eta$  определяется следующим образом:  $p = A + B\Pi$ ;  $\Pi = p_s$ ;  $A$  и  $B$  – функции  $\eta$ ;  $L$  – количество слоев по вертикали в модели.

Подробное описание аппроксимации уравнения для момента в модели ECSib дано в работе [7].

#### Уравнение для температуры

Определение  $X, \mathcal{A}, \mathcal{B}$  и  $\mathcal{F}$  и условия на верхней и нижней границах:

$$X = T, \quad \mathcal{F} = F_T,$$

$$\mathcal{A} = \frac{RT}{c_p p} \omega, \quad \mathcal{B} = -\frac{m'^2}{m^2} \tau D,$$

$\tau$  – матрица вклада дивергенции в тенденцию температуры;  $m, m'$  – метрические коэффициенты в картографической системе координат.

На верхней границе

$$T_{\eta=0} = T_{l=1}.$$

На нижней границе

$$T_{\eta=1} = T_{l=L}.$$

Полулагранжева аппроксимация уравнения для температуры при интерполяции в среднюю точку траектории

$$\begin{aligned} & \left\{ T - (1 + \varepsilon_{\vartheta}) \beta \Delta t \left( -\frac{m'^2}{m^2} \tau D \right) \right\}_F^+ = \\ & = \left\{ \left[ T + (1 - \varepsilon_{\vartheta}) \beta \Delta t \left( -\frac{m'^2}{m^2} \tau D \right) + 2\Delta t F_T \right]^+ + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \varepsilon_{\vartheta}) \Delta t \left[ -\beta \left( -\frac{m'^2}{m^2} \tau D \right) \right]^{\pm 0} \right\}_{F,O,M}^+ + \\ & + \left\{ \left[ 2\Delta t \frac{RT}{c_p} \frac{\omega}{p} \right]^{\pm 0} \right\}_M + \left\{ (1 + \varepsilon_{\vartheta}) \Delta t \left[ -\beta \left( -\frac{m'^2}{m^2} \tau D \right) \right]^{\pm 0} \right\}_F. \end{aligned}$$

Уравнение для влажности  $q$  и пассивной примеси  $\chi$

Определение  $X$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$  и условия на верхней и нижней границах:

$$\begin{aligned} X &= (q, \chi), \mathcal{A} = 0, \\ \mathcal{E} &= 0, \mathcal{F} = F_q. \end{aligned}$$

Верхняя граница:

$$(q_{\eta=0}, \chi_{\eta=0}) = (q_{l=1}, \chi_{l=1}).$$

Нижняя граница:

$$(q_{\eta=1}, \chi_{\eta=1}) = (q_{l=L}, \chi_{l=L}).$$

Полулагранжева аппроксимация уравнения для водяного пара

$$\{q\}_F = \{[q + 2\Delta t F_q]^- \}_{F,O,M}.$$

Жидкая вода, лед и пассивная примесь  $\chi$ . Схема аппроксимации такая же, как и для водяного пара:

$$\{q_l\}_F = \{[q_l + 2\Delta t F_{q_l}]^- \}_{F,O,M}$$

– для жидкой воды,

$$\{q_i\}_F = \{[q_i + 2\Delta t F_{q_i}]^- \}_{F,O,M}$$

– для льда,

$$\{\chi\}_F = \{[\chi + 2\Delta t F_{\chi}]^- \}_{F,O,M}$$

– для примеси.

### 2.3. Уравнение неразрывности с $\Pi = p_s$ в качестве прогностической переменной

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \eta} \left( D + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \right) + F'_m, \quad (7)$$

$F'_m$  – вклад физических процессов в изменчивость приземного давления. Имеем следующие равенства:

$$p = A(\eta) + B(\eta) \Pi, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \nabla \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} = 0, \quad (8)$$

где  $p$  – давление на соответствующем уровне;  $\eta$  – обобщенная вертикальная координата (может быть и  $\sigma$ , как в модели ECSib), которые дают

$$\frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \eta} D + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = F'_m. \quad (9)$$

Аппроксимация. Обозначим  $F_m = F'_m \Delta \eta$ . Теперь рассмотрим вертикальную аппроксимацию для каждого слоя  $l$  (слой  $l$  расположен между промежуточными слоями  $\bar{l}$  и  $\bar{l} - 1$ ). (9) будет иметь вид

$$\Delta B_l \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \Delta p_l D_l + \left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{\bar{l}} - \left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{\bar{l}-1} = F_m. \quad (10)$$

Дискретные значения для  $\dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta}$  определяются на промежуточных уровнях  $\bar{l}$ :

$$\left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{\bar{l}} = - \left[ B_{\bar{l}} \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sum_{j=1}^l \{ D_j \Delta p_j + (\mathbf{V}_j \nabla \Pi) \Delta B_j \} \right] + \mathcal{E}_{\bar{l}}, \quad (11)$$

где

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = - \sum_{l=1}^L \{ D_l \Delta p_l + (\mathbf{V}_l \nabla \Pi) \Delta B_l \} \quad (12)$$

и

$$\mathcal{E}_{\bar{l}} = 0,$$

если мы предполагаем, что объем воздуха, занятый дождевыми каплями, не замещается сухим воздухом, когда капли падают, и  $\mathcal{E}_{\bar{l}} = g B_{\bar{l}} (P + E) - g F_{p_{\bar{l}}}$ ,

$\mathcal{E}_{\eta=0} = 0$ ,  $\mathcal{E}_{\eta=1} = gE$ , если замещается.

Подставляя (11) в (12), получим

$$\Delta B_l \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \Delta B_l \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mathbf{V}_l \nabla \Pi \right\} + \Delta \mathcal{E}_l = F_m, \quad (13)$$

где  $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$  из (12).

Интегрируя (13) по вертикали и используя

$$\sum_{l=1}^L \Delta B_l = 1, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= \sum_{l=1}^L \Delta B_l \left\{ \Pi^- + 2\Delta t \left( \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mathbf{V}_l \nabla \Pi \right)^{\pm 0} \right\} - 2\Delta t \mathcal{E}_{\eta=1}^{\pm 0} + \\ &+ 2\Delta t \sum_{l=1}^L F_m^-. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя  $\sum_{l=1}^L \Delta B_l = 1$ ,  $F_m$  можно переписать как

$$\sum_{l=1}^L \Delta B_l \left( \sum_{m=1}^L F_m \right) \text{ и } e_{\eta=1}^{\pm 0} \text{ как } \sum_{l=1}^L \Delta B_l (e_{\eta=1}^{\pm 0}).$$

При использовании полуэвневной схемы  $t$ -члены либо интерполируются в среднюю точку, либо берутся как средние значения в исходной и конечной точках.

### 3. Случай адвекции скалярного поля с локальной структурой через полюс

Для проверки схемы переноса и различных процедур изогометрической интерполяции был выбран тест, предложенный в [2]. В этом тесте скорость горизонтальной адвекции задается формулами:

$$u = U[\cos\beta \cos\phi + \sin\beta \sin\phi \cos\lambda], \quad v = -U \sin\beta \sin\lambda,$$

где  $\beta$  – угол между осью твердого вращения и полярной осью;  $U = (\pi/46)/2$  радиан за один временной шаг  $\Delta t$  на сферической сетке  $72 \times 46$  в модели ECSib,  $\Delta t = 35$  мин.

В качестве переносимой субстанции рассматривается скалярное поле с локальной структурой, кото-

рая в начальный момент распределена в окрестности с центром в точке  $(\lambda = 3\pi/2, \phi = 0)$ :

$$f(\lambda, \phi) = \begin{cases} 0,5 (1 + \cos(\pi r/R)), & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $r = \arccos[\cos(\lambda - 3\pi/2) \cos\phi]$  радиан для  $|\lambda - 3\pi/2| < \pi/2$ ;  $R = 7(2\pi)/72$  радиан.

На рис. 1–3 показаны распределения поля  $f$  в момент времени, предшествующий переносу локальной структуры через полюс, в момент переноса структуры через полюс и в момент после прохождения ею полюса. Из рисунков видно, что перенос осуществляется без изменения формы.

### 4. Заключение

Трехмерные модели переноса химических трассеров необходимы для оценки глобального баланса парниковых и других газов, а также, что существенно, они позволяют интерпретировать ряды измерений в различных точках. В работе предложено описание трехмерной полулагранжевой версии климатической модели ECSib ИВМиМГ СО РАН, которая позволяет также моделировать распределения химических трассеров в атмосфере.

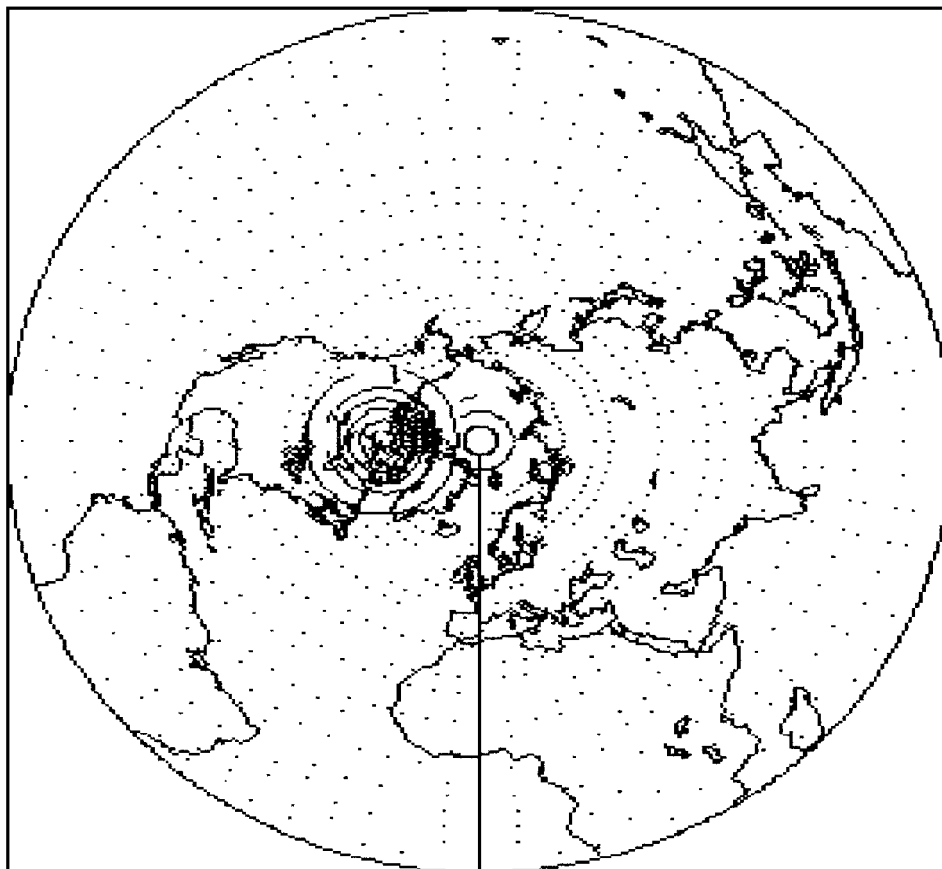


Рис. 1. Распределение поля  $f$  в момент времени, предшествующий переносу локальной структуры через полюс

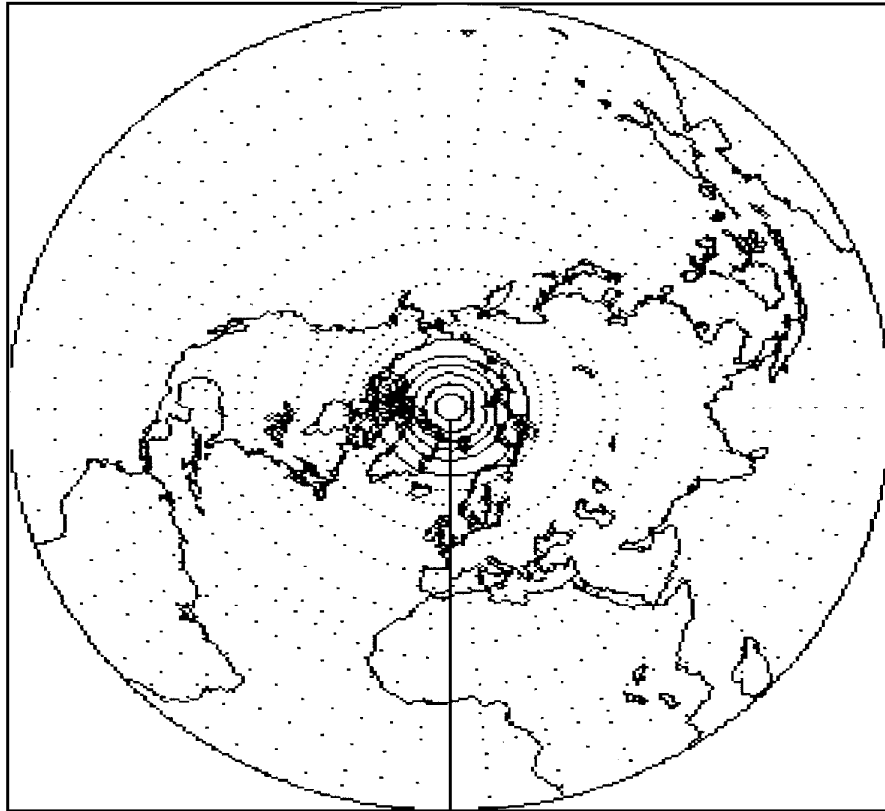


Рис. 2. Распределение поля  $f$  в момент переноса структуры через полюс

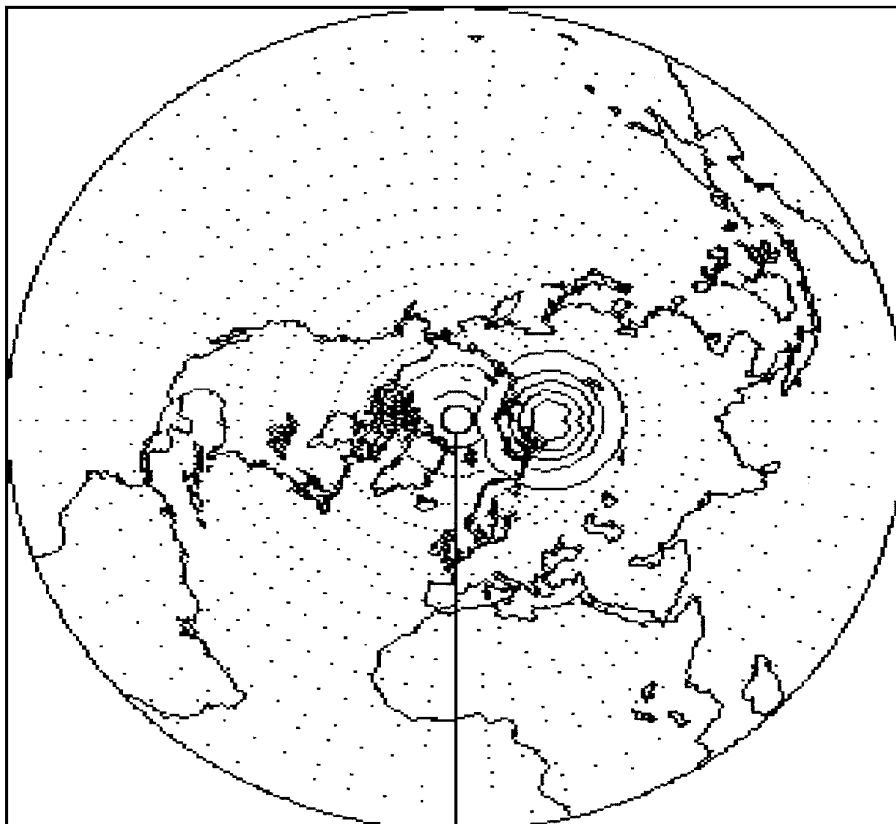


Рис. 3. Распределение поля  $f$  в момент времени после прохождения локальной структуры через полюс

В заключение авторы выражают признательность М.А. Толстых за предоставление программ интерполяции.

Работа поддержана РФФИ, гранты № 95-05-14588, 97-05-65194.

1. Heimann N. The global atmospheric tracer model TM2. Hamburg, 1996. 53 p. (Report / Max-Planck Institut für Meteorologie, N 10).
2. Williamson D., Rasch P. // Monthly Weather Review. 1989. V. 117. P. 102–129.

3. Prather M., McElroy M., Wofsy S., Russel G., Rind D. // J. Geophys. Res. 1987. V. 92. P. 6579–6613.
4. Robert A. // J. Meteor. Soc. Japan. 1981. V. 60. P. 319–325.
5. Крупчатников В.Н., Маев В.К., Фоменко А.А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1992. Т. 28. № 1. С. 33–45.
6. Fomenko A.A., Krupchatnikoff V.N., Yantzen A.G. A finite-difference model of atmosphere (ECSib) for climatic investigations // Bull. Nov. Comp. Center, Num. Model. in Atmosph., etc, 4. 1996. P. 11–19.
7. Крупчатников В.Н., Фоменко А.А. Полулагранжева полунезная схема переноса в климатической модели ECSib. Новосибирск, 1997. 21 с. (Препринт/Ин-т вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, № 1105).

Институт вычислительной математики и математической геофизики,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
4 февраля 1998 г.

*V.N. Krupchatnikoff, A.A. Fomenko. The Semi-Lagrangian Tracer Transport Scheme in Climatic Model ECSib.*

A semi-Lagrangian and semi-implicite advection scheme in the ECSib climate model is presented. A semi-Lagrangian method has a number of advantages as compared with Eulerian approach. The numerical schemes for momentum, temperature, surface pressure, moisture, and chemical tracer equations are presented.