«Оптика атмосферы», **3**, № 12 (1990)

УДК 538.3

А.В. Куренков, В.И. Кислов, О.И. Шанин

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗМЕРЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА МЕТОДОМ ГАРТМАНА

Рассматривается задача измерения волнового фронта с точки зрения теории линейных систем. Приведена передаточная функция измерителя. Получены соотношения для определения погрешности измерений и оптимальных параметров измерителя.

Измерение волнового фронта (ВФ) при изучении различных физических процессов и для контроля качества технических объектов является актуальной проблемой. В последнее время интерес к измерителям ВФ возрос в связи с развитием систем управления ВФ [1]. Практически измеренный ВФ отличается от истинного. Причины этого заключаются в неидеальности измерителя, в присутствии в ВФ шумов, которые связаны, например, с мелкомасштабной компонентой ВФ в линейных адаптивных системах, осуществляющих компенсацию низкочастотной части ВФ и др.

Ранее отмечалось [2], что при измерениях методом Гартмана диафрагма (экран) является фильтром пространственных частот ВФ. Рассмотрим задачу оптимизации процесса измерений в рамках вышеуказанного подхода.

Разность $\Delta\varphi(\rho)$ между истинным и измеренным значениями фазы представим в виде [3]

$$\Delta\varphi(\rho) = \int \{(1 - K(\omega))\, S(\omega) - \xi(\omega)\, K(\omega)\} \exp(-i\omega\rho)\, d^2\omega,$$

где $S(\omega)$, $\xi(\omega)$ — пространственные Фурье спектры истинного $S(\rho)$ и аддитивного шумового $\xi(\rho)$ ВФ; $\rho = \mathbf{r}/R$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки ВФ; R — радиус пучка; $K(\omega)$ — передаточная характеристика измерителя ВФ. Пусть $S(\rho)$ и $\xi(\rho)$ — случайные статистически независимые поля с нулевыми среднестатистическими значениями $\overline{S(\rho)}$, $\xi(\overline{\rho})$ (черта сверху — статистическое усреднение) и спектральными плотностями мощности $G_s(\omega)$ и $G_\xi(\omega)$ соответственно. При этом формула для среднего квадрата ошибки измерений получается путем возведения в квадрат и статистического усреднения

$$\sigma^2 = \int \{ |1 - K(\omega)|^2 G_s + |K(\omega)|^2 G_\xi\}\, d^2\omega. \tag{1}$$

Метод Гартмана позволяет измерять локальные наклоны ВФ, в данном случае важен средний квадрат наклона:

$$g^2 = \frac{1}{P} \int_P (\operatorname{grad} \Delta\varphi(\rho))^2\, d^2\rho,$$

где P — площадь пучка в переменных ρ. Из формулы для $\Delta\varphi$ путем дифференцирования можно получить выражение для g^2

$$g^2 = \int \omega^2 \{ |1 - K(\omega)|^2 G_s + |K(\omega)|^2 G_\xi\}\, d^2\omega. \tag{2}$$

Теорема Винера-Хопфа определяет оптимальную передаточную функцию, которая минимизирует ошибку

$$K_{\mathrm{opt}}(\omega) = G_s(\omega)/(G_s(\omega) + G_\xi(\omega)). \tag{3}$$

На практике функцию (3) приближают к реализуемым функциям с целью получения квазиоптимального фильтра.

Рассмотрим передаточную функцию реального измерителя ВФ. При измерениях с помощью датчика Гартмана информацию о фазе (точнее, о локальном наклоне ВФ) приписывают малому, но конечному элементу площади, с которой собирается необходимая для измерения энергия. Используя спектральное представление ВФ для передаточной функции измерителя, несложно получить

$$K_0(\omega) = \int F(\rho) \exp(i\omega\rho)\, d^2\rho / \int F(\rho)\, d^2\rho,$$

где $F(\rho)$ — функция пропускания усредняющей апертуры (отверстия). В случае круглой апертуры с радиусом r_0

$$K_0(\omega) = 2J_1(\omega\rho_0)/\omega\rho_0, \tag{4}$$

здесь $\rho_0 = r_0/R$, J_1 — функция Бесселя первого порядка [5].

Формулы (1) и (2) дают возможность по известным статистическим характеристикам сигнала и шума определить ошибку измерения. Надлежащим выбором размера усредняющей апертуры ρ_0 можно приблизить передаточную функцию (4) к оптимальной. Если размер усредняющей апертуры фиксирован, то получить квазиоптимальную передаточную функцию можно, используя дополнительный пространственный фильтр [4], схема которого представлена на рис. 1. Линза *2* служит для преобразования Фурье, измеряемого в плоскости *1* ВФ. Линза *4* осуществляет обратное преобразование пространственных частот, пропущенных фильтром *3*. Соответствующий рис. 1 фильтр в случае малых фазовых аберраций характеризуется передаточной функцией

$$K_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in P_1, \\ 0, & \omega \notin P_1, \end{cases} \tag{5}$$

где $\omega = \kappa R r/f$, κ — волновое число; r — радиус-вектор точки диафрагмы *3*; P_1 — площадь центрально-симметричного отверстия в диафрагме *3* в переменных ω. Система фильтр-датчик Гартмана имеет передаточную функцию $K_0(\omega)K_1(\omega)$.

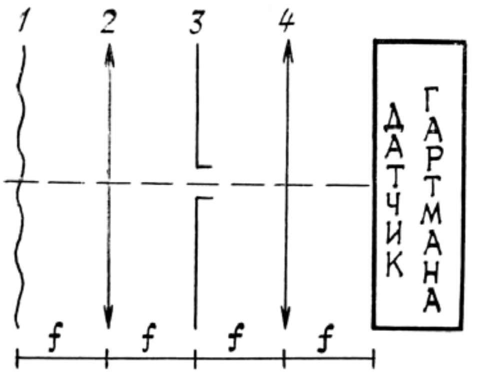

Рис. 1. Схема фильтрации: f — фокусное расстояние для линз *2*, *4*; *1* — измеряемый волновой фронт; *3* — пространственный фильтр

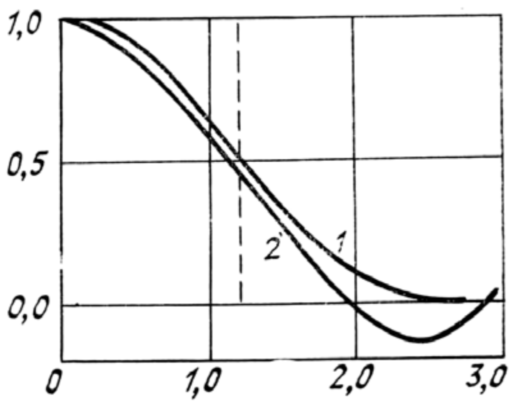

Рис. 2. Передаточные функции от пространственной частоты: *1* — оптимальная; *2* — датчика Гартмана

Рассмотрим пример выбора оптимальных параметров измерителя ВФ. Пусть сигнал имеет спектральную плотность

$$G_s(\omega) = (\sigma_s^2 C_s^2/4\pi)\exp(-\omega^2 C_s^2/4), \tag{6}$$

где $C_s = R_s/R$ — радиус корреляции сигнала, нормированный на радиус пучка, σ_s — дисперсия фазы. Примем, что шум имеет аналогичную (6) функцию спектральной плотности мощности с радиусом корреляции и дисперсией σ_ξ^2. На основе соотношения (2) в случае круглого отверстия в диафрагме *3* рис. 1 для среднего квадрата ошибки измерения локальных наклонов ВФ получаем:

$$g^2 = (4\sigma_s^2/C_s^2)(1 + x_s)\exp(-x_s) + (4\sigma_\xi^2/C_\xi^2)[1 - (1 + x_\xi)\exp(-x_\xi)],$$
$$x_s = \omega_1^2 C_s^2/4;\ x_\xi = \omega_1^2 C_\xi^2/4, \tag{7}$$

$\omega_1 = \kappa r_1 R/f$, r_1 — радиус диафрагмы *3* рис. 1.

Для передаточной функции (4) аналогичное выражение для ошибки имеет вид

$$g^2 = (4\sigma_s^2/C_s^2)[1 + 2\exp(-U_s)I_1(U_s)/U_s - 2\exp(U_s/2)] + (8\sigma_\xi^2/C_\xi^2)\exp(-U_\xi)\cdot I_1(U_\xi)/U_\xi,$$
$$U_s = 2\rho_0^2/C_s^2;\ U_\xi = 2\rho_0^2/C_\xi^2, \tag{8}$$

где I_1 — модифицированная (от мнимого аргумента) функция Бесселя [5].

Выражение (7) имеет минимум в точке

$$\omega^2_{opt} = 8 \ln (\sigma_\xi C_\xi / \sigma_s C_s)/(C^2_\xi - C^2_s), \tag{9}$$

который существует при условии $C_s/C_\xi > 1$, $\sigma_s/\sigma_\xi > C_s/C_\xi$. Оптимальный радиус r диафрагмы *3* (рис. 1) равен $f\omega_{opt}/\kappa R$. Оптимальный размер апертуры для передаточной функции вида (4) можно найти, анализируя зависимость (8), или оценить, воспользовавшись аппроксимацией передаточной функции (4) функцией (5). На рис. 2 в зависимости от пространственной частоты построена для $G_s = 2 \exp(-2\,\omega^2)$, $G_\xi = \exp(-\omega^2)$ оптимальная передаточная функция (кривая *1*), нормированная к 1. Штриховая линия соответствует выражению (9) для ω_{opt}, кривая *2* — передаточной функции (4) при $\rho_0 = 2{,}26/\omega_{opt}$.

С ω_1 — пространственной частотой пропускания измерителя, связаны следующие два вопроса. Во-первых, если с помощью измерителя получают дискретный сигнал, то по теореме Котельникова для однозначного восстановления непрерывной функции необходимо, чтобы шаг дискретизации удовлетворял неравенству $d < ½\,\omega_1$. Во-вторых, количество мод в представлении ВФ в виде конечного ряда зависит от ω_1. Наиболее просто эту зависимость можно оценить на примере разложения в ряд Фурье. Для ряда из N^2 функций (косинусы и синусы) максимальная пространственная частота $\pi N/2$ должна быть порядка полуширины спектра ВФ ω_1, т.е. $N \sim 2\,\omega_1/\pi$. Такая оценка позволяет минимизировать ошибку измерения на этапе восстановления ВФ.

Разработанное описание процесса измерения волнового фронта с помощью датчика Гартмана как процесса фильтрации пространственных частот позволяет оценить погрешность измерения и оптимизировать основные параметры измерителя. Полученные результаты могут использоваться также при решении задач восстановления волнового фронта и управления им.

1. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 248 с.
2. Витриченко Э.А. //Астрономический журнал. 1976. Т. 53. № 3. 660 с.
3. Алхимов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую оптику. М.: Наука, 1981, 640 с.
4. Юу Ф.Т.С. Введение в теорию дифракции, обработку информации и голографию. М.: Советское радио, 1979. 304 с.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.

Научно-производственное объединение
Научно-исследовательского института «Луч», Подольск

Поступила в редакцию
10 мая 1990 г.

A.V. Kurenkov, V.I. Kislov, O.I. Shanin. **Spatial Filtering in Wave- front Estimation**.

Linear system theory is applied to the wavefront estimation. The Hartmann wavefront sensor transfer function and optimum transfer function are discussed. Equation for errors of measurement is presented.