

В.П. Аксенов, Ю.Н. Исаев

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА В ЗАДАЧЕ ФАЗОВОГО ОПТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ

Рассматривается использование преобразования Радона — основного преобразования вычислительной томографии для восстановления распределения фазы волновых полей и коэффициентов Цернике ее полиномиального разложения по измерениям наклонов волнового фронта в датчике Гартмана. Разработаны алгоритмы, позволяющие восстанавливать фазовый фронт и определять амплитуды его модовых составляющих при произвольных размерах и расположении субапертур. В численном эксперименте оценивается точность восстановления.

При создании адаптивных оптических систем, устройств контроля качества оптики значительное внимание уделяется разработке датчиков волнового фронта. В частности, датчик Гартмана позволяет получить оценку усредненных значений производной фазы в точках, соответствующих центрам субапертур [1, 2]. Эти данные следует преобразовать в значения фазы. Существующие алгоритмы такого преобразования основаны на представлении производных конечными разностями с последующим решением системы линейных алгебраических уравнений. Используются и другие численные методы. Такой подход в известной мере затрудняет оценку качества восстановления волнового фронта в присутствии шумов, не позволяет эффективно выбрать размеры, форму субапертур, положение датчиков.

В настоящей статье для решения этой задачи предлагается интегральное представление, связывающее фазу со значениями ее частных производных. На этой основе получены аналитические соотношения для расчета наклона, дефокусировки, астигматизма и других модовых составляющих разложения фазы по полиномам Цернике [1], минуя этап восстановления самой фазы. Эффективность такого способа восстановления исследуется в численном эксперименте.

Для того чтобы найти соответствующее соотношение для восстановления фазы $S(x, y)$ по её частным производным $\mu(x, y) = \partial S(x, y)/\partial x$, $\nu(x, y) = \partial S(x, y)/\partial y$, запишем обратное преобразование Радона [3]

$$S(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\partial \hat{S}(\theta, \rho)}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho - x \cos \theta - y \sin \theta}, \quad (1)$$

где

$$\hat{S}(\theta, \rho) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} dx' dy' S(x', y') \delta(\rho - x' \cos \theta - y' \sin \theta) - \quad (2)$$

— прямое преобразование Радона. Интеграл (1) существует в смысле главного значения. Смысл переменных в формулах (1) и (2) ясен из рис. 1. Выражение для $\partial \hat{S}(\theta, \rho)/\partial \rho$ запишем через производную по направлению

$$\frac{\partial \hat{S}(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} dx' dy' \left[\frac{\partial S(x', y')}{\partial x'} \cos \theta + \frac{\partial S(x', y')}{\partial y'} \sin \theta \right] \delta(\rho - x' \cos \theta - y' \sin \theta). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), воспользовавшись свойством δ -функции и производя интегрирование по угловой переменной θ , получим

$$S(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} dx dy \frac{1}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \{ (x-x')\mu(x', y') + (y-y')\nu(x', y') \}. \quad (4)$$

Функции $\nu(\rho)$, $\mu(\rho)$ являются финитными, то есть

$$\text{supp } \nu(\rho) = \text{supp } \mu(\rho) \subset |\rho| \leq R, \quad \rho = \{x, y\}, \quad (5)$$

где R — радиус апертуры, $\text{supp } f$ — носитель функции f .

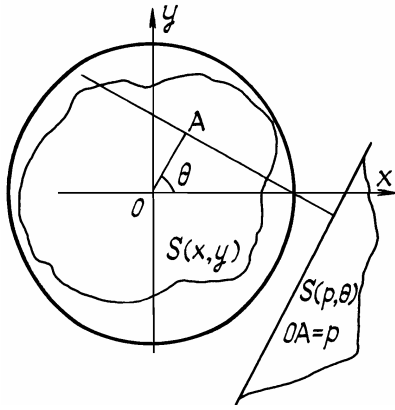


Рис. 1

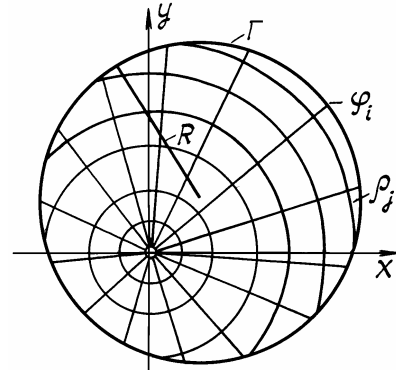


Рис. 2. Схема пересчета координат и пределов интегрирования при восстановлении фазы по формуле (6)

Формула (4) выражает фазу через ее частные производные. Учитывая (5), ее можно переписать и в полярных координатах

$$S(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R d\rho' [\cos \varphi' \mu (x - \rho' \cos \varphi', y - \rho' \sin \varphi') + \sin \varphi' \nu (x - \rho' \cos \varphi', y - \rho' \sin \varphi')] \theta (R^2 - |\rho - \rho'|^2), \quad (6)$$

где $\theta(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$ — характеристическая функция Хевисайда.

Представляет интерес разложение фазы волнового фронта по полиномам Цернике [1]

$$S(x, y) = \sum_{k=1} a_k \Psi_k(x, y), \quad (7)$$

где Ψ_k — моды Цернике, описывающие классические aberrации оптических систем. Моды Цернике ортогональны в круге радиуса R . Aberrационные коэффициенты a_k характеризуют диапазон изменения функции $S(x, y)$. Используя интегральное представление (4), связывающее фазу с ее градиентом, можно установить интегральное соотношение, позволяющее определить коэффициенты a_k через компоненты градиента $\nabla S(x, y)$.

Определим компоненты вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$;

$$a_k = \langle S, \Psi_k \rangle \|\Psi_k\|^{-1}, \quad (8)$$

где $\|\Psi_k\| = \sqrt{\langle \Psi_k, \Psi_k \rangle} = \sqrt{\iint \Psi_k^2(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi}$ — норма, $\langle f, g \rangle$ — скалярное произведение

Подставим (4) в (8) и после двукратного интегрирования по угловой, радиальной переменным получим выражения компонент вектора \mathbf{a} через градиент функции $S(\rho, \varphi)$:

для компонент вектора \mathbf{a} , отражающих вклад мод, инвариантных «относительно вращения»

$$a_n^0 = \sqrt{\frac{n+1}{\pi^3}} \{ \langle \mu, \operatorname{Re} P_0 \rangle + \langle \nu, \operatorname{Im} P_0 \rangle \}, \quad (9)$$

для компонент вектора \mathbf{a} , отражающих вклад четных мод

$$a_n^{\text{ч}} = \sqrt{\frac{n+1}{\pi^3}} \{ \langle \mu, \operatorname{Re} P_1 \rangle + \langle \nu, \operatorname{Re} P_2 \rangle \}, \quad (10)$$

для компонент вектора \mathbf{a} , отражающих вклад нечетных мод

$$a_n^{\text{нч}} = \sqrt{\frac{n+1}{\pi^3}} \{ \langle \mu, \operatorname{Im} P_1 \rangle + \langle \nu, \operatorname{Im} P_2 \rangle \}. \quad (11)$$

Здесь

$$P_1 = e^{j(m+1)\varphi} \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{A(m, n, s) \rho^{n-2s-1}}{n-2s+m+2} + e^{j(m-1)\varphi} \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{A(m, n, s) (\rho^{n-2s+1} - \rho^{m-1})}{n-2s-m+2}, \quad (12)$$

$$P_2 = e^{-j(m+1)\varphi} \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{A(m, n, s) \rho^{n-2s+1}}{n-2s-m+2} + e^{-j(m-1)\varphi} \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{A(m, n, s) (\rho^{n-2s+1} - \rho^{m-1})}{n-2s-m+2}, \quad (13)$$

$$P_0 = e^{j\varphi} \sum_{s=0}^{n/2} \frac{A(0, n, s) \rho^{n-2s+1}}{n+2s+2}, \quad (14)$$

$$A(m, n, s) = \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[\frac{n-m}{2} - s \right]! \left[\frac{n+m}{2} - s \right]! (n-2s-m+2)}, \quad (15)$$

$m < n$, $n - |m|$ – четное. Так, три первых коэффициента Цернике восстанавливаются через градиент распределения фазы посредством интегральных соотношений:

$$a_1 = -\frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} [(x^2 + \rho^2/2 + R^2)u + xyv] dx dy, \quad (16)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} [xyu + (y^2 + \rho^2/2 + R^2)v] dx dy \quad - \text{наклоны фазового фронта по осям } x \text{ и } y;$$

$$a_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\rho^2 - 1)(xu + yv) dx dy \quad - \text{дефокусировка фазового фронта. Пределы интегрирования, по}$$

$x \in [-R, R]$, по $y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]$. Коэффициенты a_k могут быть использованы для выработки сигналов оптимального управления адаптивной оптической системой с конечным числом степеней свободы [2, 3], так как задача расчета a_k тождественна (в смысле минимизации среднеквадратического отклонения) задаче об оптимизации приближения произвольной функции полиномами Цернике.

На основе интегрального представления (4) разработан алгоритм, позволяющий восстанавливать фазовый фронт и определять коэффициенты разложения (7) через градиент фазы ∇S .

При восстановлении фазы через ее градиент интегралы вычислялись квадратурой Симпсона в полярной системе координат. Для достижения хорошей точности интеграл разбивался на сумму двух интегралов

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2R} d\rho f(\rho, \varphi) \theta(\rho, \varphi) = \int_0^{\rho_{\min}} d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) d\varphi + \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} f(\rho, \varphi) d\varphi$$

где

$$\varphi_{\max} = \varphi + \arccos \frac{\rho^2 + \rho'^2 - R^2}{2\rho\rho'}, \quad \varphi_{\min} = \varphi - \arccos \frac{\rho^2 + \rho'^2 - R^2}{2\rho\rho'},$$

$\rho_{\max} = R + \rho$ – наибольшее удаление точки наблюдения от края апертуры, $\rho_{\min} = R - \rho$ – наименьшее удаление точки наблюдения от края апертуры, (φ, ρ) – координаты центра апертуры в системе координат, с центром в точке наблюдения.

Пределы интегрирования определялись пересечением координатной сетки (θ_i, ρ_j) с границей Γ носителя функции $\theta(R^2 - |\rho - \rho'|^2)$ (см. рис. 2). Очевидно, что если точка, в которой определяется фаза, находится в центре апертуры, пределы интегрирования наиболее простые: $\rho' \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. При удалении точки от центра апертуры пределы интегрирования задавались как (см. рис. 2) $\varphi \in [0, 2\pi]$ при $\rho \in [0, \rho_{\min}]$ и $\varphi \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ при $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$. Дискретизация по углу N_φ и по радиусу N_ρ составляла соответственно 60 и 30.

В качестве проверки полученных формул и моделирования процесса восстановления была взята функция $S_1(x, y)$, состоящая из суммы первых десяти полиномов Цернике. Эти полиномы приведены в таблице.

k	a_k		Полиномы Цернике Ψ_k
	точные	вычисленные	
1	5	5,006	$2x$
2	5	5,006	$2y$
3	1,2	1,201	$\sqrt{3} [2(x^2+y^2)-1]$
4	6	6,008	$2\sqrt{6} xy$
5	6	6,008	$2\sqrt{6} (x^2-y^2)$
6	0,8	0,80002	$2\sqrt{2} y[3(x^2+y^2)-2]$
7	0,96	0,96055	$2\sqrt{2} x[3(x^2+y^2)-2]$
8	0,95	0,95003	$2\sqrt{2} y(3x^2-y^2)$
9	-1,5	-1,502	$2\sqrt{2} x(x^2-3y^2)$
10	-1,71	-1,711	$6\sqrt{5} [(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)+1/6]$

Вид самой функции показан на рис. 3. После определения градиента функции $\nabla S_1(x, y)$ по формуле (5) была восстановлена фаза $S_2(x, y)$, а по формулам (9)–(11) определены коэффициенты Цернике. Значения восстановленных коэффициентов a также приводятся в таблице. С их помощью реконструирована функция $S_3(x, y)$

$$S_3(x, y) = \sum_{k=1}^N a_k \Psi_k.$$

Результаты реконструкции исходной $S_1(x, y)$ и восстановленных $S_2(x, y)$ и $S_3(x, y)$ функций изображены на рис. 3. Погрешность вычисления a_k по квадратурной формуле Гаусса не превышает 10%.

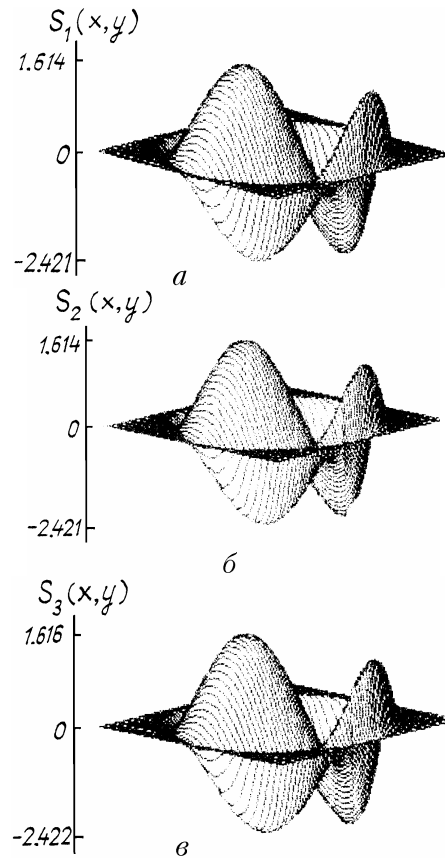


Рис. 3. Распределения фазы в пределах апертуры: a – исходное распределение $S_1(x, y)$; $б$ – распределение $S_2(x, y)$, восстановленное по формуле (6); $в$ – распределение $S_3(x, y)$, реконструированное по вычисленным коэффициентам Цернике

Таким образом, проведенный численный эксперимент показал эффективность предлагаемого подхода к определению фазы и соответствующих коэффициентов в ее разложении по полиномам Цернике. На наш взгляд, представляет интерес исследовать точность и разрешающую способность предлагаемого подхода при фиксации наклонов фазового фронта в реальных измерительных системах. При этом предполагается учесть усреднение наклонов в пределах субапертуры, конфигурацию и размещение субапертур. Рассмотрение планируется провести на основе расчета параметра Штреля и построения функции рассеяния точки (ФРТ) для системы «измеритель – алгоритм».

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 336 с.
2. Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И. Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1988. 272 с.
3. Витриченко Э.А., Лукин В.П., Пушной Л.А., Тартаковский В.А. Проблемы оптического контроля. Новосибирск: Наука, '1990. 351 с.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
2 октября 1991 г.

V. P. Aksenov, Yu. N. Isaev. Radon Transform in the Problem of Phase Optic Control.

Application of Radon transform, which is the basic 'transform of computing tomography, for reconstruction of wavefield phase distribution and Zernike coefficients of its polynomial expansion from the measurements of wavefront -slope in the Hartman sensor is discussed in the paper. Algorithm allowing to reconstruct the wavefront and to determine its mode components amplitudes were working out for the case of arbitrary sizes and subapertures locations. Accuracy of reconstruction is estimated in the numerical experiment.