

ОПТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И БАЗЫ ДАННЫХ ОПТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ  
ОБ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

УДК 551.51+519.6

М.С. Юдин

**Перенос аэрозолей над сложной орографией в малых масштабах:  
полулагранжев метод и метод случайных блужданий**

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск*

Поступила в редакцию 9.11.2000 г.

Для математического моделирования распространения аэрозолей в условиях сложной орографии применяется мезомасштабная метеорологическая модель. Перенос аэрозолей осуществляется на фоне рассчитанных этой моделью метеорологических полей. Обсуждаются два подхода: полулагранжев метод расчета адвекции аэрозоля, а также простая модель случайных блужданий частиц. Приведен пример расчета переноса аэрозоля над крутым холмом, где температурное поле вычисляется по первому методу, а перенос аэрозоля – по второму. Имеется качественное согласие между существующей теорией и полученной картиной оседания аэрозоля.

**Введение**

Существует большое число практических и теоретических задач, касающихся переноса атмосферных аэрозолей над областью со сложной нерегулярной структурой, например, таких как распространение примесей в условиях городских застроек, моделирование микроклимата и т.д. Существующая сеть измерений обычно очень редка, и полученные таким образом данные не всегда представительны для местности со сложной структурой.

В этой связи полезным инструментом для получения недостающей информации являются математические модели атмосферных процессов [1]. Полученные по этим моделям метеорологические поля служат фоном для расчета адвекции и диффузии аэрозольных частиц.

В отличие от многих обычных методов расчета распределений метеорологических элементов в пространстве и времени в настоящей работе обсуждаются два метода, в которых внимание уделяется поведению отдельных частиц аэрозолей. Одним из существующих подходов для расчета крупномасштабной адвекции является так называемый полулагранжев метод [2, 3]. Этот метод позволяет минимизировать вычислительные ошибки и в этом смысле обладает преимуществом перед традиционным эйлеровым подходом. В разд. 1 приводится вариант этого метода для случая интерполяционных схем высокого порядка аппроксимации. В дальнейшем этот метод используется при расчете температурного поля в математической модели динамики атмосферы, кратко описанной в разд. 3.

Другим популярным методом расчета движения частиц является метод случайных блужданий, или метод лагранжевой диффузии [4]. Модели случайных блужданий частиц свободны от проблем вычислительных ошибок и устойчивости алгоритмов и обладают также рядом технических преимуществ. В разд. 2 приводится схема простой модели лагранжевой диффузии, которая в разд. 4 используется для моделирования распространения пассивного аэрозоля над крутым холмом. Уравнения модели для метеорологического фона приведены в разд. 3.

**1. Полулагранжева адвекция аэрозоля**

Рассматриваемый здесь метод расчета адвекции при переносе аэрозольных частиц состоит из двух этапов.

1. Определение точек вылета частиц, т.е. таких точек, откуда доставляется информация о распределении аэрозоля на следующий шаг по времени,

2. Интерполяция значений  $f$  из ближайших узлов пространственной сетки на точки вылета частиц:

$$x_D = x - \int v dt ; f(x, t + \Delta t) = f(x_D, t),$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени;  $x_D$  – точка вылета. Порядок интерполяции определяет точность метода. В настоящей статье будет использована схема третьего порядка по причинам, которые обсуждаются ниже. Эта схема строится следующим образом. Произвольная функция  $f$  в узле разностной сетки раскладывается в ряд с точностью до членов 4-го порядка. Свободные коэффициенты этого разложения определяются через значения функции в ближайших узлах сетки. Обозначим  $\lambda = (x_D - x_j)/\Delta x$ . Здесь  $\Delta x$  – шаг по пространству. Решив полученную систему линейных уравнений, окончательно получаем

$$f(t + \Delta t) = f_i (1 - \lambda/2 - \lambda^2 + \lambda^3/2) + f_{i+1} (\lambda + \lambda^2/2 - \lambda^3/2) + f_{i+2} (-\lambda/6 + \lambda^3/6) + f_{i-1} (-\lambda/3 + \lambda^2/2 - \lambda^3/6).$$

Эксперименты со схемами различного порядка позволили сделать следующие выводы.

1. Схемы первого порядка имеют большую численную диффузию.
2. Схемы второго порядка являются немонотонными, обладают мелкомасштабной волнообразной структурой.
3. В рассматриваемых схемах 3-го порядка оба типа ошибок существенно подавляются.
4. Схемы более высокого порядка приводят к незначительному улучшению качества решения при существенном увеличении вычислительной работы.

## 2. Модель случайных блужданий

Простая модель лагранжевой диффузии [4] была выбрана для проведения расчетов по переносу и диффузии аэрозолей. Эта модель привлекательна своей математической простотой и гибкостью.

В момент времени  $t + \Delta t$  индивидуальные частицы аэрозоля имеют координаты:

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + U_i(t) \Delta t, \quad i = 1, 2,$$

$$x_3(t + \Delta t) = x_3(t) + (U_3(t) - V_{\text{сед}}) \Delta t,$$

где  $x_i$  – координата  $i$ -й частицы;  $U_i$  – полная скорость частицы;  $V_{\text{сед}}$  – скорость седиментации.

Скорость частицы  $U_i$  разбивается на две части: среднюю скорость  $u_i$ , которая получается из расчета метеорологической модели (см. следующий раздел), и турбулентную компоненту  $u'_i$ . Эта компонента рассчитывается следующим образом:

$$u'_i(t + \Delta t) = R_{L_i}(\Delta t) u'_i(t) + (1 - R_{L_i}(\Delta t))^2 \sigma_{u_i} \Psi;$$

$$R_{L_i}(\Delta t) = \exp(-\Delta t/T_{L_i}).$$

Здесь  $\Psi$  – генератор случайных чисел для гауссова распределения;  $T_{L_i}$ ,  $R_{L_i}$  – лагранжевы временные шкалы и автокорреляции;

$$\sigma_{u_i} = (2m_1 E)^{1/2}, \sigma_{v_i} = (2m_2 E)^{1/2}, \sigma_{w_i} = (2m_3 E)^{1/2}.$$

Для трех видов стратификации:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \leq -0,5 \text{ K/100 м}, \left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| < 0,5 \text{ K/100 м},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \geq 0,5 \text{ K/100 м},$$

мы используем следующие наборы коэффициентов:

$$m_1 = 0,4; 0,54; 0,54, m_2 = 0,30; 0,30; 0,37,$$

$$m_3 = 0,30; 0,16; 0,09;$$

$$T_{L_i} = K / \sigma_{u_i}^2.$$

В отличие от [4] у нас нет специального уравнения для расчета кинетической энергии турбулентности, поэтому получаем ее из соотношения

$$K = l \sqrt{cE},$$

где  $c$  – эмпирическая константа,  $c = 0,2$  [4].

Коэффициент диффузии  $K$  рассчитывается с помощью модели термодинамики атмосферы.

## 3. Модель атмосферного фона

Для расчета метеорологических полей используем следующие уравнения атмосферной динамики:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial(G^{13}P)}{\partial \eta} = f_1(V - V_g) - f_2 W + R_u,$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial(G^{23}P)}{\partial \eta} = -f_1(U - U_g) + R_v,$$

$$\frac{dW}{dt} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{gP}{C_s^2} = f_2 U + g \frac{G^{1/2} \bar{\rho} \theta'}{\theta} + R_w;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = R_\theta; \quad \frac{dS}{dt} = R_s;$$

$$\frac{1}{C_s^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( G^{13} U + G^{33} V + \frac{1}{G^{1/2}} W \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{G^{1/2} \bar{\rho} \theta'}{\theta} \right);$$

$$U = \bar{\rho} G^{1/2} u; \quad V = \bar{\rho} G^{1/2} v; \quad P = \bar{\rho} G^{1/2} p',$$

где  $p'$ ,  $\theta'$  – отклонения от основного состояния давления  $\bar{p}$  и потенциальной температуры  $\bar{\theta}$ ;  $s$  – удельная влажность;  $C_s$  – скорость звуковой волны;  $u_g$ ,  $v_g$  – компоненты геострофического ветра, представляющие синоптическую часть давления;  $f_1$ ,  $f_2$  – параметры Кориолиса;  $g$  – гравитационная постоянная;  $G$  – символы Кристоффеля.

Для произвольной функции  $\phi$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u \phi}{\partial x} + \frac{\partial v \phi}{\partial y} + \frac{\partial w \phi}{\partial z}.$$

Члены  $R_u$ ,  $R_v$ ,  $R_w$ ,  $R_\theta$ ,  $R_s$  описывают процессы подсеточного масштаба в терминах  $K$ -теории. Коэффициенты турбулентного обмена вычисляются по следующим формулам:

$$K_m = \begin{cases} l^2 [(\mathbf{D}^2) (1 - \text{Ri}) / 2]^{1/2} & \text{при Ri} < 0 \\ 0 & \text{при Ri} \geq 0 \end{cases}$$

Здесь  $\mathbf{D} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla$ .

Путь смешения  $l$  в каждой точке сетки берется как ближайшее расстояние от препятствий по всем направлениям. Локальное число Ричардсона  $\text{Ri}$  используется в виде

$$\text{Ri} = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta / \partial \eta}{\mathbf{D}^2 / 2}.$$

Более подробное изложение этой модели можно найти, например, в [5, 6].

## 4. Распространение аэрозоля над холмом

В этом разделе приведем результаты по переносу аэрозоля над крутым холмом. В данном случае используем полулагранжев метод для расчета температурного поля в модели динамики атмосферы из разд. 3.

Перенос аэрозоля осуществляется методом случайных блужданий из разд. 2.

Холм высотой 500 м расположен в центре области  $10 \times 10$  км. Высота области 5 км. Геострофический поток распространяется с запада,  $u_g = 5$  м/с,  $v_g = 0$ .

В качестве основного состояния берется стандартная атмосферная стратификация 3,5 К/км.

Абсорбирующий слой расположен на высоте 1500 м. Расчетная сетка состоит из  $31 \times 31 \times 16$  точек, с горизонтальным размером сетки  $\Delta x = \Delta y = 333$  м, вертикальный размер сетки растет с высотой. Размер холма увеличивается с нуля постепенно в течение первых 15 мин вычислений. Источник аэрозоля из 5000 частиц находится к востоку от холма, скорость оседания частиц равна 2 см/с.

Рис. 1 и 2 показывают последовательное движение аэрозоля над холмом. Здесь приведены восточно-западные вертикальные сечения через середину холма.

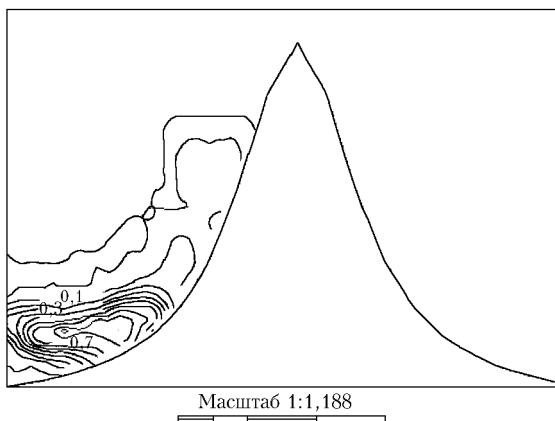


Рис. 1

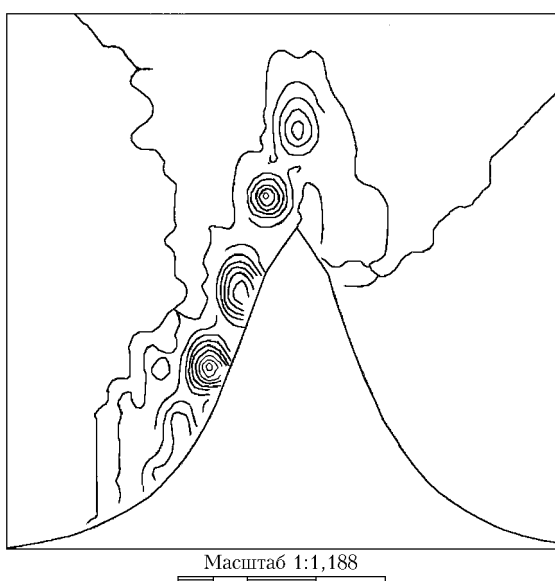


Рис. 2

Рис. 3 показывает концентрацию аэрозоля на поверхности через 20 мин физического времени (вид сверху). Аэрозольный поток заметно смещен в северо-восточном направлении, несмотря на то что исходные параметры задачи обладают симметрией относительно восточно-западного направления. Такая картина распространения

находится в согласии с существующими теоретическими представлениями, поскольку в данной ситуации метеорологические поля смещаются за счет сил Кориолиса [7].

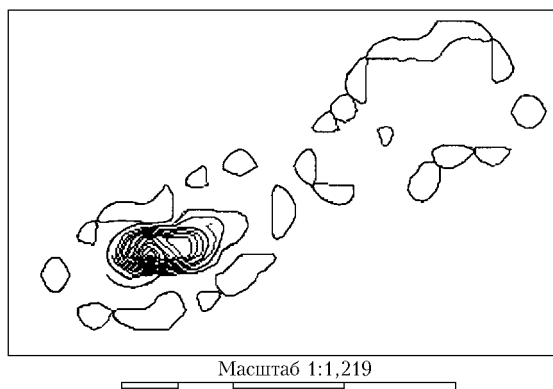


Рис. 3

Результаты этих и подобных тестовых расчетов позволяют сделать вывод о том, что сочетание полулагранжева метода с методом лагранжевой диффузии может быть использовано для численного моделирования распространения аэрозолей над сложной местностью.

В заключение автор выражает благодарность магистранту НГУ Михаилу Пынзарю, который принял участие в программировании и проведении расчетов по модели лагранжевой диффузии из разд. 2.

Работа была доложена на VI Рабочей группе «Аэрозоли Сибири» в Томске в ноябре 1999 г. и выполнена при поддержке грантов РФФИ № 98-05-65318, 99-07-90422 и интеграционного гранта СО РАН-2000 № 64.

1. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
2. Ritchie T. // Mon. Wea. Rev. 1987. V.115. P. 135–146.
3. Крупчатников В.Н., Фоменко А.А. Полулагранжева полуневная схема ECSib. Новосибирск, 1997. 21 с. (Препринт ИВМ и МГ, № 1105).
4. Gross G., Vogel H., and Wippermann F. // Atmos. Environ. 1987. V. 21. P. 483–490.
5. Yudin M.S. // Bull. Nov. Comp. Center. Num. Model // Atmosph. 1995. V. 2. P. 101–107.
6. Юдин М.С., Вильдероттер К. // Оптика атмосферы и океана. 1998. Т. 11. № 10. С. 11–14.
7. Госсард Э.Э., Хуж В.Х. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.

*M.S. Yudin. Aerosol transport over complex terrain on small scales: semi-Lagrange and random walk methods.*

A mesoscale meteorological model is used to model mathematically aerosol transport in conditions of complex terrain. The aerosol transport is performed with the use of the meteorological fields calculated by the model. Two approaches are discussed: the semi-Lagrange method for aerosol advection and the simple random walk model. The test calculation is carried out for aerosol transport over a steep hill. Here, the temperature field is calculated by the first method and the aerosol transport is performed by the second method. A qualitative agreement between the existing theory and the obtained pattern for aerosol sedimentation is achieved.