

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

УДК 528.8.044.6+535.2+551.501.7

# Влияние фоновой турбулентности в лидарных исследованиях турбулентности ясного неба

В.В. Воробьев, А.Г. Виноградов\*

*Институт физики атмосферы РАН  
119017, г. Москва, Пыжевский пер., 3*

Поступила в редакцию 11.04.2013 г.

Оценивается влияние атмосферной турбулентности на флуктуации мощности рассеянного назад лазерного излучения на приемной апертуре лидара. Оценки выполнены в приближении метода плавных возмущений для расходящихся лазерных пучков с гауссовым распределением интенсивности. Предложены простые аналитические формулы для оценок дисперсии флуктуаций принимаемой мощности. Оценки показали, что на трассах протяженностью около 10 км и радиусами в зондируемой области около 1 м среднеквадратические значения относительных флуктуаций мощности могут быть сравнимы с величиной относительного изменения принимаемой мощности при переходе от зондирования областей атмосферы с фоновой турбулентностью к зондированию сильно турбулизированных областей (турбулентности ясного неба).

*Ключевые слова:* лидары, флуктуации лазерного излучения, турбулентность ясного неба; lidars, fluctuations of backscattered laser radiation, clear air turbulence.

### Введение

В настоящее время разрабатываются самолетные бортовые лидары высокого спектрального разрешения, предназначенные для дистанционного обнаружения турбулентности ясного неба (ТЯН) — областей интенсивной турбулентности, опасных для полета самолетов [1]. Крупномасштабные флуктуации скорости и связанные с ними флуктуации температуры и плотности воздуха в этих областях могут в десятки и более раз превышать соответствующие флуктуации на трассе распространения лазерного пучка от источника до исследуемой области. Турбулентность на этом участке трассы будем называть фоновой. Фоновая турбулентность является одним из источников помех в наблюдениях ТЯН. Она приводит, во-первых, к искажениям интенсивности лазерного излучения, падающего на отдельные рассеиватели, — молекулы воздуха и частицы аэрозоля, находящиеся в исследуемой области ТЯН. Во-вторых, излучение, рассеянное из этой области назад, к приемнику, также подвергается воздействию фоновой турбулентности, которая вызывает случайные искажения интенсивности рассеянного излучения. При наличии совокупности рассеивающих

частиц относительные флуктуации светового потока, формируемого ими на приемнике, существенно уменьшаются по сравнению с относительными флуктуациями светового потока при рассеянии отдельной частицей. Тем не менее, как показано в представляемой работе, величина этих флуктуаций может быть сравнима с величиной вариаций мощности, обусловленных вариациями коэффициента обратного рассеяния в областях ТЯН.

### 1. Уравнения

Наши оценки основываются на разработанной в 70-х гг. XX в. теории флуктуаций в лазерных пучках, изложенной, в частности, в монографиях [2–4] и применительно к задаче обратного рассеяния в турбулентной среде в [5–7].

Пусть  $I(x, \mathbf{r})$  — распределение интенсивности света в рассеивающем объеме;  $L$  — расстояние от центра приемника до центра рассеивающей области;  $\alpha_{ex}(x)$  — распределение коэффициента экстинкции по трассе;  $\tau(L) = \int_0^L \alpha_{ex}(x) dx$  — оптическая толщина;  $\alpha_{bs}(x, \mathbf{r})$  — коэффициент обратного рассеяния единицей объема. Тогда мощность рассеянного света на приемнике определяется формулой [4]:

\* Валерий Васильевич Воробьев (v\_v\_vorobiev@mail.ru); Александр Георгиевич Виноградов (a.vino@mail.ru).

$$P_r = \frac{1}{4\pi L^2} \exp[-2\tau(L)] \int d^2\rho \int d^2r \times \int_{L-\Delta L/2}^{L+\Delta L/2} \alpha_{bs}(x, \mathbf{r}) I(x, \mathbf{r}) T_2(x, \mathbf{r}, \rho) dx. \quad (1)$$

Интегрирование по координатам  $\rho$  в формуле (1) и далее проводится по апертуре приемника, по координатам  $r$  – в бесконечных пределах. Величина  $\Delta L$  – протяженность рассеивающего объема.

Формула (1) отличается от аналогичной формулы приближения некогерентного однократного рассеяния [4] наличием множителя  $T_2(x, \mathbf{r}, \rho)$ , учитывающего влияние турбулентности на распространение излучения из точки с координатами  $(x, \mathbf{r})$  в точку приема с координатами  $(0, \rho)$ . Этот множитель поясняется ниже. Отметим, что в определении принимаемой мощности (1) не учитывается спекл-структура интенсивности рассеянного излучения, формируемая ансамблем рассеивателей без участия турбулентности. Спекл-структура может проявиться в реальном эксперименте, если радиус приемной апертуры  $R$  сравним с масштабом  $r_s$  спеклов на приемнике  $r_s \sim L/k_0 a(L)$ , где  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина световой волны;  $a(L)$  – радиус пучка в плоскости  $x = L$ .

Пренебрегая флуктуациями  $\alpha_{bs}$  в объеме  $(L - \Delta L/2 \leq x \leq L + \Delta L/2, |r| \lesssim a(L))$  и предполагая, что на протяжении  $\Delta L$  интенсивность падающего на рассеивающий объем излучения меняется незначительно, можно записать

$$P_r = \frac{\Delta L \alpha_{bs}}{4\pi L^2} \exp[-2\tau(L)] \times \int d^2\rho \int I(L, \mathbf{r}) T_2(L, \mathbf{r}, \rho) d^2r. \quad (2)$$

Распределение интенсивности падающего на плоскость  $x = L$  излучения зададим в виде  $I(L, \mathbf{r}) = I_0(L, \mathbf{r}) T_1(L, \mathbf{r})$ , где  $I_0(L, \mathbf{r})$  – интенсивность в пучке, которая формировалась бы в точке  $(L, \mathbf{r})$  в отсутствие турбулентности на трассе распространения;  $T_1(L, \mathbf{r})$  – фактор, учитывающий влияние фоновой турбулентности на распределение интенсивности при прохождении лазерного пучка от источника до рассеивающего объема. Тогда

$$P_r = \frac{\Delta L \alpha_{bs}}{4\pi L^2} \exp[-2\tau(L)] \times \int d^2\rho \int I_0(L, \mathbf{r}) T_1(L, \mathbf{r}) T_2(L, \mathbf{r}, \rho) d^2r. \quad (3)$$

Дальнейшие вычисления проведем в приближении метода плавных возмущений [2], т.е. будем полагать, что

$$T_1(L, \mathbf{r}) = \exp[2\chi_b(L, \mathbf{r})], \quad T_2(L, \mathbf{r}, \rho) = \exp[2\chi_{sf}(L, \mathbf{r}, \rho)], \quad \langle \chi_b^2 \rangle - \langle \chi_{sf} \rangle^2 \gtrsim 1. \quad (4)$$

Здесь  $\chi_b(L, \mathbf{r})$  – флуктуации уровня в лазерном пучке в плоскости  $(x = L)$ ;  $\chi_{sf}(L, \mathbf{r}, \rho)$  – флуктуации уровней сферических волн при распространении из точек  $(x = L, \mathbf{r})$  в точки  $(x = 0, \rho)$ . Дисперсия флуктуаций уровня в сферической волне  $\sigma_{sf}^2 = \langle (\chi - \langle \chi \rangle)^2 \rangle$  определяется формулой [2, 3]:

$$\sigma_{sf}^2(L) = \pi k_0^2 L \int_0^1 d\xi \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{\kappa}_{\perp}, 0) \left[ 1 - \cos \left[ \frac{\kappa_{\perp}^2 L}{k_0} \xi (1 - \xi) \right] \right] d^2\mathbf{\kappa}_{\perp}, \quad (5)$$

где  $\Phi_n(\mathbf{\kappa}_{\perp}, \kappa_x)$  – трехмерный спектр флуктуаций показателя преломления;  $\mathbf{\kappa}_{\perp}(\kappa_y, \kappa_z)$  – поперечная составляющая вектора  $\mathbf{\kappa}(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$ .

Зависимость  $\sigma_{sf}^2(L)$  для случая, когда спектр  $\Phi_n(\mathbf{\kappa})$  задан в виде

$$\Phi_n(\mathbf{\kappa}) = 0,033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2 l_0^2), \quad (6)$$

где  $l_0 = \Lambda_0/5,92$ ,  $\Lambda_0$  – внутренний масштаб турбулентности [2], представлена на рис. 1.

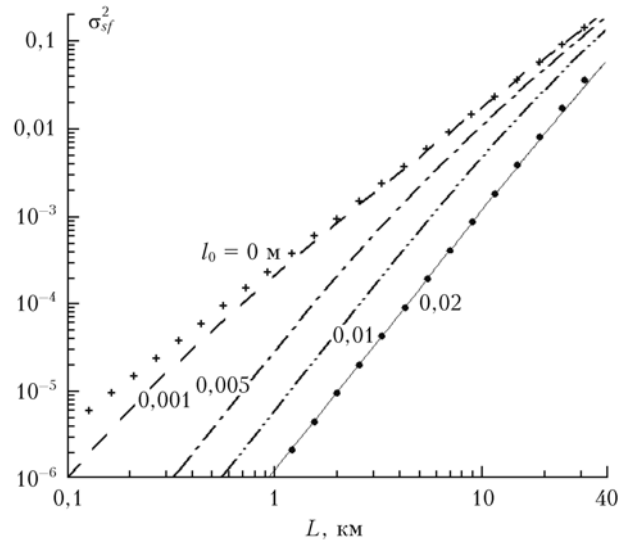


Рис. 1. Зависимости  $\sigma_{sf}^2(L, l_0)$ . У кривых указаны соответствующие им значения параметра  $l_0$  (м). Линиями показаны зависимости, рассчитанные по (5), крестиками – данные расчетов по асимптотике (7а), кружочками – по асимптотике (76)

Она рассчитана для значения длины световой волны  $\lambda = 0,355 \cdot 10^{-6}$  м, значения параметра  $C_n^2$  на высоте 8 км, равного  $C_n^2 = 2,5 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2/3}$ , и нескольких значений масштаба  $l_0$ .

Дифракционная и геометрооптическая асимптотики зависимости  $\sigma_{sf}^2(L)$  имеют вид [2, 3]:

$$\sigma_{sf}^2(L) = 0,124 C_n^2 k_0^{7/6} L^{11/6} \text{ при } L \gg k_0 l_0^2, \quad (7a)$$

$$\sigma_{sf}^2(L) = 5,05 \cdot 10^{-3} C_n^2 l_0^{-7/3} L^3 \text{ при } L \ll k_0 l_0^2. \quad (76)$$

Рис. 1 дает наглядное представление о том, как с ростом масштаба  $l_0$  уменьшаются флуктуации интенсивности. Реальные значения  $l_0$  на высотах 6–10 км, согласно оценкам, которые можно получить, экстраполируя экспериментальные зависимости  $l_0$  от высоты, приведенные, например, в [8], могут даже превышать выбранное нами максимальное значение  $l_0 = 2$  см.

Для расчета флуктуаций мощности по формулам (2)–(4) и вычисления средних по ансамблю реализаций значений  $\langle P_r \rangle$  и  $\langle P_r^2 \rangle$  необходимо вычисление функций корреляций вида  $\langle \chi_b(L, \mathbf{p}) \chi_{sf}(L, \mathbf{r}) \rangle$ . В общем случае это очень сложная и громоздкая задача, поскольку в лазерном пучке флуктуации  $\chi_b(L, \mathbf{p})$  не являются статистически однородными. Она значительно упрощается, если лазерный пучок является расходящимся. При определенных условиях флуктуации  $\chi_b(L, \mathbf{p})$  в расходящихся пучках можно полагать равными флуктуациям  $\chi_{sf}(L, \mathbf{p})$  в сферической волне [3].

Чтобы сформулировать условия применимости модели сферической волны для расчета флуктуаций  $\chi_b(L, \mathbf{p})$  в пучках, параметры которых близки к параметрам, заданным в проекте DELICAT [1], рассмотрим флуктуации в расходящемся гауссовом пучке с начальным распределением поля вида

$$U(\mathbf{p}) = U_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a_0^2} + i\frac{k_0 \rho^2}{2F}\right), \quad (8)$$

где  $a_0$  – начальный радиус пучка;  $F > 0$  – расстояние до мнимого фокуса. Отношение дисперсии относительных флуктуаций интенсивности  $\sigma_b^2(L, r)$  на расстоянии  $r$  от оси лазерного пучка к дисперсии флуктуаций интенсивности в сферической волне  $\sigma_{sf}^2(L)$  определяется соотношением (6.4) монографии [3]. В случае степенного спектра (спектра (6) с  $l_0 = 0$ ) это соотношение можно записать как

$$\frac{\sigma_b^2(L, r)}{\sigma_{sf}^2(L)} = \frac{f(L, r)}{f(L \rightarrow \infty, 0)}, \quad (9)$$

где

$$f(L, r) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \left[ i v(L, \xi)(1-\xi)^{5/6} - v_2(L, \xi)(1-\xi)^{5/6} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; -i\frac{r^2 L}{k_0} \frac{v_2^2(L, \xi)}{v(L, \xi)(1-\xi)}\right) \right] d\xi; \quad (10)$$

$$v(L, \xi) = \frac{1 + (L/F)\xi + i(L/L_d)\xi}{1 + (L/F) + i(L/L_d)},$$

$$v_2(L, \xi) = \operatorname{Re}(v(L, \xi)) = -\frac{L(1-\xi)}{L_d q^2}, \quad L_d = k_0 a_0^2, \quad (11)$$

$q^2 = a^2(L)/a_0^2 = (1 + L/F)^2 + L^2/L_d^2$ ,  $a(L)$  – радиус пучка на расстоянии  $L$  от источника;  ${}_1F_1(\alpha, \gamma; z)$  – вырожденная гипергеометрическая функция; величина  $\sigma_{sf}^2(L)$  определяется формулой (7а);  $r$  – расстояние от центра пучка в его поперечном сечении.

Результаты расчетов зависимости  $\sigma_b^2(L, 0)/\sigma_{sf}^2(L)$  по формулам (9)–(11) представлены на рис. 2.

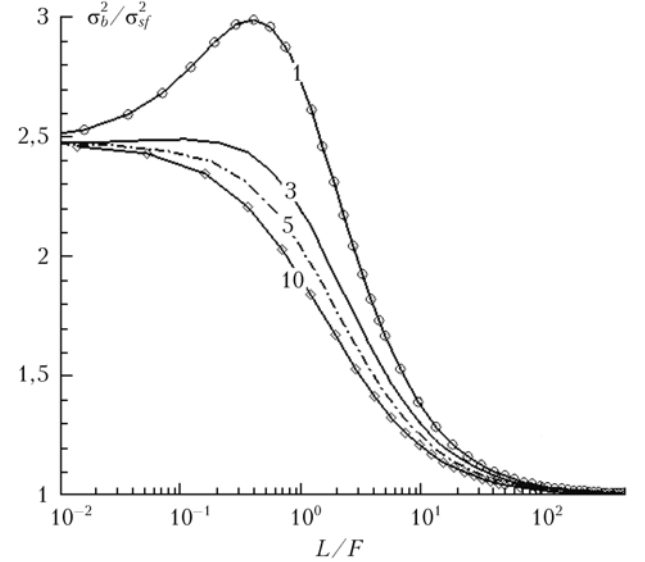


Рис. 2. Зависимости отношения дисперсии флуктуаций интенсивности на оси расходящегося лазерного пучка  $r = 0$   $\sigma_b^2(L, 0)$  к дисперсии флуктуаций интенсивности в сферической волне  $\sigma_{sf}^2(L)$  от отношения  $L/F$ . У кривых указано отношение  $L_d/F$

На малых расстояниях от источника при  $L \ll F$  флуктуации  $\chi$  в пучке такие же, как в плоской волне. Дисперсия  $\sigma_b^2(L, 0)$  при этом приблизительно в 2,5 раза больше, чем в сферической волне. При значениях отношения  $L_d/F > 3$  отношение  $\sigma_b^2(L, 0)/\sigma_{sf}^2(L)$  монотонно уменьшается с увеличением расстояния  $L$ , стремясь к единице при  $L \gg F$ . Отличие этого отношения от единицы, независимо от соотношения между дифракционной длиной  $L_d$  и длиной  $F$ , становится меньше 10% при  $L > 40F$ . Как показали расчеты зависимости величины  $\sigma_b^2(L, r)$  от  $r$  в сечении пучка, она (на расстояниях  $L > 20F$ ) монотонно увеличивается с увеличением  $r$ . При этом относительное изменение величины  $\sigma_b^2(L, r)$  в области  $r \leq 2a(L)$  незначительно. Оно составляет порядка 1%. При небольшой расфокусировке пучка, когда  $L_d/F < 3$ , функция  $\sigma_b^2(L, 0)/\sigma_{sf}^2(L)$  немонотонна, имеет максимум. При значениях  $L_d/F < 1$  положение максимума определяется приближенным соотношением  $L \approx FL_d/(L_d + F)$ . Дисперсия  $\sigma_b^2(L, 0)$  в максимуме больше, чем дисперсия флуктуаций  $\chi$  в плоской волне. Это, как известно, обусловлено тем, что в пучке возникают дополнительные, по сравнению с плоской волной, флуктуации интенсивности из-за случайных блужданий центра тяжести пучка.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что за условие применимости модели сферической волны при расчете флуктуаций в расфокусированном пучке можно принять  $L/F > 40$ . Предполагая это условие выполненным, можно рассчитывать флуктуации уровней  $\chi_b(L, \mathbf{r})$  в формуле (4) равными их значениям в сферической волне  $\chi_b(L, \mathbf{r}) = \chi_{sf}(L, 0, \mathbf{r})$ , и формулу для мощности рассеянного излучения на приемнике записать в виде

$$P_r = \frac{\Delta L \alpha_{bs}}{4\pi L^2} \exp[-2\tau(L)] \int d^2\rho \times \int I_0(L, \mathbf{r}) \exp[2\chi_{sf}(L, 0, \mathbf{r}) + 2\chi_{sf}(L, \mathbf{r}, \rho)] d^2r. \quad (12)$$

В дальнейшем в обозначениях вида  $\chi_{sf}(L, 0, \mathbf{r})$ ,  $\chi_{sf}(L, \mathbf{r}, \rho)$  будем опускать индексы. То есть через  $\chi(L, 0, \mathbf{r})$  и  $\tilde{\chi}(L, 0, \mathbf{r}) = \chi(L, 0, \mathbf{r}) - \langle \chi(L, 0, \mathbf{r}) \rangle$  будем обозначать уровень амплитуды сферической волны, распространяющейся из точки ( $x = 0$ ,  $\rho = 0$ ) в точку ( $x = L$ ,  $\mathbf{r}$ ), через  $\langle \chi(L, 0, \mathbf{r}) \rangle$  – ее среднее (по реализациям) значение, и через  $\tilde{\chi}(L, 0, \mathbf{r})$  – флуктуации этой величины. Аналогично через  $\chi(L, \mathbf{r}, \rho)$ ,  $\langle \chi(L, \mathbf{r}, \rho) \rangle$ ,  $\tilde{\chi}(L, \mathbf{r}, \rho)$ ,  $\tilde{\chi}(L, \mathbf{r}, \rho) = \chi(L, \mathbf{r}, \rho) - \langle \chi(L, \mathbf{r}, \rho) \rangle$  будем обозначать уровень амплитуды, его среднее значение и флуктуации в сферической волне, распространяющейся из точки ( $x = L$ ,  $\mathbf{r}$ ) в точку ( $x = 0$ ,  $\rho$ ). При этом  $\langle \chi(L, 0, \mathbf{r}) \rangle = \langle \chi(L, \mathbf{r}, \rho) \rangle = \langle \chi(L) \rangle$ .

## 2. Средняя мощность и фактор усиления обратного рассеяния

В предположении о нормальности распределения флуктуаций уровней, для средней мощности можно записать

$$\begin{aligned} \langle P_r \rangle = & \frac{\Delta L \alpha_{bs}}{4\pi L^2} \exp[-2\tau(L)] \int d^2\rho \times \\ & \times \int I_0(L, \mathbf{r}) \exp[4\langle \chi(L) \rangle + 2\langle \tilde{\chi}(L, \mathbf{r})^2 \rangle + \\ & + 2\langle \tilde{\chi}(L, \mathbf{r}, \rho)^2 \rangle + 4B_\chi(L, \mathbf{r}, \rho)] d^2r, \quad (13) \end{aligned}$$

где через  $B_\chi(L, 0, \rho)$  обозначена функция корреляции  $\langle \tilde{\chi}(L, 0, \mathbf{r}) \tilde{\chi}(L, \mathbf{r}, \rho) \rangle = \langle \tilde{\chi}(L, 0, 0) \tilde{\chi}(L, 0, \rho) \rangle = B_\chi(L, 0, \rho)$ .

Учитывая, что для сохранения средней интенсивности сферической волны требуется выполнение соотношения  $\langle \chi \rangle = -\langle \tilde{\chi}^2 \rangle$ , из (13) следует

$$\begin{aligned} \langle P_r \rangle = & \frac{\Delta L \alpha_{bs}}{4\pi L^2} \exp[-2\tau(L)] \int d^2\rho \times \\ & \times \int I_0(L, \mathbf{r}) \exp[4B_\chi(L, 0, \rho)] d^2r. \quad (14) \end{aligned}$$

Функция  $B_\chi(L, \mathbf{r}, \rho)$ , согласно [3], задается формулой

$$\begin{aligned} B_\chi(L, \mathbf{r}, \rho) = & \pi^2 k_0^2 L \int_0^1 d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{\kappa}_\perp, 0) \times \\ & \times \left[ 1 - \cos \left[ \frac{\kappa_\perp^2 L}{k_0} \xi (1 - \xi) \right] \right] \times \\ & \times \exp[i\xi \mathbf{\kappa}_\perp \rho + i(1 - \xi) \mathbf{\kappa}_\perp \mathbf{r}] d^2\kappa_\perp. \quad (15) \end{aligned}$$

Функцию  $B_\chi(L, 0, \rho)$  в (14) удобно рассчитывать по ее спектру

$$F_\chi(L, \mathbf{\kappa}) = (2\pi)^{-2} \iint B_\chi(L, 0, \rho) \exp(-i\mathbf{\kappa}\rho) d^2\rho,$$

который, как это следует из (15), имеет вид

$$F_\chi(L, \mathbf{\kappa}) = \pi^2 k_0^2 L \int_0^\infty \Phi_n[\mathbf{\kappa}(1 + \xi), 0] \left[ 1 - \cos \left[ \frac{\kappa^2 L}{k_0} \xi \right] \right] d\xi. \quad (16)$$

После вычисления этого спектра функция  $B_\chi(L, 0, \rho)$  рассчитывается по формуле

$$B_\chi(L, 0, \rho) = 2\pi \int_0^\infty F_\chi(L, \kappa) J_0(\kappa\rho) \kappa d\kappa, \quad (17)$$

где  $J_0(x)$  – функция Бесселя нулевого порядка. Модуль нормированной функции корреляции  $b_\chi(\rho/r_F) = B_\chi(L, 0, \rho/r_F) / \langle \tilde{\chi}^2 \rangle$ , рассчитанной для степенного спектра [спектра (6) с  $l_0 = 0$ ], изображен на рис. 3.

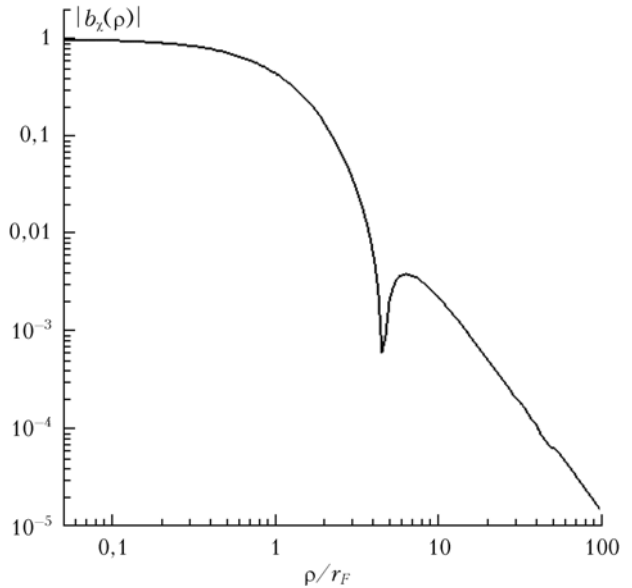


Рис. 3. Модуль функции корреляции флуктуаций уровня в сферической волне. Функция  $b_\chi(x)$  равна нулю в точке  $x = x_0 \approx 4,543$ , она положительна при  $x < x_0$  и отрицательна при  $x > x_0$

Здесь радиус  $\rho$  нормирован на масштаб Френеля  $r_F = \sqrt{L/k_0}$ .

Для гауссова невозмущенного пучка с  $I_0(L, r) = \frac{P_0}{\pi a^2(L)} \exp\left[-\frac{r^2}{a^2(L)}\right]$ , после интегрирования (14) по  $r$ , получим

$$\langle P_r \rangle = P_{r,0}(1 + q),$$

где  $P_{r,0} = \frac{\Delta L \alpha_{bs} P_0 R^2}{4L^2} \exp[-2\tau(L)]$  – мощность на приемной апертуре в отсутствие турбулентности;

$$q(L) = 2 \int_0^1 \left[ \exp[\sigma_I^2(L) b_I(xR/r_F(L))] - 1 \right] x dx. \quad (18)$$

Величина  $1 + q(L)$  является коэффициентом усиления рассеяния из-за влияния турбулентности. Через  $\sigma_I^2(L)$  в (18) обозначена величина  $\sigma_I^2(L) = 4\sigma_{sf}^2(L) = 4\langle \tilde{\chi}^2 \rangle$ .

В случае слабых флуктуаций, когда  $\sigma_I^2(L) \ll 1$ , эта величина является дисперсией относительных флуктуаций интенсивности.

При значениях  $\sigma_I^2$  много меньше единицы из (18) следует формула первого приближения метода возмущений:

$$q_1(L) = 2\sigma_I^2(L) \int_0^1 b_\chi \left[ \frac{xR}{r_F(L)} \right] x dx. \quad (19)$$

На рис. 4 представлены зависимости  $q(L)$  и  $q_1(L)$ , рассчитанные по формулам (18), (19) и (17) для спектра (6) с  $l_0 = 0$  и  $C_n^2 = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^{-2/3}$ , при значении радиуса приемной апертуры  $R = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Значение параметра  $C_n^2$  здесь выбрано таким, чтобы была представлена область умеренных флуктуаций интенсивности, где дисперсия  $\sigma_I^2$  достигает единицы.

Из рис. 4 видно, во-первых, что даже при значениях  $\sigma_I^2 \approx 1$  для расчета средней мощности обратного рассеяния хорошо работает формула метода возмущений (19). Приблизительно функция  $q_1(L)$  равна

$$q_1(L) \approx q_{1,a}(L) = 3,2\sigma_I^2(L) \left[ 1 + R^2/r_F^2(L) \right]^{-7/6}.$$

$$Q = \frac{\int I_0(L, \mathbf{r}_1) I_0(L, \mathbf{r}_2) e^{4B_\chi(L, 0, \rho_1) + 4B_\chi(L, 0, \rho_2)} \left[ e^{4U(L, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho_1, \rho_2)} - 1 \right] d^2\rho_1 d^2\rho_2 d^2r_1 d^2r_2}{\int I_0(L, \mathbf{r}_1) I_0(L, \mathbf{r}_2) e^{4B_\chi(L, 0, \rho_1) + 4B_\chi(L, 0, \rho_2)} d^2\rho_1 d^2\rho_2 d^2r_1 d^2r_2}; \quad (20)$$

$$U(L, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho_1, \rho_2) = B_\chi(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, 0) + B_\chi(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \rho_1) + B_\chi(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \rho_2) + B_\chi(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \rho_1 - \rho_2). \quad (21)$$

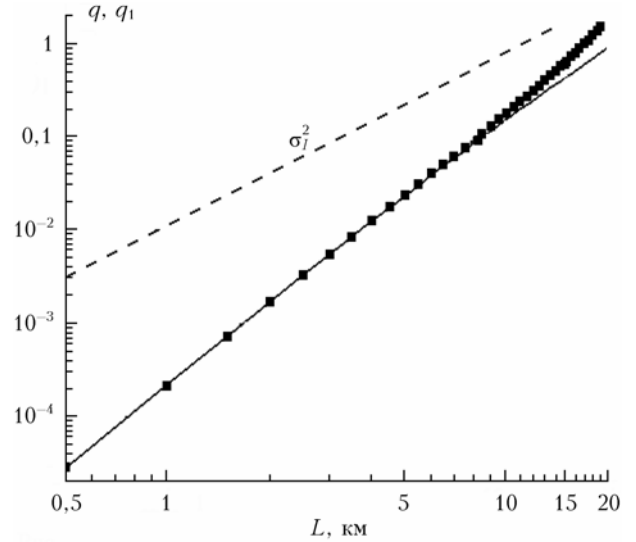


Рис. 4. Функции  $q(L)$  (прямоугольники) и  $q_1(L)$ , рассчитанные по формулам (18), (19), и дисперсия относительных флуктуаций интенсивности  $\sigma_I^2(L)$

Это подгоночная зависимость для аппроксимации численной зависимости. Она не показана на рис. 4, поскольку графически не отличается от функции  $q_1(L)$ . Отметим, что при  $R \gg r_F(L)$  функция  $q_{1,a}(L) \sim R^{-7/6}$  не зависит от волнового числа. Это соответствует известному эффекту – дисперсия флуктуаций на телескопах большой апертуры описывается геометрическими формулами [2]. Во-вторых, видно, что при заданной апертуре приемника эффект усиления обратного рассеяния заметно меньше, чем в случае точечного приемника. Величина  $q(L)$  приблизительно в 10 раз меньше, чем  $\sigma_I^2(L)$  при расстоянии до рассеивающей области 5 км, и в 3 раза при расстоянии 10 км.

### 3. Флуктуации принимаемой мощности

Для среднего квадрата мощности рассеянного излучения на приемной апертуре  $P_r$ , при том же предположении о нормальном законе распределения флуктуаций уровня, можно получить формулу  $\langle P_r^2 \rangle / \langle P_r \rangle^2 = 1 + Q$ , где

### 3.1. Флуктуации мощности на приемной апертуре малого радиуса

Вычислить интегралы (20) в общем случае, по-видимому, нереально. Рассмотрим случай приемника достаточно малых размеров с радиусом  $R$  много меньшим, чем масштаб Френеля  $r_F$ , являющийся и характерным масштабом функций корреляции  $B_\chi(L, 0, \rho)$  и  $B_\chi(L, r, 0)$ . При вычислении (20) при этом условии можно положить  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = 0$ ,  $B_\chi(L, 0, \rho_1) = B_\chi(L, 0, \rho_2) = \langle \tilde{\chi}^2 \rangle$ ,  $U(L, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho_1, \rho_2) = 4B_\chi(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, 0)$ . Для гауссова пучка и круглой апертуры радиуса  $R$  после интегрирования (20) по  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\mathbf{r}_c = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  получим выражение

$$Q(L) = \int_0^\infty \exp \left[ 4\sigma_I^2(L) b_\chi \left( t \frac{a(L)}{r_F(L)} \right) \right] - 1 \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right) t dt. \quad (22)$$

Приближение этой формулы, соответствующее разложению экспоненты в ряд по параметру  $\sigma_I^2(L)$  с точностью до члена порядка  $\sigma_I^4(L)$ , имеет вид

$$Q_1(L) = 4\sigma_I^2(L) \int_0^\infty \left[ b_\chi \left( t \frac{a(L)}{r_F(L)} \right) \right] \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right) t dt. \quad (23)$$

На рис. 5 приведены зависимости  $Q(L)$  и  $Q_1(L)$ , рассчитанные по формулам (22), (23) при значениях параметров  $C_n^2 = 2,5 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2/3}$ .

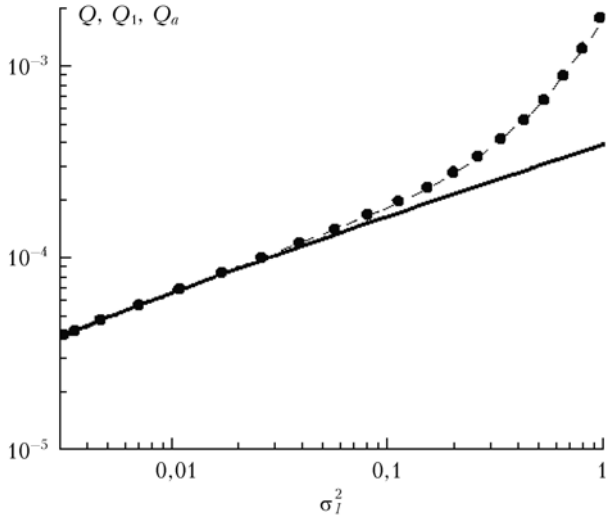


Рис. 5. Дисперсии относительных флуктуаций мощности на приемнике с  $R \ll r_F$  как функции от дисперсии относительных флуктуаций интенсивности сферической волны  $\sigma_I^2(L)$ . Кружочки – функция  $Q(L)$ , рассчитанная по формулам (22), сплошная линия – функция  $Q_1(L)$  (23), штриховая – аппроксимация (24) зависимости  $Q(L)$

Видно, что приближение (23) применимо для оценок флуктуаций при условии  $\sigma_I^2 \leq 0,1$ , т.е. при существенно больших ограничениях, чем применимость формулы метода возмущений для расчета средней интенсивности. При  $\sigma_I^2 \leq 1$  хорошим приближением расчетных зависимостей  $Q(L)$  является

$$Q(L) \approx Q_a(L) = 4,7 \left[ \frac{r_F(L)}{a(L)} \right]^{2,2} \sigma_I^2(L) [1 + 0,5\sigma_I^2(L) + 2,5\sigma_I^4(L)]. \quad (24)$$

### 3.2. Флуктуации мощности обратного рассеяния на приемнике конечного размера

Учет совместного влияния на флуктуации мощности на приемнике усреднения приемной апертурой и усреднения по рассеивающему объему проведем в приближении метода возмущений по величине  $\sigma_I^2(L)$ . Формула для  $Q(L)$ , соответствующая формуле (3) в случае произвольного соотношения между  $R$  и  $r_F$ , как это следует из (20), имеет вид

$$Q \approx Q_1 = \frac{4 \int I_0(L, r_1) I_0(L, r_2) U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho_1, \rho_2) d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 d^2 r_1 d^2 r_2}{\int I_0(L, r_1) I_0(L, r_2) d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 d^2 r_1 d^2 r_2} = Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{14}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{A} \int d^2 \rho_1 \int d^2 \rho_2 \int d^2 r_1 \times \\ &\times \int d^2 r_2 I_0(L, r_1) I_0(L, r_2) B_I(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, 0), \\ Q_{12} &= \frac{1}{A} \int d^2 \rho_1 \int d^2 \rho_2 \int d^2 r_1 \times \\ &\times \int d^2 r_2 I_0(L, r_1) I_0(L, r_2) B_I(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \rho_1), \\ Q_{13} &= \frac{1}{A} \int d^2 \rho_1 \int d^2 \rho_2 \int d^2 r_1 \times \\ &\times \int d^2 r_2 I_0(L, r_1) I_0(L, r_2) B_I(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \rho_2), \\ Q_{14} &= \frac{1}{A} \int d^2 \rho_1 \int d^2 \rho_2 \int d^2 r_1 \times \\ &\times \int d^2 r_2 I_0(L, r_1) I_0(L, r_2) B_I(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \rho_1 - \rho_2); \quad (26) \end{aligned}$$

$$A = \int d^2 \rho_1 \int d^2 \rho_2 \int d^2 r_1 \int d^2 r_2 I_0(L, r_1) I_0(L, r_2) = P_0^2 \pi^2 R^4;$$

$$B_I(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \rho_1 - \rho_2) = 4B_\chi(L, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \rho_1 - \rho_2).$$

При гауссовом распределении интенсивности в пучке, после интегрирования (26) по координатам  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , получим

$$Q_1(L) = 8\pi^2 k_0^2 L \int_0^1 d\xi \int_0^\infty \Phi_n(\kappa, 0) \left[ 1 - \cos \left[ \frac{\kappa^2 L}{k_0} \xi(1 - \xi) \right] \right] \times \\ \times H(R\kappa\xi) \exp \left( -\frac{(1 - \xi)^2 a(L)^2 \kappa^2}{2} \right) \kappa d\kappa, \quad (27)$$

где  $H(x) = 1 + 4J_1(x)/x + 4J_1^2(x)/x^2$ ,  $J_1(x)$  – функция Бесселя первого порядка.

Результаты численных расчетов интеграла (27) представлены на рис. 6.

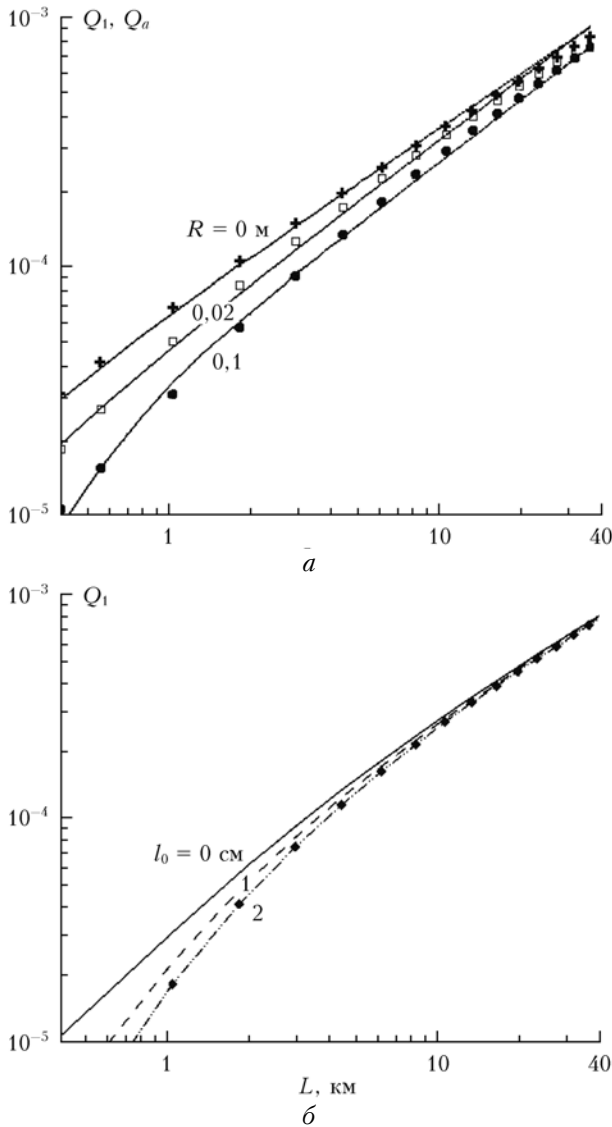


Рис. 6. Зависимости дисперсии относительных флуктуаций мощности  $Q_i(L)$ : а — при значениях радиуса  $R$  приемной апертуры 0; 0,02 и 0,1 м и значениях параметров спектра турбулентности  $C_n^2 = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^{-2/3}$ ;  $l_0 = 0$ . Данные расчетов по формуле (27) — крестики, квадратики и кружочки. Сплошные линии — данные, определяемые подгоночными соотношениями (28); б — при значении радиуса  $R = 0,1$  м и значениях «внутреннего» масштаба  $l_0$ , равных 0; 1 и 2 см

На рис. 6, а приведены подгоночные зависимости:

$$Q_a(L, R = 0) = 4,7\sigma_I^2(L) \left[ \frac{r_F^2(L)}{a^2(L)} \right]^{1,1},$$

$$Q_a(L, R = 0,01 \text{ м}) = 2,0\sigma_I^2(L) \frac{r_F^{2,04}(L)}{\left[ a^2(L) + 0,3R^2 \right]^{1,02}}, \quad (28)$$

$$Q_a(L, R = 0,2 \text{ м}) = 1,5\sigma_I^2(L) \frac{r_F^{2,02}(L)}{\left[ a^2(L) + 0,3R^2 \right]^{1,01}}.$$

Влияние фоновой турбулентности в лидарных исследованиях турбулентности ясного неба

1021

Эти формулы — аппроксимации численных зависимостей. Они показывают, что суммарное усреднение флуктуаций приемником и рассеивающим объемом приводит к ослаблению их дисперсии  $Q$  относительно дисперсии флуктуаций в сферической волне  $\sigma_I^2$ , приблизительно пропорциональному отношению квадрата масштаба Френеля к сумме квадрата радиуса пучка в рассеивающей области и 0,3 квадрата радиуса приемной апертуры. При значениях  $R \leq 10$  см и относительно небольших расстояниях  $L$  усреднение приемной апертурой может привести к значительному ослаблению (до 2 раз при  $L = 1$  км) дисперсии  $Q$ . При значениях  $L \geq 10$  км усреднение приемником не столь существенно.

Влияние внутреннего масштаба турбулентности  $l_0$  на флуктуации мощности, как это видно из рис. 6, б, существенно лишь на небольших расстояниях ( $L \gtrsim 1$  км). Причем дисперсия флуктуаций мощности  $Q(L, l_0)$  уменьшается с увеличением масштаба  $l_0$  значительно медленнее, чем зависимость  $\sigma_I^2(L, l_0)$ . Это можно видеть из сравнения кривых на рис. 1 и рис. 6, б. При значении  $L = 1$  км, например, дисперсия флуктуаций интенсивности  $\sigma_I^2$  уменьшается при увеличении параметра  $l_0$  от 0 до 2 см приблизительно в 200 раз. В то же время дисперсия флуктуаций мощности на приемнике  $Q$ , как это видно из рис. 6, б, уменьшается не более чем в 2 раза. Этот результат согласуется с предположением о том, что в области применимости геометрической оптики (при  $L \gtrsim k_0 l_0^2$ ) для оценок дисперсии  $Q$  применимы формулы (28), в которых масштаб Френеля  $r_F(L)$  следует заменить на масштаб  $l_0$ . Масштабы  $r_F(L)$  и  $l_0$  являются масштабами корреляции флуктуаций интенсивности соответственно в областях применимости дифракционного и геометрооптического приближений. Если заменить в последней из формул (28)  $r_F(L)$  на  $l_0$  и учесть, что, согласно (76)  $\sigma_I^2 \sim l_0^{-7/3}$ , получим  $Q_a(L) \sim l_0^{-0,31}$ . Оценки по этим формулам согласуются с приведенными выше данными численного расчета.

## Заключение

На основании проведенных расчетов можно заключить следующее.

1) В лазерных пучках, радиусы которых изменяются с расстоянием  $L$  на трассе распространения как  $a(L) = a_0 \sqrt{(1 + L/F)^2 + (L/L_d)^2}$ , где  $F > 0$  и  $L_d \geq F$  — длины, характеризующие геометрическое и дифракционное уширение пучка, для расчетов флуктуаций интенсивности на достаточном больших расстояниях ( $L \geq 40F$ ) можно применять формулы для флуктуаций интенсивности в сферической волне.

2) Для оценок дисперсии относительных флуктуаций мощности рассеянного излучения на приемнике  $\sigma_P^2 = \langle P_R^2 \rangle / \langle P_R \rangle^2 - 1 = Q$ , при условиях  $R \ll a(L)$ ,  $L \gg k_0 l_0^2$ , применима формула

$$\sigma_P^2(L) \approx 4,7 \left[ \frac{r_F(L)}{a(L)} \right]^{2,2} \sigma_I^2(L) \left[ 1 + 0,5\sigma_I^2(L) + 2,5\sigma_I^4(L) \right],$$

где  $\sigma_I^2(L) = 0,5C_n^2 k_0^{7/6} L^{11/6}$ . Хотя эта формула получена для модели точечного источника ( $R \ll r_F$ ) и степенного спектра турбулентности, она применима и для оценок в случае приемника конечного радиуса и турбулентного спектра (6) с конечным внутренним масштабом  $l_0$ . Ошибка этой формулы, как показали расчеты при значениях параметров  $R \lesssim 10$  см и  $l_0 \leq 2$  см и на расстояниях  $L > 5$  км, не превышает 30%.

3) Применительно к проекту DELICAT, в котором отношение  $r_F(L)/a(L)$  составляет приблизительно 0,02 при  $L = 5$  км и 0,015 при  $L = 10$  км, среднеквадратическое значение  $\sigma_P$  составляет соответственно  $\sigma_P \approx 0,03\sigma_I$  и  $\sigma_P \approx 0,02\sigma_I$ . На высотах 6–10 км параметр  $C_n^2$  может меняться в очень широких пределах ( $10^{-18} \div 10^{-15} \text{ м}^{-2/3}$ ) [3, 6]. При значении  $C_n^2 = 10^{-17} \text{ м}^{-2/3}$  величина  $\sigma_I$  составляет 0,1 (при  $L = 5$  км) и 0,2 (при  $L = 10$  км). Поэтому ожидаемые величины  $\sigma_P$  могут составлять  $\sim 0,001 \div 0,01$ . Эти величины  $\sigma_P$  сравнимы с относительным изменением мощности на приемнике при переходе от зондирования атмосферы с фоновой турбулентностью к зондированию области ТЯН.

Это изменение составляет

$$\left| \frac{\Delta P_{cat}}{\langle P \rangle} \right| = \left| \frac{\Delta T_{cat}}{\langle T \rangle} \right| \approx 4 \cdot 10^{-3} |\Delta T_{cat}|,$$

где  $\Delta T_{cat}$  — флуктуации температуры в области ТЯН.

Авторы признательны А.С. Гурвичу за постановку задачи, М.Е. Горбунову, В. Кану за полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке the Seventh Research Framework Programme of the European Union (FP7/2007–2013) under grant agreement N 233801 и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-05-00320а.

1. Vrancken P., Wirth M., Rempel D., Ehret G., Dolfi-Bouteyre A., Lombard L., Gaudio T., Rees D., Barny H., Rondeau P. Clear Air turbulence detection and characterization in the DELICAT airborne lidar project // Proc. 25<sup>th</sup> Int. Laser Radar Conf. 5–9 July 2010. St. Petersburg. V. 1. P. 301–304.
2. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
3. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 280 с.
4. Isimaru Akira. Wave propagation and scattering in random media. V. 2. New York; San Francisco; London: Academic Press, 1978. 339 с.
5. Кравцов Ю.А., Фейзулин З.И., Виноградов А.Г. Прохождение радиоволн через атмосферу Земли. М.: Радио и связь, 1983. 224 с.
6. Банах В.А., Миронов В.Л. Локационное распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1986. 174 с.
7. Зуев В.Е., Банах В.А., Покасов В.В. Проблемы современной оптики. Т. 3. Оптика турбулентной атмосферы. Л.: Гидрометеонздат, 1988. 272 с.
8. Gurvich A.S., Chunchuzov I.P. Parameters of the fine density structure in the stratosphere obtained from spacecraft observations of stellar scintillations // Geophys. Res. D. 2003. V. 108, N 5. 4166, doi: 10.1029/2002JD002281.

*V.V. Vorob'ev, A.G. Vinogradov. Effect of background turbulence in lidar investigations of clear air turbulence.*

Effect of atmospheric turbulence on power fluctuations of backscattered laser radiation at lidar receiving aperture is estimated. The estimates are obtained for divergent laser beams with the Gaussian intensity distribution in the Rytov approximation. Simple analytic formulas are suggested as estimators of the variance of received power fluctuations. Estimates showed that, for paths of length about 10 km and radii of sounding region about 1 m, root square values of relative power fluctuations can be comparable with relative variation of the received power at changing sounding from atmospheric regions with background turbulence to highly turbulent regions (clear air turbulence).