<Оптика атмосферы и океана>, **7**, №11–12 (1994)

УДК 535.36:551.521.3

В.В. Веретенников

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ ТЕНИ ЧАСТИЦ

Получены аналитические решения обратной задачи восстановления функции распределения аэрозольных частиц по размерам из измерений функции корреляции тени частиц. Предложенные решения представляют интерес при разработке методов диагностики грубодисперсных сред по многократно рассеянному излучению в малоугловом приближении.

Одним из распространенных методов решения уравнения переноса излучения в малоугловом приближении является метод, основанный на аппроксимации интегрального члена оператором свертки [1,2]. Он позволяет получить простое аналитическое решение УПИ, которое определяется в числе прочих оптических характеристик среды преобразованием Фурье малоугловой индикатрисы рассеяния. Это преобразование в приближении дифракции Фраунгофера представляет собой функцию корреляции тени частиц (ФКТ), вид которой зависит от дисперсного состава среды [3]. В безразмерных координатах ФКТ $\varphi(\xi)$ для системы сферических рассеивателей определяется выражением [4]:

$$\varphi(\xi) = \int\limits_{\xi}^{1} G(\xi / \eta)\, f(\eta)\, d\eta\,, \tag{1}$$

$\xi \in [0, 1]$, где $f(\eta)$ имеет смысл нормированной плотности распределения частиц по относительному размеру $\eta = r/R$ (R – максимальный радиус рассеивателей), а ядро преобразования (1)

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\,[\arccos t - t\sqrt{1 - t^2}], & t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \tag{2}$$

Располагая информацией о зависимости $\varphi(\xi)$, можно поставить обратную задачу по определению дисперсного состава среды из интегрального уравнения (1). Эта информация содержится, в свою очередь, в фундаментальных решениях малоуглового УПИ, таких как функция когерентности и интенсивность плоской волны, оптическая передаточная функция и функция рассеяния точки, которые определяются видом ФКТ $\varphi(\xi)$ и могут быть использованы для ее нахождения. Указанные задачи подробно рассматривались в [4–6]. В [4] описан конечноразностный регуляризирующий алгоритм численного обращения ФКТ $\varphi(\xi)$ (1). Вид ядра $G(t)$ (2) позволяет производить различные функциональные преобразования уравнения (1), которые приводят к известным типам интегральных уравнений и дают возможность получить решение в аналитическом виде. В статье будут рассмотрены методы аналитического обращения ФКТ $\varphi(\xi)$ (1).

1. Метод дифференцирования

Продифференцируем (1) по ξ:

$$\int\limits_{\xi}^{1} f(\eta)\, \eta^{-1} \sqrt{1 - (\mathrm{x} / \mathrm{h})^2}\, d\eta = -\frac{\pi}{4}\,\frac{d\,\varphi(\xi)}{d\,\xi}\,. \tag{3}$$

Если рассмотреть преобразование Ганкеля нулевого порядка функции $\varphi(\xi)$

$$x(\omega) = \int_0^1 \xi\, J_0(\omega\, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\,\xi\,, \tag{4}$$

определяющее индикатрису рассеяния, то производная $\varphi'(\xi)$, стоящая в правой части (3), может быть представлена в виде преобразования Ганкеля первого порядка функции $\omega\, x(\omega)$:

$$\frac{d\,\varphi(\xi)}{d\,\xi} = \int_0^\infty \omega^2\, J_1(\omega\, \xi)\, x(\omega)\, d\,\omega\,. \tag{5}$$

Сделаем в уравнении (3) замену переменных

$$x = \eta^2, \quad y = \xi^2. \tag{6}$$

Тогда можно представить интеграл в (3) в виде кросскорреляции

$$\int_y^1 f_1(x)\, \sqrt{x - y}\, d\,x = \varphi_1(\,y), \tag{7}$$

неизвестной функции

$$f(x) = x^{-3/2} f(\sqrt{x}) \tag{8}$$

и ядра

$$g(x) = \sqrt{x}\, U(x), \quad U(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\varphi_1(\,y) = -\frac{\pi}{2} \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\sqrt{y}}\,. \tag{10}$$

Учитывая связь между корреляцией и сверткой функций [7], для решения интегрального уравнения (7) можно применить метод преобразования Фурье. Существуют эффективные численные методы для обращения уравнений типа свертки, основанные на применении дискретного преобразования Фурье [8].

Дифференцируя (3) повторно, придем к уравнению типа Абеля

$$\int_\xi^1 \frac{f(\eta)\, d\,\eta}{\eta^2 \sqrt{\eta^2 - \xi^2}} = \frac{\pi}{4} \frac{d^2\, \varphi(\xi)}{\xi\, d\xi^2}\,, \tag{11}$$

решение которого можно записать в виде

$$f(\eta) = -\frac{\eta^3}{2} \int_\eta^1 \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi} \frac{d^2\, \varphi(\xi)}{d\xi^2} \right] \frac{d\,\xi}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}\,. \tag{12}$$

К уравнению типа Абеля приводятся многие задачи физики. Разработке численных алгоритмов и их решению уделялось значительное внимание. Обзор существующих методов и алгоритмов обращения уравнения Абеля приведен, например в [9].

Недостатком рассмотренных методов является необходимость дифференцирования измеряемой функции корреляции тени $\varphi(\xi)$, известной всегда с некоторой ошибкой, что является некорректной задачей и требует применения регуляризующих процедур. Ниже будут рассмотрены подходы, которые не требуют дифференцирования измеряемых функций.

2. Метод преобразования Фурье

Если представить (7) в виде свертки $f_1 * g_1 = \varphi_1$, где $g_1(x) = g(-x)$, то в частотной области уравнение (7) будет иметь вид

$$F_1(\omega)\; G_1(\omega) = \Phi_1(\omega), \tag{13}$$

где $F_1(\omega)$ и $\Phi_1(\omega)$ – преобразования Фурье-функций $f_1(x)$ и $\varphi_1(\omega)$, $G_1(\omega)=G(-\omega)$.

$$G_1(\omega) = (\sqrt{\pi} / 2)\; (1 / |\omega|^{3/2})\; \exp\,(\pm\, i\, 3\pi / 4) \tag{14}$$

– преобразование Фурье-функции $g(x) = \sqrt{x}U(x)$ [7], знак <минус> выбирается в случае $\omega > 0$, а <плюс> – при $\omega < 0$. Можно показать, что инверсное ядро для уравнения (13) будет определяться функцией

$$\frac{1}{G_1(\omega)} = -\frac{4}{\pi}\,(i\,\omega)^3\; G_1(\omega), \tag{15}$$

а решение (7) в частотной области имеет вид

$$F_1(\omega) = -\frac{4}{\pi}\,(i\,\omega)^3\; G_1(\omega)\; \Phi_1(\omega). \tag{16}$$

Представим правую часть (16) в виде произведения

$$F_1(\omega) = -\frac{4}{\pi}\,[(i\,\omega)\; G_1(\omega)]\; [(i\,\omega)^2\; \Phi_1(\omega)]. \tag{17}$$

Фурье-трансформанте $[(i\omega)G_1(\omega)]$ соответствует функция

$$g_2(x) = -\frac{U(-x)}{2\sqrt{-x}}\,. \tag{18}$$

Тогда обратное преобразование Фурье (17) дает решение (7) в виде кросскорреляции функций $(1/\sqrt{x})U(x)$ и $\varphi_1''(y)$:

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_{\xi}^{1}\frac{\varphi_1''(y)\,dy}{\sqrt{y-x}}\,. \tag{19}$$

Делая обратную замену переменных в (19) $\eta = \sqrt{x}$, $\xi = \sqrt{y}$, приходим к решению, которое в точности соответствует решению (12), полученному при обращении уравнения Абеля (11).

К другой форме решения можно прийти, если представить (16) в виде

$$F_1(\omega) = -\frac{4}{\pi}\,[(i\,\omega)^3\; G_1(\omega)]\; \Phi_1(\omega). \tag{20}$$

Аналогично предыдущему случаю можно показать, что решение $f_1(x)$, Фурье-трансформанта которого определяется соотношением (20), представляет собой кросскорреляцию третьей производной функции $\sqrt{x}U(x)$ и функции $\varphi_1(y)$:

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{1-x}\frac{d^3}{d\,y^3}\,[\sqrt{y}\;U(y)]\;\varphi_1(y+x)\;d\,y. \tag{21}$$

Если функцию $\varphi_1(y)$ (10) выразить через индикатрису рассеяния $x(\omega)$ с использованием соотношения (5), то это дает возможность избежать дифференцирования функции $\varphi(\xi)$ при восстановлении дисперсного состава среды по формуле (21).

3. Метод функциональных преобразований

Как уже отмечалось, недостатком решения в форме (12) является необходимость дифференцирования ФКТ $\varphi(\xi)$. Один из возможных способов обойти эту проблему основан на использовании преобразования Ганкеля $x(\omega)$ (4) функции $\varphi(\xi)$.

Выражая корреляционную функцию $\varphi(\xi)$ и ее производные через преобразование Ганкеля индикатрисы рассеяния $x(\omega)$ (4) и используя рекуррентные формулы для функций Бесселя [10], получим следующее интегральное представление для дифференциального члена в выражении (12):

$$Q(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\xi}\frac{d^2\,\varphi(\xi)}{d\xi^2}\right] = \int_0^\infty K(\xi,\,\omega)\,x(\omega)\,d\,\omega, \tag{22}$$

в котором ядро преобразования $K(\xi, \omega)$ имеет вид

$$K(\xi,\,\omega) = \frac{\omega^4}{\xi}J_1(\xi\,\omega) + 2\,\frac{\omega^2}{\xi^2}J_0(\xi\,\omega) - 3\,\frac{\omega^2}{\xi^3}J_1(\xi\,\omega). \tag{23}$$

В результате получим решение в виде

$$f(\eta) = -\frac{\eta^3}{2}\int_h^1 \frac{Q(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}. \tag{24}$$

Таким образом, рассмотренная процедура построения решения уравнения (11) состоит в последовательном выполнении преобразования Ганкеля (4) корреляционной функции $\varphi(\xi)$ и интегральных преобразований (22), (24), в результате которых находим функцию распределения по размерам частиц $f(\eta)$ без дифференцирования $\varphi(\xi)$. К недостаткам данного подхода можно отнести высокую трудоемкость вычисления рассмотренных интегралов.

4. Преобразование к уравнению типа свертки без дифференцирования правой части

Зависимость ядра уравнения (1) от отношения аргументов ξ/η позволяет осуществить переход к уравнению типа свертки, используя замену переменных

$$\eta = \eta_0\,e^{-\alpha\,x}, \quad \xi = \xi_0\,e^{-\alpha\,y}. \tag{25}$$

Положим для определенности $\xi_0 = \eta_0 = 1$ и выберем $\alpha > 0$. Тогда ядро $K(\xi, \omega) = G[\exp(-\alpha(y-x))]$ будет зависеть от разности новых переменных. Подстановка (25) в (1) приводит к уравнению типа свертки

$$\int_0^y Q(\,y-x)\,\upsilon(x)\,d\,x = u(\,y), \quad 0 \le y < \infty \tag{26}$$

относительно функции $\upsilon(x) = \eta\,f(\eta)$, $\eta = \exp(-\alpha\,x)$ с ядром $Q(x) = \alpha\,G(\exp(-\alpha\,x))$ и правой частью $u(y) = \varphi(\exp(-\alpha\,y))$. К сожалению, функция $Q(x)$ не является абсолютно интегрируемой на интервале $[0,\infty)$, поэтому для решения уравнения (26) нельзя применить непосредственно метод преобразования Фурье.

В связи с этим модифицируем уравнение (26) следующим образом. Умножим левую и правую части (26) на $\xi = \exp(-\alpha\,y)$. В результате получим другое интегральное уравнение типа свертки

$$\int_0^y Q(\,y-x)\,\exp\,(-\,\alpha(\,y-x)\,\upsilon_1(x)\,d\,x = u_1(\,y) \tag{27}$$

относительно функции $\upsilon_1(x) = \eta^2 f(\eta)$, $\eta = \exp(-\alpha\,x)$ с ядром $Q_1(x) = Q(x)e^{-\alpha\,x}$ и правой частью $u_1(\,y) = u(\,y)e^{-\alpha\,y}$. Интеграл

$$\int_0^\infty Q_1(x)\,d\,x = \int_0^1 G(t)\,d\,t = \frac{2}{3\pi} < \infty \tag{28}$$

сходится, поэтому для обращения уравнения (27) применим метод преобразования Фурье.

Аналогичные рассуждения можно применить и при решении уравнения (3). В результате замены переменных (25) уравнение (3) может быть преобразовано к виду

$$\int_0^y Q_2(y-x)\,\upsilon(x)\,dx = u_2(y), \quad 0 \le y < \infty, \tag{29}$$

в котором неизвестная функция $\upsilon(x) = \eta\ f(\eta)$ – та же, что и в уравнении (26), ядро

$$Q_2(x) = \alpha(1-\exp(-2\alpha\,x))^{1/2}\exp(-\alpha\,x), \tag{30}$$

а правая часть $u_2(y)$ связана с правой частью уравнения (26) соотношением

$$u_2(y) = -\frac{\pi}{4}\,\xi\,\frac{d\,\varphi(\xi)}{d\,\xi} = \frac{\pi}{4}\frac{d\,u(y)}{\alpha\,d\,y}. \tag{31}$$

Функция $Q_2(x)$ – абсолютно интегрируема на интервале $[0,\infty)$, а ее преобразование Фурье имеет вид

$$S(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{\Gamma[(\alpha+i\,\omega)/2\alpha]}{\Gamma[(4\alpha+i\,\omega)/2\alpha]}. \tag{32}$$

Если ввести обозначения $V(\omega)$ и $U(\omega)$ для преобразования Фурье функции $\upsilon(x)$ и $u(y)$ соответственно, то решение уравнения (29) в частотной области будет определяться формулой

$$V(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\,(i\,\omega)\,\frac{\Gamma[(4\alpha+i\,\omega)/2\alpha]}{\Gamma[(\alpha+i\,\omega)/2\alpha]}\,U(\omega). \tag{33}$$

5. Косинус- и синус-преобразования Фурье: решение для моментов

Будем исходить из уравнения (3), которое перепишем в виде

$$\int_\xi^1 \frac{f(\eta)}{\eta^2}\sqrt{\eta^2-\xi^2}\,d\,\eta = -\frac{\pi}{4}\frac{d\,\varphi(\xi)}{d\,\xi}. \tag{34}$$

Умножим обе части (34) на $\cos(\xi\omega)$ и проинтегрируем по ξ в интервале от 0 до 1. Меняя затем порядок интегрирования в левой части (34) и вычисляя внутренний интеграл, получим следующее уравнение:

$$\int_0^1 \frac{f(\eta)}{\eta\omega}J_1(\eta\omega)\,d\,\eta = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\,\varphi(\xi)}{d\,\xi}\cos(\omega\xi)\,d\,\xi. \tag{35}$$

Чтобы исключить дифференцирование функции корреляции тени $\varphi(\xi)$, проинтегрируем по частям интеграл, стоящий в правой части (35). Это даст нам функцию

$$\Gamma(\omega) = \left[1-\omega\int_0^1 \varphi(\xi)\sin(\omega\xi)\,d\,\xi\right]\Big/2, \tag{36}$$

определяющую преобразование Ганкеля первого порядка функции $f(\eta)/\eta^2$:

$$\int_0^1 \frac{f(\eta)}{\eta^2}J_1(\eta\omega)\,\eta\,d\,\eta = \omega\,\Gamma(\omega). \tag{37}$$

Обратное преобразование (37) дает искомое распределение $f(\eta)$:

$$f(\eta) = \eta^2\int_0^\infty \Gamma(\omega)\,J_1(\eta\omega)\,\omega^2\,d\,\omega. \tag{38}$$

В данном методе обращение интегрального уравнения (34) основано на применении к корреляционной функции $\varphi(\xi)$ синус-преобразования Фурье с последующим переходом к функции $\Gamma(\omega)$ (36). Искомое распределение $f(\eta)$ затем определяется в виде преобразования Ганкеля (38) функции $\omega\Gamma(\omega)$. Описанный метод также не требует вычисления производной $d\varphi(\xi)/d\xi$. Для вычисления синус-преобразования Фурье и преобразования Ганкеля существуют эффективные алгоритмы.

Уравнение (37) позволяет получить простые выражения для моментов функции распределения частиц по размерам $f(\eta)$. С этой целью разложим в степенные ряды функцию Бесселя $J_1(\eta\,\omega)$ в подынтегральном выражении в левой части (37) и функцию $\sin(\omega\,\xi)$ в подынтегральном выражении (36). После элементарных преобразований формула (37) приобретает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k m_{2k}^{f}}{2^{2k}\, k!\, (k+1)!}\, \omega^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k m_{2k-1}^{\varphi}}{(2k-1)!}\, \omega^{2k}, \tag{39}$$

где

$$m_{2k}^{f} = \int_0^1 f(\eta)\, \eta^{2k}\, d\eta, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{40}$$

– четные моменты функции распределения частиц по размерам $f(\eta)$;

$$m_{2k-1}^{\varphi} = \int_0^1 \varphi(\xi)\, \xi^{2k-1}\, d\xi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{41}$$

– нечетные моменты функции корреляции тени частиц $\varphi(\xi)$.

Приравнивая в (39) коэффициенты при одинаковых степенях ω, получим выражения для четных моментов функции $f(\eta)$

$$m_{2k}^{f} = c_{2k}\, m_{2k-1}^{\varphi}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{42}$$

где

$$c_{2k} = \frac{2^{2k}\, k!\, (k+1)!}{(2k-1)!}. \tag{43}$$

Таким образом, мы получили общие формулы, выражающие $(2\,k)$- моменты искомого решения $f(\eta)$ через $(2\,k-1)$-моменты функции корреляции тени $\varphi(\xi)$.

Формулы для нечетных моментов функции распределения $f(\eta)$ можно получить аналогичным путем, исходя из синус-преобразования Фурье интегрального уравнения (34) с последующим разложением в степенной ряд косинус-преобразования Фурье ФКТ $\varphi(\xi)$. Это приводит к следующим соотношениям между $(2\,k+1)$-м моментом распределения частиц по размерам $f(\eta)$ и $(2\,k)$-м моментом функции корреляции тени частиц $\varphi(\xi)$:

$$m_{2\,k+1}^{f} = c_{2\,k+1}\, m_{2\,k}^{\varphi}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

где

$$c_{2k+1} = \frac{\pi}{4} \frac{(2\,k+1)!\,!\,(2\,k+3)!\,!}{(2\,k)!}. \tag{45}$$

Объединяя формулы (42) и (44), можно утверждать, что произвольный момент m_k^f искомого распределения $f(\eta)$ выражается через $(k-1)$-й момент функции корреляции тени по формулам

$$m_k^{f} = c_k\, m_{k-1}^{\varphi}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

где коэффициенты c_k определяются по формулам (43) и (45).

При решении многих прикладных задач информации о первых моментах восстанавливаемого распределения $f(\eta)$ может оказаться вполне достаточно. В случае если ограничиться заданным модельным видом функции распределения $f(\eta)$ с некоторыми неизвестными параметрами, то можно установить связь этих параметров с моментами распределения. Так, например, для широко используемой модели логарифмически нормального распределения

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln\eta - m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{47}$$

параметры m и σ^2 связаны с первыми двумя моментами m_1 и m_2 распределения $f(\eta)$ следующими соотношениями:

$$m = \ln\left\{m_1^2 / \sqrt{m_2}\right\}, \quad \sigma^2 = \ln\left[m_2 / m_1^2\right]. \tag{48}$$

Заключение

Разнообразие форм полученных аналитических решений задачи обращения ФКТ частиц создает предпосылки для разработки на их основе различных численных алгоритмов восстановления функции распределения частиц по размерам, которые включают в себя стандартные процедуры обработки экспериментальной информации (численное дифференцирование, преобразования Фурье, Ганкеля и т.п.). Эффективность таких алгоритмов будет зависеть от быстродействия выполняемых математических преобразований, точности получаемых результатов, устойчивости к ошибкам в исходных данных и т.п., что требует проведения специальных исследований.

1. Долин Л.С. // Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. 1964. Т. 7. №2. С. 380–382.
2. Зеге Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.
3. Боровой А.Г., Вагин Н.И. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1985. Т. 12. №1. С. 93–95.
4. Боровой А.Г., Вагин Н.И., Веретенников В.В. // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 61. Вып. 6. С. 1326–1330.
5. Вагин Н.И., Веретенников В.В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1989. Т. 25. №7. С. 723–731.
6. Веретенников В.В. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. №9. С. 1047–1053.
7. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.
8. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.
9. Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск: Наука, 1982. 237 с.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовца и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

Институт оптики атмосферы
СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию
16 июня 1994 г.

V.V. Veretennikov. **Analytical Techniques for Inversion of Correlation Function of Particles Shadow.**
Analytical solutions are proposed of the inverse problem of reconstructing the function of aerosol particles size distribution from measurements of the correlation function of particles shadow. The proposed solutions are of interest to development of the methods of diagnosis the coarse-dispersed media by multiply scattered radiation in small-angle aproximation.