«Оптика атмосферы и океана», **11**, № 11 (1998)

УДК 621.396.965.8

С.М. Чернявский

ПРИМЕНЕНИЕ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ ВОЛНЫ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЕЕ ФАЗЫ ПО АМПЛИТУДНЫМ ДАННЫМ

Обосновывается целесообразность при решении фазовой задачи введения контролируемой фазовой модуляции волны, формирующей изображение. Применительно к адаптивной оптике предлагается метод, позволяющий разделить задачи восстановления четной и нечетной составляющих искажений фазы волны по изображению.

1. Введение

Известно, какое отрицательное влияние оказывает атмосферная нестабильность на изображение объекта. Методы борьбы с атмосферной нестабильностью можно разбить на два типа.

Первый охватывает методы, которые могут быть названы интерферометрическими. В их основе лежит специфический способ обработки серии короткоэкспонированных изображений объекта, позволяющий извлечь информацию о пространственных частотах объекта. Заключительным этапом этих методов является восстановление распределения интенсивности на объекте по модулю ее спектра и, возможно, по некоторым данным о фазе спектра.

Методы второго типа (объединим их под названием адаптивные) предполагают, что оптическая система (ОС) работает по новому принципу [1]. В ОС имеется адаптивный элемент, который в реальном времени осуществляет контролируемое изменение фазы волны, формирующей изображение. Если контролируемое изменение фазы равно по величине и противоположно по знаку искажению фазы волны, вносимому средой распространения от объекта до ОС, то получаем дифракционное изображение объекта. Принципы адаптивной оптики могут быть использованы не только для борьбы с атмосферной нестабильностью, но и для решения проблем создания крупногабаритной оптики. Управление адаптивным элементом зависит от способа измерения искажений фазы: один способ – когда измеряется искажение фазы и адаптивной элемент ее компенсирует разом (с учетом динамики); второй способ – когда осуществляются последовательное измерение (возможно, неточное) и компенсация искажения фазы. ОС как бы самонастраивается на дифракционное изображение. Эта настройка может осуществляться по некоторому критерию либо условию или по тому и другому вместе.

Наиболее простой с точки зрения реализации способ измерения фазы, привлекающий многих исследователей [2], – второй способ, который рассматривается в данной статье. Здесь требуются методы и алгоритмы, извлекающие информацию о фазе из искаженного этой фазой изображения объекта.

Обозначим через $G(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) \exp(i\Phi(\xi, \eta))$ комплексную функцию (функцию зрачка), которая описывает амплитудные и фазовые искажения волны на выходном зрачке Ω ОС. Амплитуда $A = 0$ вне Ω. Интенсивность в изображении точечного объекта [3]:

$$h(x, y) = |\, g(x, y)|^2 = |\, F(G)|^2, \qquad (1)$$

где F – символ двумерного преобразования Фурье.

Восстановление фазы по изображению сводится к следующей так называемой фазовой задаче (ФЗ): по известным A на Ω и h на ω определить Φ из уравнения (1). В частности, задача восстановления изображения интерферометрическим методом – суть задача (1) для неизвестной функции $G = A \geq 0$. Круг проблем, которые приводят к фазовой задаче, широк [4] и не ограничивается астрономическими наблюдениями. Трудности решения ФЗ известны. Необходимо получить надежные данные о фазе (о функции G) по h с учетом ошибок измерения.

Можно выделить два оптимизационных алгоритма численного решения ФЗ: алгоритм Гершберга – Закстона (ГЗ) и градиентный [2]. В обоих методах решение фазовой задачи является точкой глобального экстремума определяющего функционала, характеризующего невязку между измеренной и вычисленной интенсивностями.

Адаптивный алгоритм решения ФЗ, о котором пойдет речь в п. 2, впервые предложен в [5] и затем обобщен в работе [6]. Исходя из сути адаптивной ОС, она должна решить уравнение

$$h(x, y; \Phi) - h(x, y; 0) = 0\,, \quad (x, y) \in \omega\,, \qquad (2)$$

где Φ – разность между неизвестной фазой и контролируемой фазой, вносимой адаптивным элементом; $h(x, y; 0)$ – известная интенсивность, соответствующая дифракционному изображению точечного объекта. Для решения уравнения (2) воспользуемся модифицированным методом Ньютона:

$$h(x, y; \Phi_n) - h(x, y; 0) = \delta h(x, y; 0) = h'(x, y; 0)\delta\Phi_n\,,$$

$$(x, y) \in \omega\,, \qquad (3)$$

где δh – вариация h в точке $\Phi = 0$ за счет $\delta\Phi$. Вариация $\delta\Phi_n$ является той контролируемой фазой, на которую надо изменить Φ_n с помощью адаптивного элемента. Алгоритм (3) реализуем, если производная $h'(x, y; 0)$ является обратимым оператором. Можно рассматривать более узкий вариант алгоритма (3). Представим искажение фазы отрезком ряда по некоторой системе базисных функций

$$\Phi = \sum_{s=1}^{n} \zeta_s \Phi_s\,, \qquad (4)$$

тогда ФЗ сводится к определению коэффициентов (мод) ζ_s. Алгоритм (3) реализуем, если производные $\partial h/\partial\zeta_s$ линейно независимы на ω. Задача восстановления мод по алгоритму (3) и рассматривалась в [5, 6].

В п. 2, 3 статьи обосновывается целесообразность использования фиксированной контролируемой фазовой модуляции волны для решения проблем ФЗ. Кроме того, в п. 3 показано, что если определяющий функционал ФЗ взять в виде невязки волновых функций (а не амплитуд) и применить метод «увеличения размерности», то многообразие оптимизационных методов решения ФЗ расширяется.

2. Восстановление четной и нечетной составляющих волнового фронта (ВФ)

Фазу функции зрачка представим в виде

$$\Phi = \Phi^1 + \Phi^2,$$

где $\Phi^1(-\xi, -\eta) = -\Phi^1(\xi, \eta)$ – нечетная и $\Phi^2(-\xi, -\eta) = \Phi^2(\xi, \eta)$ – четная составляющие Φ. Между Φ и ее составляющими есть связь:

$$\Phi^1(\xi, \eta) = \frac{\Phi(\xi, \eta) - \Phi(-\xi, -\eta)}{2}\,,$$

$$\Phi^2(\xi, \eta) = \frac{\Phi(\xi, \eta) + \Phi(-\xi, -\eta)}{2}\,.$$

Относительно известной амплитуды A функции зрачка предположим, что она является четной функцией на выходном зрачке. Предположим также, что имеется возможность вносить фиксированное контролируемое воздействие на функцию зрачка, которое сводится к умножению ее на фазовый множитель $G_\theta = e^{-i\alpha\varphi(\xi,\eta)}$, где действительная функция $\varphi(\xi, \eta)$ определяет характер фазового воздействия, а действительный коэффициент α – величину этого воздействия. Например, измерение интенсивности $h(x, y)$ не в фокальной плоскости, а параллельной ей с координатой $\alpha = z$, равносильно введению фазовой модуляции, определяемой функцией

$$\varphi(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)/2 = \rho^2/2\,.$$

Если с этих позиций рассматривать работы [5, 6], то в них применялась модуляция типа расфокусировки, причем показано, что при $z = 0$ моды частных составляющих не влияют на δh и, следовательно, не могут быть восстановлены из решения задачи (3), (4).

Примем следующие сокращения:

$$C = F(A\cos\alpha\varphi)\,, \quad S = F(A\sin\alpha\varphi)$$

$$F_C(\Phi) = F(\Phi A\cos\alpha\varphi)\,,$$

$$F_S(\Phi) = F(\Phi A\sin\alpha\varphi)\,.$$

С учетом обозначений волновая функция $g(x, y)$ в фокальной плоскости ОС с функцией зрачка $G(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)\exp(i\Phi(\xi, \eta))$ и при фазовой модуляции запишется в следующем виде:

$$g(\Phi) = F(G_0 A\, e^{i\Phi}) = F_C(e^{i\Phi}) - iF_S(e^{i\Phi})\,.$$

При $\Phi = 0$ функция $g(0) = C - iS$, вариация $\delta g(0)$ в точке $\Phi = 0$ на вариацию $\delta\Phi$ будет равна

$$\delta g(0) = F_C(i\delta\Phi) - iF_S(i\delta\Phi)\,.$$

Рассмотрим выражение вариации δh в зависимости от четности φ.

1. φ – четная функция. Тогда C и S – четные функции, а $F_C(\Phi)$ и $F_S(\Phi)$ – действительные четные или мнимые нечетные функции в зависимости от того, четная или нечетная функция Φ. Вариация интенсивности δh на вариацию $\delta\Phi$ ВФ в точке $\Phi = 0$ определяется выражением

$$\delta h = 2\mathrm{Re}\, g^*(0)\,\delta g(0) = 2\mathrm{Re}\,(C + iS)\,[F_C(i\delta\Phi) - iF_S(i\delta\Phi)] =$$

$$= 2C\,[F_C(i\delta\Phi^1) + F_S(\delta\Phi^2)] + 2S\,[-F_C(\delta\Phi^2) + F_S(i\delta\Phi^1)] =$$

$$= 2\begin{pmatrix} C \\ -S \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_C(i\delta\Phi^1) + F_S(\delta\Phi^2) \\ -F_S(\delta\Phi^2) + F_C(i\delta\Phi^1) \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} C \\ -S \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_C & F_S \\ -F_S & F_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\delta\Phi^1 \\ \delta\Phi^2 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где T – символ транспонирования, а $\begin{pmatrix} F_C & F_S \\ -F_S & F_C \end{pmatrix}$ – матрица линейных операторов преобразования над вектором функций $\begin{pmatrix} i\delta\Phi^1 \\ \delta\Phi^2 \end{pmatrix}$. При $\alpha = 0$ функция $S = 0$, F_S – нулевой оператор и

$$\delta h = 2CF_C(i\delta\Phi^1)\,.$$

Это равенство можно обратить с хорошей точностью:

$$\delta\Phi^1 = (2i)^{-1} F^{-1}[C\delta h^1/(\gamma + C^2)]\,,$$

где $\gamma \cong 0$ – положительный регуляризирующий параметр, исключающий деление на нуль.

Таким образом, при $\alpha = 0$ алгоритм (3) позволяет восстановить только нечетные составляющие ВФ. Иными словами, без применения модуляции алгоритм (3) не восстанавливает четных составляющих ВФ.

При $\alpha \neq 0$ $\delta h = \delta h^1 + \delta h^2$,

где

$$\delta h^1 = 2\begin{pmatrix} C \\ -S \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_C \\ -F_S \end{pmatrix}(i\delta\Phi^1);\ \delta h^2 = 2\begin{pmatrix} C \\ -S \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_S \\ F_C \end{pmatrix}(\delta\Phi^2)\,. \quad (6)$$

Равенство (3) распадается на два равенства, соответственно для нечетной и четной составляющих ВФ:

$$h^1(\Phi) - h^1(0) = \delta h^1(0) \text{ и } h^2(\Phi) - h^2(0) = \delta h^2(0)\,. \quad (7)$$

Реализация алгоритма (7) зависит от свойств преобразований $\delta\Phi^1 \to \delta h^1$ и $\delta\Phi^2 \to \delta h^2$. Условие $\delta h^1 = 0$ равносильно тому, что векторы $\begin{pmatrix} C \\ -S \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} F_C \\ -F_S \end{pmatrix}(i\delta\Phi^1)$ перпендикулярны при всех $(x, y) \in \omega$. В точках, где $CS \neq 0$, это равносильно равенствам

$$F_C i\delta\Phi^1 = k^1 S \text{ и } -F_S i\delta\Phi^1 = k^1 C\,, \quad (8)$$

где k^1– нечетная функция, определяемая через $\delta\Phi^1$. Если множество, на котором произведение $CS \neq 0$, имеет нулевую меру, то из (8) следует, что множество нулей преобразования $\delta\Phi^1 \to \delta h^1$ не слишком широкое.

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что множество нулей преобразования $\delta\Phi^2 \to \delta h^2$ определяется равенствами

$$F_C\, \delta\Phi^2 = k^2 C \text{ и } -F_S\, \delta\Phi^2 = k^2 S\,, \quad (9)$$

где k^2 – четный коэффициент пропорциональности, свой для каждой функции $\delta\Phi^2$, для которой $\delta h = 0$. В частности, $\delta\Phi^2 = k = \text{const}$ удовлетворяет (9). Но этот случай не представляет интереса, так как четную составляющую фазы достаточно знать с точностью до постоянного слагаемого. Опять обнаруживаем, что множество нулей и у второго преобразования (7) не слишком широкое.

Отсюда следует вывод, что алгоритм (7) при $\alpha \neq 0$ может быть реализован для восстановления мод ВФ и выбором α и функции φ можно обеспечить линейную независимость частных производных $\partial h/\partial \xi_s$. Можно пойти дальше и для каждой моды или для группы мод взять α и φ такими, чтобы производные были не только линейно независимыми, но и чтобы их матрица Грама была хорошо обусловлена.

2. Вместо функции $\alpha\varphi$, определяющей фазовую модуляцию, рассмотрим сумму $\psi + \alpha\varphi$, где $\psi = 0$ при значениях полярного угла в плоскости зрачка в промежутке $[0, \pi)$ и $\psi = \pi$, если полярный угол лежит в промежутке $[\pi, 2\pi)$, а φ является нечетной функцией. Например, контролируемый общий наклон ВФ задает нечетную функцию $\varphi = \beta x + \gamma y$, его можно создать путем параллельного переноса системы координат в плоскости регистрации интенсивности h на вектор $(-\beta, -\gamma)$.

При такой модуляции произведение $A\mathrm{e}^{i(\psi + \alpha\varphi)} = (A\mathrm{e}^{i\psi})\, \mathrm{e}^{i\alpha\varphi}$ имеет нечетную амплитуду $A_1 = A\mathrm{e}^{i\psi}$ и нечетную фазу φ, а функции C, S, F_C, F_S имеют свойства: S, $F_C(\delta\Phi^1)$ и $F_S(\delta\Phi^2)$ – четные действительные функции; C, $F_S(\delta\Phi^1)$ и $F_C(\delta\Phi^2)$ – нечетные мнимые функции. С учетом этого

$$\delta h = 2\,\mathrm{Re}\,(C^* + iS)\,[F_C(i\delta\Phi) - i\,F_S(i\delta\Phi)] =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,(iC^* - S)\,[F_C(\delta\Phi) - i\,F_S(\delta\Phi)] =$$

$$= 2\,(iC^* - S)\,[F_C(\delta\Phi^1) - i\,F_S(\delta\Phi^2)]\,;$$

$$A_1\,\delta\Phi^1 \cos\alpha\varphi - A_1\,\delta\Phi^2 \sin\alpha\varphi = F^{-1}\left[\frac{(iC^* - S)\mathrm{d}h/2}{\mathrm{g} + (iC^* - S)^2}\right]. \quad (10)$$

Если измерения выполнить при двух различных модуляциях, таких что определитель $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1\varphi_1) & \sin(\alpha_1\varphi_1) \\ \cos(\alpha_2\varphi_2) & \sin(\alpha_2\varphi_2) \end{vmatrix} = \sin(\alpha_2\varphi_2 - \alpha_1\varphi_1) \neq 0$, то эти измерения позволяют однозначно определить $\delta\Phi^1$ и $\delta\Phi^2$ из (10) и, следовательно, использовать в полной мере метод Ньютона в задаче последовательной компенсации ВФ.

Как мы установили, восстановление четных и нечетных мод ВФ по алгоритму (7) можно осуществлять раздельно. Этим можно пользоваться для уменьшения размерности задачи путем выбора базиса из четных и нечетных функций. Так, базис Цернике изначально состоит из четных и нечетных функций. Очень удобным базисом являются кусочно-линейные функции. Пусть выходной зрачок разбит на $2n$ одинаковых субапертур Ω_s, причем субапертуры Ω_s и Ω_{s+n}, $s = 1, \ldots, n$, центрально симметричны. На Ω_s ВФ зададим по линейному закону $\Phi_s = \alpha_s + \beta_s\xi + \gamma_s\eta$. Если χ_s – характеристическая функция на Ω_s, равная 1 на Ω_s и 0 вне Ω_s, то базисом являются функции

$$\chi_s,\ \chi_s\,\xi,\ \chi_s\,\eta,\quad s = 1, \ldots, 2n\,.$$

Образуем из них новый базис

$$(\chi_s + \chi_{s+n}),\ (\chi_s + \chi_{s+n})\,\xi\,,\ (\chi_s + \chi_{s+n})\,\eta\,,$$

$$(\chi_s - \chi_{s+n}),\ (\chi_s - \chi_{s+n})\,\xi\,,\ (\chi_s - \chi_{s+n})\,\eta\,,$$

$$s = 1, \ldots, 2n\,,$$

который состоит из четных и нечетных функций. Благодаря переходу к новому базису размерность задачи уменьшалась в два раза. Можно было образовать и другие комбинации субапертур, чтобы образовать базис из четных и нечетных функций. Те же рассуждения применимы и для нечетного числа субапертур.

3. Оптимизационный метод решения ФЗ

Функцию зрачка G, произведение GG_0 и преобразование Фурье $F(GG_0)$ будем считать элементами гильбертова пространства H комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом на плоскости зрачка и плоскости изображения соответственно. Из исходных данных ФЗ образуем в H два множества:

$$V_1 = \{\, g : |\, g(x, y)| \le h^{1/2}(x, y),\ (x, y) \in \omega \,\}$$

и

$$V_2 = \{\, g : g = F(GG_0), \quad |\, G(\xi, \eta)| \le A(\xi, \eta) \text{ на } \Omega$$

и $G(\xi, \eta) = 0$ вне Ω }.

Решение ФЗ сводится к нахождению точки пересечения границ этих множеств $\partial V_1 \cap \partial V_2$. Пусть G' – решение ФЗ и $g_2' = F(G_0 G') \in \partial V_2$. Метод нахождения точки из $\partial V_1 \cap \partial V_2$ зависит от выбранной стратегии. Одна стратегия может заключаться в построении последовательности точек $g_n \in H$, приближающихся к $\partial V_1 \cap \partial V_2$. Другая стратегия может заключаться в построении последовательности двух точек $g_{1n} \in \partial V_1$, $g_{2n} \in \partial V_2$, которые сближаются с возрастанием n. Рассмотрим вторую стратегию, которую назовем методом расширения размерности задачи.

На множестве пар $(g_1, g_2) \in \partial V_1 \times \partial V_2$ зададим функционал

$$J(g_1, g_2) = \|\, g_1 - g_2 \,\|_{\omega}^2 = \iint_{\omega} |(g_1 - g_2)|^2\, dxdy. \tag{11}$$

Пара $(g_1' = g_2', g_2')$ доставляет абсолютный минимум функционалу (11) на $\partial V_1 \times \partial V_2$, равный нулю. Отсюда выбор алгоритма построения минимизирующей последовательности (g_{1n}, g_{2n}) функционала (11) дает итерационный метод решения ФЗ.

Нам понадобится следующее определение. Пусть g_0 – точка H и V – замкнутое множество H. Точку $\tilde{g} \in V$ назовем прекцией g_0 на V, если

$$\|\, \tilde{g} - g_0 \| = \min_{g \in V} \|\, g - g_0 \| .$$

Проекцию $\tilde{g}$ будем обозначать так: $\tilde{g} = P_V\, g$.

Из равенства

$$\min_{(g_1, g_2) \in \partial V_1 \times \partial V_2} J(g_1, g_2) = \min_{g_2 \in \partial V_2} \left(\min_{g_1 \in \partial V_1} J(g_1, g_2) \right)$$

следует, что задачу минимизации функционала (11) на множестве $\partial V_1 \times \partial V_2$ можно свести к задаче минимизации на ∂V_2 функционала

$$J_2(g_2) = \min_{g_1 \in \partial V_1} J(g_1, g_2) = \|\, \tilde{g}_1 - g_2 \|_{\omega}^2 = \|\, \tilde{g}_1 - g_2 \|_{\omega + \omega'}^2 ,$$

где $\tilde{g}_1 = P_{\partial V_1}\, g_2 = \begin{cases} h^{1/2}\, e^{i \arg g_2} & \text{на } \omega, \\ g_2 & \text{на } \omega'; \end{cases}$ ω' – область, дополняющая ω до всей плоскости oxy.

Функционал $J_2(g_2)$ можно еще записать так:

$$J_2(g_2) = \|\, h^{1/2} - |\, g_2 \,| \,\|_{\omega}^2 .$$

Решение ФЗ на основе минимизации функционала $J_2(g_2)$ исследовалось в [2].

Построим алгоритм покоординатного спуска к минимуму функционала $J(g_1, g_2)$. Пусть $g_{2,n}$ – n-е приближение к g_2'. Приближение $g_{1,n}$ к g_1' найдем из условия $J(g_{1,n}, g_{2,n}) = \min\limits_{g_1 \in \partial V_1} J(g_1, g_{2,n})$, т.е. $g_{1,n} = P_{\partial V_1}\, g_{2,n}$. При фиксированном $g_{1,n}$ найдем $g_{2,n+1}$ из условия

$$J(g_{1,n}, g_{2,n+1}) = \min_{g_2 \in \partial V_2} J(g_{1,n}, g_2) \le J(g_{1,n}, g_{2,n}) .$$

Из определения функционала $J(g_1, g_2)$ и проекции на множество следует, что

$$g_{2,n+1} = P_{\partial V_2}\, g_{1,n} = P_{\partial V_2} P_{\partial V_1}\, g_2 .$$

Но это есть алгоритм ГЗ – один из основных методов решения ФЗ, о котором упоминалось в п. 1. Таким образом, применение 2-й стратегии позволяет расширить множество методов решения ФЗ. Например, градиентный спуск к минимуму функционала $J(g_1, g_2)$ по обеим координатам может оказаться более предпочтительным, по крайней мере на отдельных итерациях.

Выполним в функционале (11) преобразования:

$$J(g_1, g_2) = \iint_{\omega} (|\, g_1|^2 - 2\mathrm{Re}\, g_1^* g_2 + |\, g_2|^2)\, dxdy =$$

$$= \iint_{\omega} |\, g_1|^2\, dxdy - 2\mathrm{Re} \iint_{\omega} g_1^*\, g_2\, dxdy - \iint_{\omega'} |\, g_2|^2\, dxdy +$$

$$+ \iint_{\omega + \omega'} |\, g_2|^2\, dxdy .$$

С помощью равенства Парсеваля устанавливаем, что сумма

$$\iint_{\omega} |\, g_1|^2\, dxdy + \iint_{\omega + \omega'} |\, g_2|^2\, dxdy = \iint_{\omega} h\, dxdy + \iint_{\Omega} A^2\, d\xi d\eta$$

постоянна на $\partial V_1 \times \partial V_2$, поэтому задача минимизации функционала (11) равносильна задаче на максимум функционала

$$J(g_1, g_2) = 2\mathrm{Re} \iint_{\omega} g_1^*\, g_2\, dxdy + \iint_{\omega'} |g_2|^2\, dxdy \text{ на } V_1 \times V_2. \tag{12}$$

В работе [7] показано, что распределение интенсивности в пространстве изображения содержит полную информацию о фазе волны Ф даже в том случае, если объект неизвестен. Многие авторы [2] используют распределения интенсивности в нескольких плоскостях (параллельно фокальной) для получения надежной оценки фазы из решения ФЗ. В п. 2 показана эффективность применения расфокусировки и в более общем виде контролируемой фазовой модуляции волны для решения ФЗ. Поэтому с учетом фазовой модуляции $G_0(\alpha) = e^{i\alpha\varphi(\xi,\eta)}$ можно рассмотреть более общий, чем (12), функционал

$$J_1(g_1, g_2) = \int J_1(g_1, g_2,\alpha)\, d\mu(\alpha) \tag{13}$$

на множестве пар $(g_1, g_2) \in \partial V_1 \times \partial V_2$,

где

$V_1 = \{g_1\colon |\, g_1(x,y,\alpha)| \le h^{1/2}(x,y,\alpha),\ (x,y) \in \omega\}$,

а $J_1(g_1, g_2, \alpha)$ – функционал (12)

$V_2 = \{g_2\colon\ g_2(x,y,\alpha) = F(G_0(\alpha)G)$,

$|G| \le A$ на Ω; $g_2 = 0$ вне $\Omega\}$

при различных α, $d\mu(\alpha)$ – мера на множестве значений α.

Найдем вариацию функционала (13) в точке (g_1, g_2):

$$\delta J_1(g_1, g_2) = \int \delta J_1(g_1, g_2,\alpha)\, d\mu(\alpha)\ ,$$

где

$$\delta J_1(g_1,g_2,\alpha) = 2\mathrm{Re} \iint\limits_{\omega} (g_2^*\delta g_1 + g_1^*\delta g_2)\, dxdy +$$

$$+\ 2\mathrm{Re} \iint\limits_{\omega'} g_2^*\delta g_2\, dxdy\ .$$

Введение функции $\widetilde{g}_1 = \begin{cases} g_1 \text{ на } \omega \\ g_2 \text{ на } \omega' \end{cases}$ позволяет записать вариацию

$$\delta J_1(g_1, g_2, \alpha) = 2\mathrm{Re} \iint\limits_{\omega} g_2^*\delta g_1\, dxdy +$$

$$+\ 2\mathrm{Re} \iint\limits_{\omega+\omega'} \widetilde{g}_1^*\delta g_2\, dxdy\ .$$

В полярных координатах $g_1 = h^{1/2}e^{i\theta}$ и $G_2 = Ae^{i\Phi}$, поэтому

$$\delta J_1(g_1, g_2,\alpha) = 2\mathrm{Re} \iint\limits_{\omega} ig_2^*\, g_1\delta\theta\, dxdy +$$

$$+\ 2\mathrm{Re} \iint\limits_{\omega+\omega'} iG_2^*G_2\delta\Phi\, dxdy\ .$$

Здесь учтено, что имеет место равенство Парсеваля

$$\iint\limits_{\omega+\omega'} \widetilde{g}_1^*\delta g_2\, dxdy = \iint\limits_{\omega+\omega'} \left(F^{-1}(\widetilde{g}_1)^{-1}\right)^*\delta F^{-1}(g_2)\, d\xi d\eta\ ;$$

$$G_0(\alpha)\widetilde{G}_1 = F^{-1}(\widetilde{g}_1)\ ,\quad G_0(\alpha)\widetilde{G}_2 = F^{-1}(\widetilde{g}_2)\ .$$

Окончательно получаем, что

$$\delta J_1(g_1, g_2) = -2\mathrm{Im} \int d\mu(\alpha) \iint\limits_{\omega} g_2^*g_1\delta\theta(x,y,\alpha)\, dxdy\ -$$

$$-\ 2\mathrm{Im} \iint\limits_{\omega+\omega'} \left(\int \widetilde{G}_1^* d\mathrm{m}(\mathrm{a})\right) G_2\delta\Phi\, d\xi d\eta$$

и функциональная производная J_1' по фазовым составляющим функций g_1 и G равна

$$J_1' = -2\mathrm{Im}\left(ig_2^*\, g_1, \left(\int \widetilde{G}_1^* d\mu(\alpha)\right) G_2\right).$$

Непосредственно проверяется, что алгоритм ГЗ для функционала (13) строится по схеме

$$g_{2,n}(\alpha);\ g_{1,n}(\alpha) = \begin{cases} h^{1/2}(\alpha)e^{i \arg g_{2,n}(\alpha)} & \text{на } \omega, \\ g_{2,n}(\alpha) & \text{на } \omega'; \end{cases}$$

$$G_{2,n+1} = A \arg \int \widetilde{G}_1\, d\mu(\alpha);$$

$$g_{2,n+1}(\alpha) = F(G_0\ G_{2,n+1})\ .$$

Метод расширения размерности может быть применен и для нахождения точки пересечения конечного числа множеств.

1. *Адаптивная* оптика / Под ред. Д. Фрида. М.: Мир, 1980. 450 с.
2. *Воронцов М.А., Корябин Ф.В., Шмальгаузен В.И.* Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1988. 270 с.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
4. *Реконструкция* изображений / Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1992. 635 с.
5. *Дегтярев Г.Л., Маханько А.В., Чернявский А.С.* // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 3. С. 402–405.
6. *Чернявский С.М.* // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. N 12. С. 1593–1598.
7. *Чернявский С.М.* // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 1. С. 85–92.

Казанский государственный технический университет
им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию
4 августа 1998 г.

S.M. Chernyavskii. **Application of Wave Phase Modulation to Reconstruction of Its Phase from Amplitude Data.**

An expedience of introduction of controllable wave phase modulation, forming an image, is justified for the phase problem solution. In connection with adaptive optics, a method allowing a separation of the problems of odd and even components of a wave distorted phase reconstruction from the image is proposed.