«Оптика атмосферы», **1**, № 11 (1988) УДК 551.521.3:535.36

Э.П. Зеге, И.Л. Кацев, И.И. Полонский

МОДИФИКАЦИЯ МАЛОУГЛОВОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ ФОРМЫ ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ В МАЛЫХ УГЛАХ

Разработана простая модификация малоуглового диффузионного приближения, позволяющая учитывать влияние формы индикатрисы рассеяния в малых углах на описание пространственно-угловых распределений интенсивности и освещенности рассеянного света. Показано, что предложенная методика позволяет удовлетворительно описать эти распределения на любых оптических глубинах.

Известны те трудности, с которыми сопряжены попытки аналитического представления радиального размытия освещенности и пространственно-углового распределения яркости в задачах о распространении узкого пучка света в средах с сильно анизотропным рассеянием. Лишь для случая предельно больших оптических толщин имеются отдельные аналитические решения [1]. Малоугловое приближение (МУП) дает удобные представления для Фурье-образов упомянутых функций при некотором простейшем задании индикатрис рассеяния, получение же самих распределений связано с необходимостью выполнения численных многомерных Фурье-преобразований [2]. Кроме того, применимость МУП ограничена областью не очень больших значений оптических толщин. Даже в совокупности область применимости асимптотических решений при $\tau \gg 1$ и МУП не перекрывает весьма важный интервал промежуточных оптических толщин.

В последнее время широко используется очень удобное для инженерных расчетов малоугловое диффузионное приближение (МДП) [3], которое позволяет с достаточной точностью определить некоторые интегральные характеристики световых полей. Однако в рамках МДП пространственно-угловые структуры светового поля моделируются гауссовым распределением, которое не учитывает ни локальных особенностей функции Грина задачи, ни тесной корреляции ее (особенно для не очень больших оптических толщин) с индикатрисой рассеяния, информация о которой входит в решения МДП только через один параметр — среднеквадратическое отклонение в акте рассеяния. Последнее обстоятельство особенно критично для оптических индикатрис рассеяния, которые, как правило, имеют острый пик в области очень малых углов и сравнительно медленно спадают вне его пределов. Так, для модели облака С.1 [4] для углов рассеяния $\beta \lesssim 3°$ содержится 40% рассеянного света, при рассеянии в морской воде приблизительно 60% энергии распространяется в углах $\beta \lesssim 6°$.

В данной статье делается попытка улучшить описание пространственно-угловой структуры светового поля в рамках модифицированного МДП.

Представим интенсивность светового поля J в виде суммы интенсивности нерассеянного (прямопрошедшего) $J_{\text{пп}}$ и рассеянного J_s световых полей, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\hat{D} J_{пп}(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = 0; \tag{1}$$

$$\hat{D} J_s(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \lambda \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \chi(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp|) J_s(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp) + \lambda B(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp),$$

где $\hat{D} = \left(1 - \frac{\bar{\boldsymbol{n}}_\perp^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\tau} + \bar{\boldsymbol{n}}_\perp \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}} + 1$; $(\tau, \bar{\boldsymbol{r}})$ — оптические координаты точки в декартовой системе с осью 0τ, направленной вглубь среды перпендикулярно ее границе; $\bar{\boldsymbol{n}}_\perp$ — проекция единичного вектора направления $\bar{\boldsymbol{n}}$ на плоскость $\tau = \text{const}$; λ — альбедо однократного рассеяния; $\chi(\beta)$ — индикатриса рассеяния света. Функция источника λB в уравнении для J_s описывает однократно рассеянный свет, т.е.

$$B(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \chi(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp|) J_{\text{пп}}(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp). \tag{2}$$

Выражение для $J_{\text{пп}}$ в случае источника с узкой диаграммой направленности имеет вид

$$J_{\text{пп}}(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = e^{-\tau} J_0(\bar{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{n}}_\perp \tau, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp), \tag{3}$$

где $J_0(\bar{\boldsymbol{r}},\bar{\boldsymbol{n}}_\perp)$ — пространственно-угловое распределение интенсивности, создаваемое источником на границе среды.

Теперь представим индикатрису рассеяния в виде

$$\chi(\beta) = a_1\chi_1(\beta) + a_2\chi_2(\beta), \tag{4}$$

где $\chi_1(\beta)$ описывает пик в области малых углов, а $\chi_2(\beta)$ — оставшуюся часть индикатрисы, причем

$$\int_0^\infty \chi_i(\beta)\,\beta d\beta = 1;\ a_1 + a_2 = 1;\ \beta_2^{(i)} = \int_0^\infty \beta^2\chi_i(\beta)\,\beta d\beta;\ \beta_2^{(1)} \ll \beta_2^{(2)} \ll 1\ (i = 1,\ 2).$$

В соответствии с таким представлением индикатрисы интенсивность рассеянного излучения J_s будем искать в виде

$$J_s(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = J_1(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) + J_2(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}_\perp), \tag{5}$$

где J_1 удовлетворяет уравнению

$$\hat{D}J_1(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \lambda_1 \iint_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \chi_1(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp|)\, J_1(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp) + \lambda_1 B_1(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) \tag{6}$$

при $\lambda_1 = \lambda a_1$.

$$B_1(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \chi_1(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp|)\, J_{\text{пп}}(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp). \tag{7}$$

Из (1), (4)—(6) следует, что J_2 является решением уравнения

$$\hat{D}J_2(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \lambda a_2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \chi_2(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp|)\, J_2(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp) + \lambda a_2 B_2(\tau,\bar{\boldsymbol{r}},\bar{\boldsymbol{n}}_\perp) +$$

$$+ \lambda_1 \iint_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \chi_1(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp|)\, J_2(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp), \tag{8}$$

где

$$B_2(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \chi_2(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp|)\, J_{\text{пп}}(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp) + J_1(\tau,\bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp)].$$

Отметим, что уравнения (6) и (7) являются строгим следствием (1) при произвольном разбиении индикатрисы (4).

Рассмотрим решение уравнения (6), которое описывает рассеянную компоненту излучения, соответствующую индикатрисе $\chi_1(\beta)$. В этом случае выполняются все требования применимости МДП: сильновытянутая индикатриса рассеяния, источники $\lambda_1 B_1(\tau,\bar{\boldsymbol{r}},\bar{\boldsymbol{n}}_\perp)$ с малой, но конечной угловой расходимостью, малая вероятность выживания фотона $\lambda_1 = \lambda a_2$. Решение уравнения (6) можно записать в виде

$$J_1(\tau,\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \frac{g_1}{4\pi^2(\sigma_1\mu_1 - A_1^2)} \exp\left\{ -\frac{\bar{\boldsymbol{r}}^2}{2\mu_1} - \frac{\left(\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \frac{A_1}{\mu_1}\bar{\boldsymbol{r}}\right)^2}{2\left(\sigma_1 - \frac{A_1^2}{\mu_1}\right)} \right\}, \tag{9}$$

где g_1 — поток излучения через плоскость $\tau = \text{const}$; σ_1 и μ_1 соответственно угловая и пространственная дисперсии распределения интенсивности; A_1 — функция, описывающая корреляцию между пространственными и угловыми координатами. Конкретные выражения для параметров g_1, σ_1, A_1, μ_1 приведены в Приложении (формулы П. 7).

Найдем компоненту рассеянного поля J_2, являющуюся решением уравнения (8). Для этого воспользуемся особенностью конкретного представления индикатрисы (4), т.е. учтем, что $\beta_2^{(2)} \gg \beta_2^{(1)}$ (для реальных сред можно выбрать $\beta_2^{(2)}/\beta_2^{(1)} \sim 100 \div 1000$). Поскольку пространственно-угловая структура интенсивности J_1 определяется функцией $\chi_1(\beta)$, то при нахождении J_2 можно считать, что

$$\chi_1(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp|) = \delta(\bar{\boldsymbol{n}}_\perp), \tag{10}$$

где $\delta(\bar{\boldsymbol{n}})$ – дельта-функция Дирака. В этом приближении для функции J_1, входящей в уравнение (8), на основании (6) имеем:

$$J_1(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = (\exp(-(1-\lambda_1)\tau) - \exp(-\tau))\, J_0(\bar{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{n}}_\perp, \tau, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp). \tag{11}$$

Тогда уравнение (8) можно переписать в виде

$$\hat{D}' J_2(\tau', \bar{\boldsymbol{r}}', \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \lambda_2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \chi_2(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp|)\, J_2(\tau', \bar{\boldsymbol{r}}', \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp) + \lambda_2 B_2(\tau', \bar{\boldsymbol{r}}', \bar{\boldsymbol{n}}_\perp);$$

$$\hat{D}'(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \hat{D}(\tau', \bar{\boldsymbol{r}}', \bar{\boldsymbol{n}}_\perp); \tag{12}$$

$$B_2(\tau', \bar{\boldsymbol{r}}', \bar{\boldsymbol{n}}_\perp) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \chi_2(|\bar{\boldsymbol{n}}_\perp - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp|)\, e^{-\tau'} J_0\left(\frac{\bar{\boldsymbol{r}}' - \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp \tau}{1-\lambda_1}, \bar{\boldsymbol{n}}'_\perp\right),$$

где $\lambda_2 = \dfrac{\lambda a_2}{1-\lambda_1}$, $\tau' = (1-\lambda_1)\tau$, $\bar{\boldsymbol{r}}' = (1-\lambda_1)\bar{\boldsymbol{r}}$ – транспортные характеристики среды. Заметим, что уравнения (6) и (12) аналогичны по форме, поэтому

$$J_2(\tau, \bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp; \lambda, \beta_2) = J_1(\tau', \bar{\boldsymbol{r}}', \bar{\boldsymbol{n}}_\perp; \lambda_2, \beta_2^{(2)}) \tag{13}$$

и соответственно решение для J_2 может быть записано в виде (9).

Таким образом формируется полное решение задачи для интенсивности $J = J_{\text{пп}} + J_1 + J_2$, где отдельные слагаемые определяются формулами (3), (9), (13). Выделение малоуглового пика на индикатрисе рассеяния приводит к возможности приближенного разделения рассеянного светового поля на две независимые составляющие. Пространственно-угловая структура одной из них J_1 обусловлена характеристиками пика индикатрисы и является определяющей при формировании рассеянной составляющей светового поля в приосевой зоне на небольших удалениях от границы среды. Вторая составляющая J_2 формирует пространственно-угловую структуру светового поля на более далеких от оси пучка расстояниях и в области больших оптических толщин. Структура этой составляющей интенсивности излучения определяется соответственно широкой частью индикатрисы рассеяния, т. е. функцией $\chi_2(\beta)$, а выделение малоуглового пика приводит к новым (транспортным) характеристикам среды.

Далее рассмотрим преимущества такого «модифицированного» подхода при исследовании пространственно-угловой структуры рассеянного света. Для этого сопоставим результаты расчетов некоторых дифференциальных характеристик рассеянного светового поля для среды с индикатрисой модели облака С.1 [4], проведенных по предложенной методике и в обычном МДП, с результатами аналогичных расчетов в МУП. Последнее было выбрано в качестве основы для сопоставления, так как, строго учитывая индикатрису рассеяния и не навязывая априорного вида решения типа (9), оно гарантирует высокую точность расчета характеристик светового поля на небольших удалениях от границы среды. Сопоставление результатов, полученных в МУП, с расчетами методом Монте-Карло показывает, что оценка яркости в области углов, близких к направлению вперед, при освещении среды бесконечно широким пучком [5] и оценка освещенности в приосевой зоне узкого пучка [6] в МУП справедливы до глубин $\tau \sim 10$.

Будем рассматривать следующие характеристики световых полей: яркость рассеянного света $J_s(\tau, \bar{\boldsymbol{r}} = 0, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp = 0)$ в направлении вперед на оси пучка при освещении границы среды пространственно-ограниченным пучком света; яркость $J_s(\tau, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp = 0)$ в направлении вперед при освещении среды бесконечно широким пучком; освещенность $E_s(\tau, \bar{\boldsymbol{r}} = 0)$, создаваемая рассеянным светом на оси пучка при освещении среды пространственно-ограниченным пучком. Во всех перечисленных случаях несколько упрощаются многомерные интегралы с осциллирующими функциями, через которые выражаются решения в МУП.

В расчетах использовалась аппроксимация индикатрисы рассеяния

$$\chi(\beta) = \frac{2a_1}{\beta_2^{(1)}} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{\beta_2^{(1)}}\right\} + a_2\alpha^2 \exp\{-\alpha\beta\} \tag{14}$$

с параметрами $a_1 = 0,42$, $\beta_2^{(1)} = 0,001$, $a_2 = 0,58$, $\alpha = 4$, характерными для модели С.1. Потери на рассеяние в заднюю полусферу учитывались введением эффективного альбедо среды (подробнее см. в [7]). Для выбранной модели эффективное значение альбедо $\lambda = 0,96$.

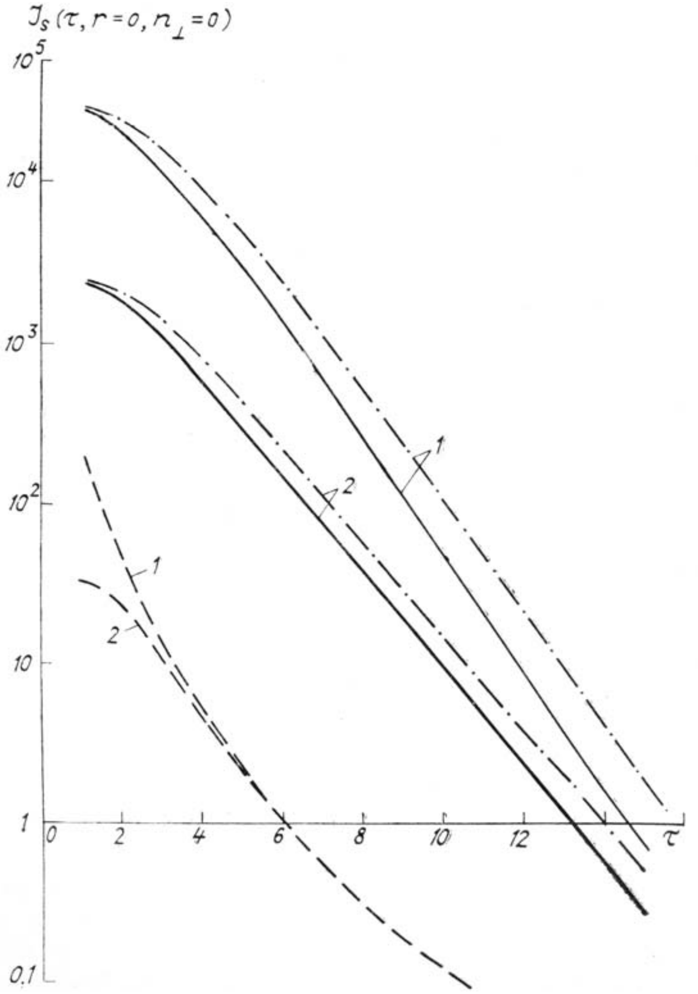

Рис. 1. Зависимость яркости рассеянного света в направлении вперед на оси узкого пучка $J_s(\tau, \bar{r} = 0, \boldsymbol{n}_\perp = 0)$ от τ: штрихпунктирные линии — расчет в МУП; сплошные — расчет по предложенной методике; пунктирные — расчет в обычном МДП. *1* — $\sigma_0 = 7,8 \cdot 10^{-5}$, $\mu_0 = 0,01$; *2* — $\sigma_0 = 7,8 \cdot 10^{-3}$, $\mu_0 = 0,1$

На рис. 1 приведены результаты расчетов яркости рассеянного света в направлении вперед на оси узкого пучка $J_s(\tau, \bar{r} = 0, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp = 0)$ в МУП, в обычном МДП и по предложенной методике. На рис. 2, 3 приведены результаты аналогичных расчетов яркости в направлении вперед для широкого пучка $J_s(\tau, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp = 0)$ и освещенности на оси узкого пучка $E_s(\tau, \bar{r} = 0)$ соответственно. Из рисунков видно, что благодаря более детальному учету формы индикатрисы рассеяния достигается значительное повышение точности расчета интенсивности рассеянного света. С увеличением расходимости падающего на границу среды пучка влияние формы индикатрисы рассеяния ослабевает и различные приближения дают близкие результаты. Однако при исследовании структуры световых полей, создаваемых; реальными источниками (солнце, лазер), пренебрежение особенностями формы индикатрисы в малых углах приводит к существенному занижению оценки интенсивности в приосевой зоне пучка в области углов, близких к направлению распространения излучения. Из рисунков видно также, что при больших τ, когда в результате многократного рассеяния поля действительно приближаются к гауссовым распределениям, расчеты по предложенной методике и обычные МДП-решения дают близкие результаты. Оценку области оптических толщин, где принципиален учет поправок на форму индикатрисы рассеяния, можно получить, определив τ^*, при которой составляющие интенсивности (освещенности) рассеянного света J_1 и J_2 (E_1 и E_2) становятся равны по величине. Для яркости на оси пучка

$$\tau_J^* = \frac{2}{\lambda a_2} \ln \frac{a_2 \beta_J^{(2)}}{a_1 \beta_2^{(1)}} .$$

Для освещенности на оси пучка или яркости в широком пучке аналогично находим $\tau_E^* = \frac{1}{\lambda a_2} \ln \frac{a_2 \beta_2^{(2)}}{a_1 \beta_2^{(1)}} = 0{,}5\tau_j^*$. В частности, для облака модели С. 1 $\tau_j^* \approx 24$.

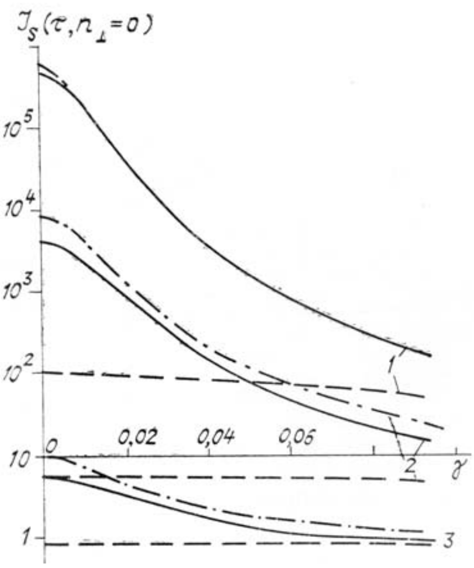

Рис. 2. Зависимость яркости рассеянного излучения в направлении вперед для широкого пучка $J_s(\tau, \bar{\boldsymbol{n}}_\perp = 0)$ от $\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\pi}}$: штрихпунктирные линии — расчет в МУП; сплошные — по предложенной методике; штриховые —расчет в обычном МДП. *1* — $\tau = 1$; *2* — $\tau = 5$; *3* — $\tau = 10$

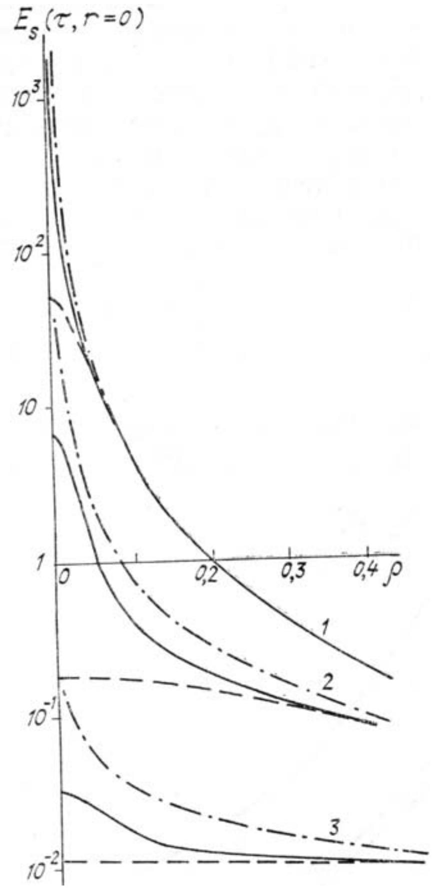

Рис. 3. Зависимость освещенности, создаваемой рассеянным светом, на оси узкого пучка $E_s(\tau, \bar{\boldsymbol{r}} = 0)$ от $\rho = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi}}$: штрихпунктирные линии — расчет в МУП; сплошные — расчет по предложенной методике; штриховые — расчет в обычном МДП. *1* — $\tau = 1$; *2* — $\tau = 5$; *3* — $\tau = 10$

В целом из приведенных данных можно сделать вывод, что предложенная методика, более точно учитывающая особенности индикатрисы рассеяния, позволяет заметно улучшить описание пространственно-угловых зависимостей яркости и освещенности. Важно, что это улучшение достигается практически без усложнения расчетной схемы, и решения по-прежнему имеют простой аналитический вид.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Будем искать решение уравнения (6) в виде (9). Тогда на основе метода моментов [8] с учетом соотношения (7) и (3) получим систему уравнений для неизвестных функций:

$$\frac{d}{d\tau}(g_1\,(1 - \sigma_1)) + (1 - \lambda_1)\, g_1 = \lambda_1 e^{-\tau};$$

$$\frac{d}{d\tau}(g_1\sigma_1(1-2\sigma_1))+(1-\lambda_1)g_1\sigma_1=\lambda_1 g_1\beta_2^{(1)}/2+\lambda_1 e^{-\tau}(\beta_2^{(1)}/2+\sigma_0); \qquad (\text{П.1})$$

$$\frac{d}{d\tau}(g_1 A_1(1-2\sigma_1))+(1-\lambda_1)g_1 A_1=g_1\sigma_1+\lambda_1 e^{-\tau}(A_0+\sigma_0\tau);$$

$$\frac{d}{d\tau}(g_1\mu_1(1-\sigma_1)-A_1^2))+(1-\lambda_1)g_1\mu_1=2\,g_1A_1+\lambda_1 e^{-\tau}(\mu_0+2A_0\,\tau+\sigma_0\tau^2),$$

где

$$g_n=\langle J_n\rangle;\ \sigma_n=\frac{\langle n_\perp^2 J_n\rangle}{2g_n};\ A_n=\frac{\langle \bar n_\perp \bar r J_n\rangle}{2g_n};$$

$$\mu_n=\frac{\langle \bar r^2 J_n\rangle}{2g_n};\ \langle f(\bar n_\perp,\ \bar r)J_n\rangle=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\bar n_\perp\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\bar r\langle f(\bar n_\perp,\ \bar r)J_n(\tau,\ \bar r,\ \bar n_\perp)\rangle, \qquad (\text{П.2})$$

считая, что функция J_0 нормирована соотношением $g_0 = 1$.

Заметим, что в средах с сильной анизотропией рассеяния и заметным поглощением основная энергия светового поля сосредоточена в области углов, близких к направлению вперед. Поэтому можно считать, что дисперсия углового распределения $\sigma_1 \ll 1$. С учетом этого неравенства систему уравнений (П.1) можно записать в виде:

$$\frac{d}{d\tau}g_1=(\lambda_1 e^{-\tau}-(1-\lambda_1)g_1)(1+\sigma_1);$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\tau}=\lambda_1\beta_2^{(1)}/2-(1-\lambda_1)\sigma_1^2+\frac{\lambda_1 e^{-\tau}}{g_1}(\sigma_0+\beta_2^{(1)}/2-\sigma_1);$$

$$\frac{d}{d\tau}A_1=\sigma_1-(1-\lambda_1)\sigma_1 A_1+\frac{\lambda_1 e^{-\tau}}{g_1}(A_0+\sigma_0\tau-A_1); \qquad (\text{П.3})$$

$$\frac{d}{d\tau}\mu_1=2A_1-(1-\lambda_1)A_1^2+\frac{\lambda_1 e^{-\tau}}{g_1}(\mu_0+2A_0\tau+\sigma_0\tau^2-\mu_1).$$

В общем случае получить строгое аналитическое решение системы (П.3) не удается, хотя ее численное решение не представляет затруднений. Поэтому для нахождения приближенного аналитического решения, применимого во всем диапазоне τ, воспользуемся следующими соображениями. Известно, что МДП достаточно хорошо описывает интегральные характеристики суммарного светового поля $J_\Sigma = J_{\text{пп}} + J_1$, распространяющегося в среде, с характеристиками λ_1 и $\chi_1(\bar n_\perp)$. В этом случае при $A_0 = 0$

$$g_\Sigma=\frac{\exp(-(1-\lambda_1)\tau)}{\operatorname{ch} s_1\tau+u_1\operatorname{sh} s_1\tau};$$

$$\sigma_\Sigma=\sigma_{\text{гл}}^{(1)}\frac{u_1+\operatorname{th} s_1\tau}{1+u_1\operatorname{th} s_1\tau}; \qquad (\text{П.4})$$

$$A_\Sigma=\frac{1}{1-\lambda_1}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch} s_1\tau+u_1\operatorname{sh} s_1\tau}\right);$$

$$\mu_\Sigma=\mu_0+\frac{\tau}{1-\lambda_1}\left(1-\frac{\operatorname{th} s_1\tau}{s_1\tau(1+u_1\operatorname{th} s_1\tau)}\right),$$

где

$$s_1=\sqrt{(1-\lambda_1)\lambda_1\beta_2^{(1)}/2};\ \sigma_{\text{гл}}^{(1)}=s_1/(1-\lambda_1);\ u_1=\sigma_0/\sigma_{\text{гл}}^{(1)}.$$

Аналогичные характеристики для прямопрошедшего света имеют вид

$$g_{пп} = e^{-\tau};\ \sigma_{пп} = \sigma_0;\ A_{пп} = \sigma_0\tau;\ \mu_{пп} = \mu_0 + \sigma_0\tau^2. \qquad (П.5)$$

С учетом

$$< f(\bar{n}_\perp,\ \bar{r})\, J_\Sigma > \, = \, < f(\bar{n}_\perp,\ \bar{r})\, J_{п.п} > + < f(\bar{n}_\perp,\ \bar{r})\, J_1 > \qquad (П.6)$$

из (П.4) и (П.5) несложно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{\exp\left(-(1-\lambda_1)\tau\right)}{\operatorname{ch} s_1\tau + u_1 \operatorname{sh} s_1\tau} - e^{-\tau};\\
\sigma_1 &= \frac{\sigma_{гл}^{(1)} \operatorname{th} s_1\tau / T_1 + \sigma_0}{1 + \operatorname{th} s_1\tau};\\
A_1 &= \frac{\dfrac{1}{1-\lambda_1}\left(1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch} s_1\tau}\right) + \sigma_0\tau\left(\dfrac{\operatorname{th} s_1\tau}{s_1\tau} - e^{-\lambda_1\tau}\operatorname{ch} s_1\tau\right)}{(1 + \operatorname{th} s_1\tau)\, T_1};\\
\mu_1 &= \mu_0 + \frac{\dfrac{\tau}{1-\lambda_1}\left(1 - \dfrac{\operatorname{th} s_1\tau}{s_1\tau}\right) + \sigma_0\tau^2\left(\dfrac{\operatorname{th} s_1\tau}{s_1\tau} - e^{-\lambda_1\tau}\operatorname{ch} s_1\tau\right)}{(1 + \operatorname{th} s_1\tau)\, T_1},
\end{aligned} \qquad (П.7)$$

где $T_1 = 1 - \exp(-\lambda_1\tau)\operatorname{ch} s_1\tau$.

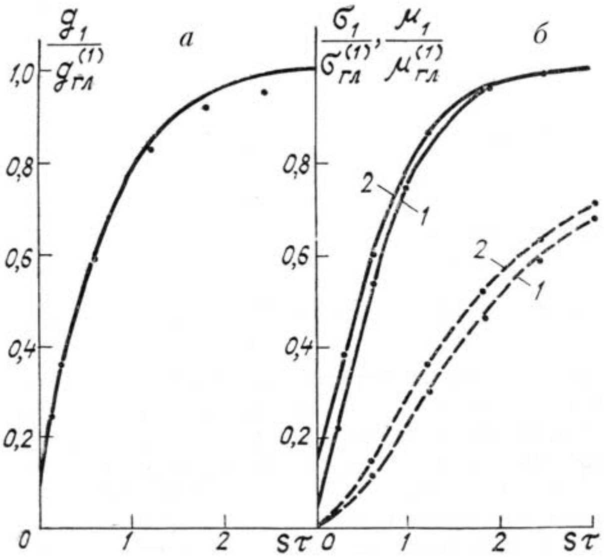

Рис. 4. Параметры пространственно-углового распределения интенсивности рассеянного излучения при $\lambda_1 = 0{,}96$, $\beta_2^{(1)}/2 = 0{,}083$. Зависимость $g_1/g_{гл}$ от $s\tau$ (*а*), зависимость $\sigma_1/\sigma_{гл}$ (сплошные линии) и $\mu_1/\mu_{гл}^{(1)}$ (пунктирные от $s\tau$ (*б*) для различных значений σ_0, *1* — $\sigma_0 = 0$; *2* — $\sigma_0 = 0{,}1$. Кривые — расчет по формулам (П.7), точки — результаты численного решения системы (П.3)

На рис. 4 приведено сравнение результатов численного решения системы (П.3) и приближенного аналитического решения (П.7). На рисунке представлены величины $g_1/g_{гл}^{(1)} = \exp(-(1 - \lambda_1 + s_1)\tau)$, $\sigma_1/\sigma_{гл}^{(1)} = \sigma_1 \dfrac{1-\lambda_1}{s_1}$ и $\mu_1/\mu_{гл}^{(1)} = \mu_1 \dfrac{1-\lambda_1}{\tau}$, зависящие только от $s_1\tau$. Видно, что формулы (П.7) хорошо описывают решение системы дифференциальных уравнений (П.3) и могут использоваться в качестве приближенного аналитического решения. Кроме того, это совпадение еще раз иллюстрирует достаточно высокую точность определения интегральных характеристик светового поля в облачном МДП.

1. Зеге Э. П. О некоторых результатах асимптотической теории переноса излучения в поглощающих анизотропно-рассеивающих средах. Приложение к оптике океана и облаков. Минск. 1982. 55 с. (Препринт/Ин-т физики АН БССР, №274).
2. Долин Л. С. //Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. №2. С. 380–382.

3. Д о л и н Л . С . //Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 206. №3. С. 300—309.
4. Д е й р м е н д ж а н Д . Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперными частицами. М.: Мир. 1971. 165 с.
5. K u g a Y . , I s h i m a r u A . , C h a n g H . - W . , T s a n g L . //Appl. Optics. 1986. V. 25. №21. P. 3803—3805.
6. Д р о ф а А . С , У с а ч е в А . Л . //Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. №4. С. 408—414.
7. З е г е Э . П . , И в а н о в А . П . , К а ц е в И . Л . Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника. 1985. 327 с.
8. К о р н Г . , К о р н Т . Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука. 1978. 832 с.

Институт физики АН БССР,
Минск

Поступила в редакцию
28 марта 1988 г.

E.P. Zege, I.L. Katsev, I.N. Polonsky. **A Modified Small—Angle Diffusion Approximation Taking into Account the Specific Form of the Scattering Phase Function at Small Angles.**

A simple modified small-angle diffusion approximation was developed to account for the effect of the form of the scattering phase function at small angles on the description of the space-angular scattered light and illumination intensity distributions. It is shown that the proposed procedure provides a fairly satisfactory representation of the distributions for any optical depths.