

УДК 621.371

В.В. Войцехович, Д. Кузнецов

АППРОКСИМАЦИЯ РЫТОВА: КОММЕНТАРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ

Рассматриваются некоторые аспекты, относящиеся к области применимости аппроксимации Рытова для расчета флуктуаций, вызванных турбулентностью. Ошибки аппроксимации оцениваются путем сравнения результатов, полученных Рытовым и с помощью численного решения параболического уравнения. Показано, что интересующая нас область применимости сильно зависит от типа вычисляемых величин. Обсуждаются также некоторые аспекты сингулярного поведения амплитуды в присутствии фазовых дислокаций.

Аппроксимация Рытова для решения параболического уравнения [1] обычно используется для вычисления флуктуаций световой волны, вызванных слабой атмосферной турбулентностью. Предполагается, что это решение верно, пока так называемый индекс мерцания Рытова $\beta_0^2 < 0,3 \div 1$ [1–3]. Однако область применимости не может быть оценена без учета вида величины, вычисляемой с помощью аппроксимации Рытова. Это означает, что при тех же самых условиях распространения и силе турбулентности ошибки аппроксимации могут быть различными для различных величин. Физический механизм, который здесь проявляется, может быть представлен следующим образом. Основное преимущество аппроксимации Рытова состоит в том, что она учитывает эффект многократного рассеяния. Тем не менее этот эффект учитывается только частично, и результат Рытова становится неверным при усилении многократного рассеяния. Поэтому можно предположить, что область применимости результата Рытова для некоторых величин в действительности определяется тем, как сильно многократное рассеяние воздействует на интересующую нас величину. Другими словами, чем сильнее влияет на какую-либо величину многократное рассеяние, тем уже область применимости результата Рытова для этой величины. Мы очертим ниже эту проблему, сравнивая результаты Рытова с результатами, полученными путем численного решения параболического уравнения. Будут изучены три статистических величины: дисперсия логарифма амплитуды, дисперсия первой производной логарифма амплитуды и дисперсия второй производной логарифма амплитуды. Эти величины выбраны по следующим причинам. Во-первых, мелкомасштабные атмосферные неоднородности дают основной вклад в многократное рассеяние. Во-вторых, эти же неоднородности главным образом определяют поведение производных логарифма амплитуды. Также можно предположить, что при тех же самых условиях распространения и той же турбулентности ошибка рытовской аппроксимации возрастает с увеличением порядка производной.

Мы ограничимся в дальнейшем случае плоской монохроматической волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере с постоянными параметрами вдоль пути распространения. Флуктуации показателя преломления предполагаются изотропными гауссовыми со спектром мощности Φ_n , представленным в виде

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2),$$

$$\kappa_m = 5,92/l_0, \quad (1)$$

где C_n^2 – структурная постоянная показателя преломления, а l_0 есть внутренний масштаб турбулентности.

Аппроксимации Рытова для рассматриваемых дисперсий следующие:

дисперсия логарифма амплитуды

$$\langle \kappa^2 \rangle = 2,175 C_n^2 k^2 L \kappa_m^{-5/3} \times$$

$$\times \left\{ -1 + \frac{6}{11} D^{5/6} \left(1 + \frac{1}{D^2} \right)^{11/12} \sin \left(\frac{11}{6} \arctg D \right) \right\}, \quad (2)$$

дисперсия первой производной логарифма амплитуды

$$\langle \kappa_x^2 \rangle = 0,907 C_n^2 k^2 L \kappa_m^{1/3} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{6}{5} D^{-1/6} \left(1 + \frac{1}{D^2} \right)^{5/12} \sin \left(\frac{5}{6} \arctg D \right) \right\}, \quad (3)$$

дисперсия второй производной логарифма амплитуды

$$\langle \kappa_{xx}^2 \rangle = 0,113 C_n^2 k^2 L \kappa_m^{7/3} \times$$

$$\times \left\{ 1 - 6 D^{-7/6} \left(1 + \frac{1}{D^2} \right)^{-1/12} \sin \left(\frac{1}{6} \arctg D \right) \right\}, \quad (4)$$

где L – длина пути распространения; k – волновое число; $D = L\kappa_m^2/k$ – волновой параметр.

Выражения (2)–(4) прямо вытекают из общего выражения для корреляционной функции логарифма амплитуды [1].

Для того чтобы оценить ошибки аппроксимации Рыгова для приведенных выше дисперсий, сравним эти приближенные теоретические результаты (1)–(4) с полученными путем численного решения параболического уравнения [1]

$$2ik \frac{\partial E(z, \rho)}{\partial z} + \Delta_{\perp} E(z, \rho) + 2k^2 \tilde{n}(z, \rho) E(z, \rho) = 0, \quad (5)$$

где E обозначает комплексное волновое поле, вектор $\rho = (x, y)$ определен в плоскости, нормальной направлению распространения; $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, а \tilde{n} обозначает флуктуационную составляющую показателя преломления.

Наш метод моделирования похож на представленный в работе [4], поэтому не будем его здесь описывать и предлагаем читателю обратиться за деталями к этой работе. Рис. 1 отображает относительные ошибки аппроксимации в процентах для рассматриваемых дисперсий в зависимости от индекса мерцания β_0^2 , определяемого известным выражением

$$\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}.$$

Для каждой дисперсии σ^2 относительная ошибка δ вычисляется как $\delta = 100\% \left| \frac{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}{\sigma_R^2} \right|$, где σ_R^2 и σ_S^2 обозначают рыговские и рассчитанные значения данной дисперсии соответственно. Дисперсия рассчитывалась для выборки, объем которой был равен 100.

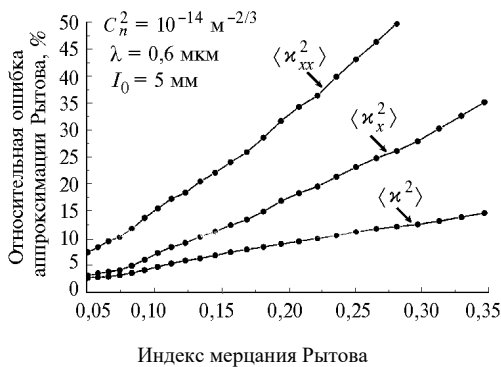


Рис. 1. Относительные ошибки аппроксимации Рыгова для трех величин: дисперсии $\langle \kappa^2 \rangle$ амплитуды логарифма, дисперсии $\langle \kappa_x^2 \rangle$ первой производной логарифма амплитуды и дисперсии $\langle \kappa_{xx}^2 \rangle$ второй производной логарифма амплитуды

Из рис. 1 видно, что поведение кривых подтверждает наши предположения. Кроме того, можно предложить другую более общую концепцию области применимости аппроксимации Рыгова. Как было замечено выше, многократное рассеяние, которое только частично учитывается этой аппроксимацией, главным образом вызывается мелкомасштабными неоднородностями. С другой стороны, внутренний

масштаб есть величина, которая фактически определяет некоторый вклад мелкомасштабных неоднородностей в спектр показателя преломления. Таким образом, можно предположить, что чем сильнее зависимость от внутреннего масштаба какой-либо величины, вычисленной в рыговской аппроксимации, тем уже область применимости этого результата.

Выше были представлены результаты моделирования для слабой турбулентности. В этих условиях интересные нас дисперсии изменяются плавно с ростом индекса мерцания или, другими словами, с увеличением силы турбулентности. Однако как только достигается область сильных флуктуаций, можно наблюдать качественно иное поведение: сингулярное изменение дисперсий производных логарифма амплитуды связано с появлением дислокаций фазы или вихрей [5–10].

Известно [6], что необходимое условие возникновения фазовых вихрей в некоторой точке наблюдения есть появление нуля амплитуды в этой точке. До сих пор главное внимание в проблеме дислокаций уделялось фазовым сингулярностям, в то время как статистические и топологические свойства амплитуды в присутствии нулевых точек оставались вне рассмотрения. Хотя не только фаза, но и амплитуда проявляет некоторые особые свойства, когда возникают нули амплитуды, а именно: производные амплитуды имеют в этой точке особенности.

Пусть $E(x, y) = E_1(x, y) + iE_2(x, y)$ представляет собой комплексное волновое поле. Предположим, что в этом поле амплитуда обращается в нуль в некоторой точке. Вводя декартову систему координат с началом в этой точке, разлагая E_1 и E_2 в степенной ряд в окрестности начала координат и ограничиваясь только линейными членами, можно получить следующее выражение для амплитуды A :

$$A(x, y) = \sqrt{(E_{1,x}x + E_{1,y}y)^2 + (E_{2,x}x + E_{2,y}y)^2}, \quad (6)$$

где $E_{1,x}$, $E_{2,x}$, $E_{1,y}$ и $E_{2,y}$ обозначают частные производные первого порядка, составляющие поля, взятые в начале координат.

Из уравнения (6) видно, что первая производная амплитуды имеет разрыв в начале координат, в то время как производные высших порядков сингулярны. Можно сказать, что амплитуда скорее «разрезает», чем «придавливает» плоскость нуля в точке $x = 0, y = 0$.

Чтобы подтвердить последнее высказывание, рассмотрим, как присутствие нулевых точек амплитуды воздействует на дисперсию второй производной логарифма амплитуды $\langle \kappa_{xx}^2 \rangle$ и как этот эффект проявляется при вычислении. Постараемся показать, что по мере появления первых вихрей фазы в зоне наблюдения дисперсия $\langle \kappa_{xx}^2 \rangle$ стремится к бесконечности. Для упрощения дальнейшего анализа мы рассмотрим случай, когда $E_{1,x} = E_{2,y} = 1$ и $E_{2,x} = E_{1,y} = 0$ (более общий подход возможен, но в нем нет необходимости для данного

качественного анализа). Вводя полярные координаты (ρ, φ) , мы можем представить $\kappa_{xx}^2(\rho, \varphi)$ в окрестности нулевой точки амплитуды как

$$\kappa_{xx}^2(\rho, \varphi) = \cos^2(2\varphi)/\rho^4. \quad (7)$$

Вклад σ_0^2 от сингулярности в (7) в общую дисперсию $\langle \kappa_{xx}^2 \rangle$ может быть оценен следующим образом. Очертим круговую зону с центром в точке нулевой амплитуды $\rho = 0$. Тогда пусть ε и r будут внутренним и внешним радиусами круга соответственно. Мы можем всегда выбрать r столь малым, но конечным, что разлагать (6) будет справедливо в круге. Используя уравнение (7), можно записать вклад σ_0^2 , относящийся к этой зоне как

$$\sigma_0^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi(r^2 - \varepsilon^2)} \int_{\varepsilon}^r \frac{d\rho \rho^{2\pi}}{\rho^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2(2\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2r^2 \varepsilon^2} = \infty. \quad (8)$$

Поэтому, когда волновое поле имеет нулевую точку амплитуды, общая дисперсия $\langle \kappa_{xx}^2 \rangle$ стремится к бесконечности вследствие вклада, вносимого окрестностью этой точки. Рис. 2 показывает, как этот эффект возникает при вычислении (метод вычисления описан в [11]). Можно видеть крутой рост $\langle \kappa_{xx}^2 \rangle$ по мере того, как плотность дислокации становится ненулевой. В отличие от теоретических предсказаний вычисленная $\langle \kappa_{xx}^2 \rangle$ не стремится к бесконечности вследствие ограниченного шага сетки, использованного при расчетах.

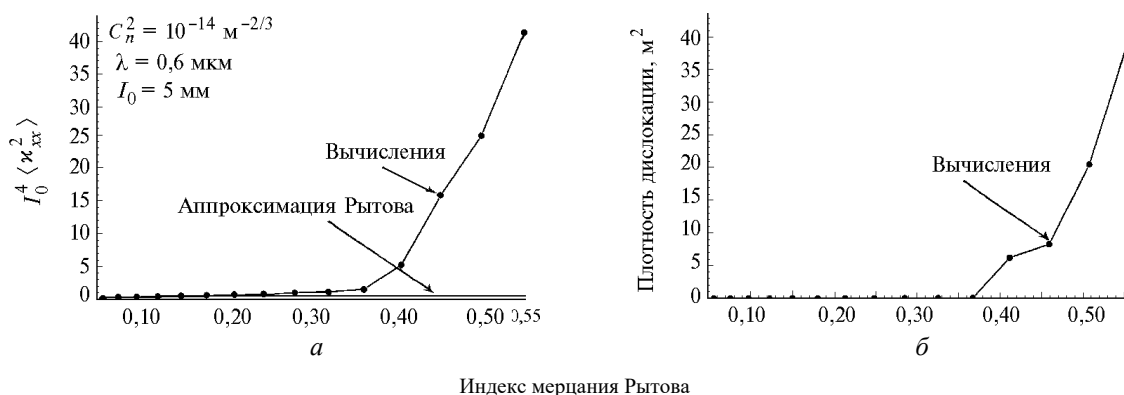


Рис. 2. Поведение дисперсии $\langle \kappa_{xx}^2 \rangle$ второй производной логарифма амплитуды в присутствии дислокаций фазы: $a - \langle \kappa_{xx}^2 \rangle$, умноженная на I_0^4 (четвертая степень внутреннего масштаба); b – плотность дислокаций

Рассмотренный эффект может быть важен для построения теории сильной флуктуации. Как показано в [11], дислокации или точки нулевой амплитуды всегда возникают в условиях сильной флуктуации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia (Мехико) (проект 1020P-E9507) и Sistema Nacional de Investigadores (Мехико). Авторы также благодарят Computer department CI-UNAM и DGSCA (UNAM).

1. Tatarski V.I. The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation. National Science Foundation Report. TT-68-50464, 1968.

2. Ishimaru A. Wave Propagation and Scattering in Random Media. New York: Academic Press, 1978. V. 2. Chap. 20.
 3. Strohbehn J.W., ed. Laser Beam Propagation in the Atmosphere. New York: Springer-Verlag, 1978.
 4. Martin J.M., Flatte S.M. // Appl. Opt. 1988. V. 27. P. 2111–2126.
 5. Nye J.F., Berry M.V. // Proc. R. Soc. London, 1974. V. A336. P. 165–190.
 6. Baranova N.B., Zel'dovich B.Ya., Mamaev A.V., Pilipetskii N., Shkunov V.V. // JETP Lett. 1981. V. 33. P. 195–199.
 7. Fried D.L., Vaughn J.L. // Appl. Opt. 1992. V. 31. P. 2865–2882.
 8. Лукин В.П., Фортес Б.В. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. № 3. С. 435–447.
 9. Тартаковский В.А., Майер Н.Н. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. № 3. С. 448–454.
 10. Lukin V.P., Fortes B.V. // Proc.SPIE. 1996. V. 2778. Part II. P. 1002–1003.
 11. Voitikhovich V.V., Kouznetsov D., Morozov D. // Appl. Opt. 1998. (В печати).

Институт астрономии при Автономном Университете города Мехико-Сити,
 Центр научных инструментов при Автономном Университете города Мехико-Сити, Мексика

Поступила в редакцию
 9 августа 1998 г.

V.V. Voitikhovich, D. Kouznetsov. **Rytov Approximation: Comments About a Range of Validity.**

Some aspects related to the validity range of the Rytov approximation for calculations of turbulence-induced fluctuations are considered. The errors of approximation are estimated by comparing of the Rytov's results to these obtained from simulation based on the numerical solution of the parabolic equation. It is shown that the range of interest depends strongly on the type of quantity to be calculated. Also, some aspects related to the singular behavior of the amplitude in presence of phase dislocations are discussed.