«Оптика атмосферы», **4**, № 11 (1991)

УДК 535.434:551.593

**Н.Н. Белов, С.О. Суслов**

# МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК СВЕТОРАССЕЯНИЯ НЕПОГЛОЩАЮЩИМИ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Рассматривается применение метода фазовых функций к оптике непоглощающих сферических частиц с радиально-неоднородными показателями преломления. Выведены уравнения, описывающие радиальные зависимости фазовых функций. Найдены соотношения, позволяющие рассчитывать характеристики светорассеяния частиц с гладкой радиальной зависимостью показателя преломления. Показана достаточная точность предлагаемого метода.

Расчет; характеристик светорассеяния малых сферических частиц с радиально-неоднородными показателями преломления в последнее время, представляет значительный интерес [1–3]. Однако эта задача решается аналитически лишь для некоторых специальных видов радиальных зависимостей показателя преломления [1, 2], поэтому возникает необходимость численного ее решения. Непосредственное интегрирование возникающих в теории уравнений затруднено из-за сильных осцилляций получающихся решений [2]. Использующиеся же в настоящее время методы недостаточно точны и требуют значительных затрат машинного времени [4].

Для исследования светорассеяния непоглощающих радиально-неоднородных частиц применяется известный в квантовой механике метод фазовых функций [5]. Возможность его применения к расчету оптических характеристик сферических частиц рассматривалась в [4]. В настоящей статье этот метод получил свое дальнейшее развитие.

Рассмотрим рассеяние света сферической частицей радиусом $a$ с действительным показателем преломления $n(r)$. Будем считать, что $n(r)$ — непрерывная, дифференцируемая функция, определенная при $0 \le r \le a$. Обозначим $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $x = ka$ — параметр дифракции частицы. Как и в случае однородной сферической частицы, светорассеяние полностью определяется коэффициентами ряда рассеяния $a_l$ и $b_l$ [2, 6], которые для шара с радиальной неоднородностью показателя преломления имеют вид [2]

$$a_l = \frac{\psi_l(x)\, W_l'(x) - n^2(x)\, \psi_l'(x)\, W_l(x)}{\xi_l(x)\, W_l'(x) - n^2(x)\, \xi_l'(x)\, W_l(x)};$$

$$b_l = \frac{\psi_l(x)\, G_l'(x) - \psi_l'(x)\, G_l(x)}{\xi_l(x)\, G_l'(x) - \xi_l'(x)\, G_l(x)}, \qquad (1)$$

где

$$\psi_l(\rho) = (\pi\rho/2)^{1/2} J_{l+1/2}(\rho);$$

$$\xi_l(\rho) = \psi_l(\rho) + i\chi_l(\rho), \qquad (2)$$

$\rho = kr$; $\psi_l$ — функция Риккати–Бесселя; $\xi_l$ — функция Риккати–Ганкеля первого рода; функции $G_l(\rho)$ и $W_l(\rho)$ определяются уравнениями [1, 2]:

$$G_l''(\rho) + [n^2(\rho) - l(l+1)/\rho^2]\, G_l(\rho) = 0;$$

$$W_l''(\rho) - [\ln(n^2(\rho))]'\, W_l'(\rho) + [n^2(\rho) - l(l+1)/\rho^2]\, W_l(\rho) = 0. \qquad (3)$$

Решение уравнений (3) является основным затруднением теории рассеяния на радиально-неоднородной сферической частице. Применим для их решения метод, известный в квантовой механике как метод фазовых функций [3]. Запишем функции $G_l$ и $W_l$ в виде

$$G_l(\rho) = A_l^c(\rho)\, [\cos\delta_l^c(\rho)\, \psi_l(\rho) - \sin\delta_l^c(\rho)\, \chi_l(\rho)];$$

$$W_l(\rho) = A_l^w(\rho)\, [\cos\delta_l^w(\rho)\, \psi_l(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\, \chi_l(\rho)];$$

$$\chi_l(\rho) = (\pi\rho/2)^{1/2} N_{l+1/2}(\rho), \qquad (4)$$

где $A_l^w$ и $A_l^c$ — амплитудные, $\delta_l^w$ и $\delta_l^c$ — фазовые функции; $\chi_l$ — функция Риккати — Бесселя.

Следуя [5], наложим дополнительные условия на амплитудные и фазовые функции. Потребуем, чтобы

$$G_l'(\rho) = A_l^c(\rho)\,[\cos\delta_l^c(\rho)\,\psi_l'(\rho) - \sin\delta_l^c(\rho)\,\chi_l'(\rho)];$$

$$W_l'(\rho) = A_l^w(\rho)\,[\cos\delta_l^w(\rho)\,\psi_l'(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\,\chi_l'(\rho)]. \qquad (5)$$

Необходимость наложения условий (5) объясняется тем, что в (4) вместо двух неизвестных функций $G_l$ и $W_l$ вводятся четыре. Условия (5) эквивалентны следующим условиям:

$$[A_l^c(\rho)]'\,[\cos\delta_l^c(\rho)\,\psi_l(\rho) - \sin\delta_l^c(\rho)\,\chi_l(\rho)] - A_l^c(\rho)\,[\delta_l^c]'\,[\sin\delta_l^c(\rho)\,\psi_l(\rho) + \cos\delta_l^c(\rho)\,\chi_l(\rho)] = 0;$$

$$[A_l^w(\rho)]'\,[\cos\delta_l^w(\rho)\,\psi_l(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\,\chi_l(\rho)] - A_l^w(\rho)\,[\delta_l^w]'\,[\sin\delta_l^w(\rho)\,\psi_l(\rho) + \cos\delta_l^w(\rho)\,\chi_l(\rho)] = 0. \qquad (6)$$

Подстановка (4) в (3) дает

$$[A_l^c(\rho)]'\,[\cos\delta_l^c(\rho)\,\psi_l'(\rho) - \sin\delta_l^c(\rho)\,\chi_l'(\rho)] - A_l^c(\rho)\,[\delta_l^c]'\,[\sin\delta_l^c(\rho)\,\psi_l(\rho) + \cos\delta_l^c(\rho)\,\chi_l(\rho)] +$$

$$+ (n^2(\rho) + 1)\,A_l^c(\rho)\,[\cos\delta_l^c(\rho)\,\psi_l'(\rho) - \sin\delta_l^c(\rho)\,\chi_l'(\rho)] = 0; \qquad (7)$$

$$[A_l^w(\rho)]'\,[\cos\delta_l^w(\rho)\,\psi_l'(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\,\chi_l'(\rho)] - A_l^w(\rho)\,[\delta_l^w]'\,[\sin\delta_l^w(\rho)\,\psi_l(\rho) + \cos\delta_l^w(\rho)\,\chi_l(\rho)] +$$

$$+ (n^2(\rho) + 1)\,A_l^w(\rho)\,[\cos\delta_l^w(\rho)\,\psi_l'(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\,\chi_l'(\rho)] -$$

$$- [\ln(n^2(\rho))]'\,A_l^w(\rho)\,[\cos\delta_l^w(\rho)\,\psi_l'(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\,\chi_l'(\rho)] = 0.$$

Уравнения (6) и (7) образуют две системы дифференциальных уравнений первого порядка, достаточных для определения функций $A_l^c, \delta_l^c$ и $A_l^w, \delta_l^w$ соответственно. Исключим производные функций $A_l^c$ и $A_l^w$, используя свойство вронскиана функций Риккати — Бесселя:

$$\psi_l\,\chi_l' - \psi_l'\,\chi_l = 1.$$

В результате получаем дифференциальные уравнения для фазовых функций:

$$\frac{d}{d\rho}\delta_l^c = (n^2(\rho) - 1)\,[\cos\delta_l^c(\rho)\,\psi_l(\rho) - \sin\delta_l^c(\rho)\,\chi_l(\rho)]^2;$$

$$\frac{d}{d\rho}\delta_l^w = (n^2(\rho) - 1)\,[\cos\delta_l^w(\rho)\,\psi_l(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\,\chi_l(\rho)]^2 - \qquad (8)$$

$$- [\ln(n^2(\rho))]'\,[\cos\delta_l^w(\rho)\,\psi_l(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\,\chi_l(\rho)]\,[\cos\delta_l^w(\rho)\,\psi_l'(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\,\chi_l'(\rho)]$$

с начальными условиями:

$$\delta_l^c(0) = \delta_l^w(0) = 0, \qquad (9)$$

которые следуют из требования ограниченности функций $G_l$ и $W_l$ в начале координат [5].

Уравнения (8) за исключением некоторых специальных видов зависимостей $n(r)$ решаются только численно. Подставляя их решения в (1), получаем выражения для коэффициентов ряда рассеяния:

$$a_l = \frac{\psi_l(x)\,w_l'(x) - n^2(x)\,\psi_l'(x)\,w_l(x)}{\xi_l(x)\,w_l'(x) - n^2(x)\,\xi_l'(x)\,w_l(x)};\quad b_l = \frac{\psi_l(x)\,g_l'(x) - \psi_l'(x)\,g_l(x)}{\xi_l(x)\,g_l'(x) - \xi_l'(x)\,g_l(x)}, \qquad (10)$$

где

$$g_l(x) = \cos\delta_l^c(x)\,\psi_l(x) - \sin\delta_l^c(x)\,\chi_l(x);\quad w_l(x) = \cos\delta_l^w(x)\,\psi_l(x) - \sin\delta_l^w(x)\,\chi_l(x);$$

$$g_l'(x) = \cos\delta_l^c(x)\,\psi_l'(x) - \sin\delta_l^c(x)\,\chi_l'(x);\quad w_l'(x) = \cos\delta_l^w(x)\,\psi_l'(x) - \sin\delta_l^w(x)\,\chi_l'(x).$$

Как следует из выражений (10), коэффициенты ряда рассеяния зависят лишь от фазовых функций и не зависят от амплитудных, что значительно упрощает решение задачи.

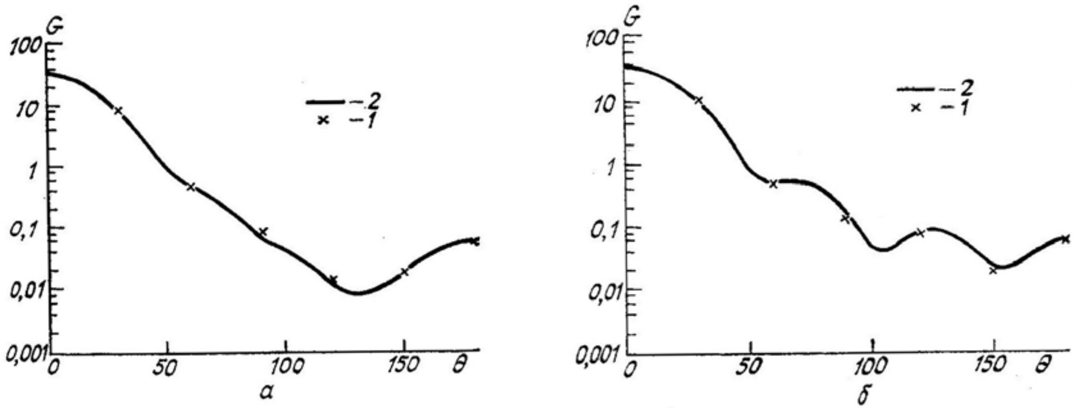


Рис. 1. Угловые зависимости величин $G_1(\theta)$ (*а*) и $G_2(\theta)$ (*б*): кривая *1* — результаты аналитических расчетов, *2* — по формулам (10)

Были произведены расчеты характеристик светорассеяния частиц с радиальной зависимостью показателя преломления, для которых известно аналитическое решение уравнений (3). На рис. 1 представлены угловые характеристики рассеяния частиц с параметром дифракции $x = 5{,}0$ и профилем коэффициента преломления $n(\rho) = (2-(\rho/x)^2)^{1/2}$ (линза Лунеберга [2]). На рис. 1,*а* и 1,*б* изображены угловые зависимости величин

$$G_1(\theta) = \frac{4}{x^2} |S_1(\theta)|^2 \text{ и } G_2(\theta) = \frac{4}{x^2} |S_2(\theta)|^2$$

соответственно, рассчитанные аналитически [2] и полученные методом фазовых функций, где [6]

$$S_1(\theta) = \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n(\theta) + b_n \tau_n(\theta));$$
$$S_2(\theta) = \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n(\theta) + b_n \pi_n(\theta)). \qquad (11)$$

Соответствие между аналитическими и численными расчетами вполне удовлетворительное.

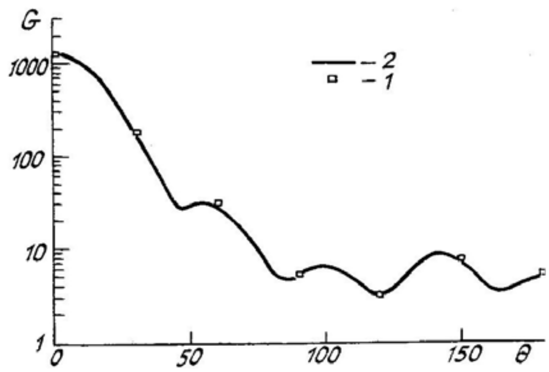


Рис. 2. Угловая зависимость величины $G(\theta)$: кривая *1* — согласно аналитическим расчетам, *2* — рассчитанная методом фазовых функций

На рис. 2 представлены угловые зависимости величины $G(\theta) = |S_1(\theta)|^2 + |S_2(\theta)|^2$, полученные аналитически [1] и рассчитанные методом фазовых функций для радиальной зависимости коэффициента преломления $n(\rho) = 1{,}5/(1{+}0{,}0051\rho^2)$ при параметре дифракции $x = 5{,}0$. Хорошее совпадение результатов аналитических и численных расчетов показывает, что применение метода фазовых функций позволяет довольно точно вычислять оптические характеристики частиц.

Таким образом, в работе предложен новый метод расчета характеристик светорассеяния непоглощающих сферических частиц с радиально-неоднородным показателем преломления, основанный на применении метода фазовых функций к решению основных уравнений (3), возникающих в оптике радиально-неоднородных частиц. Выведены уравнения (9), позволяющие рассчитывать характеристики светорассеяния частиц с гладкой радиальной зависимостью показателя преломления. Сопоставление результатов, полученных с использованием предлагаемой методики, с результатами аналитических расчетов для различных видов радиальных зависимостей показателя преломления показывает достаточную точность рассматриваемого метода.


1. Пришивалко А.П., Бабенко В.А., Кузьмин В.Н. Рассеяние и поглощение света неоднородными и анизотропными сферическими частицами. Минск: Наука и техника, 1984. 262 с.
2. Kerker M. The scattering of light and other electromagnetic radiation. N. Y. & London, Acad, Press, 1969. P. 666.
3. Mackowski D.W., Altenkirch R.A., Menguc M.P. //Appl, Optics. 4990. V. 29. № 10. P. 1551–1559.
4. Shafai L. //Can. J. Phys. 1972. V. 50. № 8. P. 749–743.
5. Бабиков В.В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1988. 256 с.
6. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света сферическими частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.



Научно-исследовательский физико-химический институт им. Л.Я. Карпова, Москва



Поступила в редакцию 24 июня 1991 г.



N.N. Belov, S.O. Suslov. **A Technique for Calculating Light Scattering Characteristics of Nonabsorbing Radially Inhomogeneous Particles.**

The method of phase functions in application to optics of nonabsorbing spherical particles with radially nonuniform distribution of the refractive index is analyzed. Equations describing the radial behavior of the phase functions are derived, and the expressions are suggested, which allow one to calculate scattering characteristics of particles with smooth radial distribution of the radiative index. The accuracy of the suggested approach is shown to be quite sufficient.