

С.М. Чернявский

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ ЛЕММЫ РИССА

Предлагаются методы регуляризации обратных задач оптики: метод на основе леммы Рисса в задаче восстановления некогерентного источника по его зашумленному изображению и метод амплитудной модуляции в задаче восстановления комплексного сигнала по его автокорреляционной функции.

Восстановление некогерентного источника по его зашумленному изображению. Распределение интенсивности монохроматического источника $I_0(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in E_0$ и распределение интенсивности $I(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, y) \in E$ его зашумленного изображения связаны интегралом суперпозиции [1]

$$I(\mathbf{x}) = \int_{E_0} \int h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) I_0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 + n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E \subset E_0. \quad (1)$$

Здесь ядро $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ является заданной и в общем случае неизопланатической функцией рассеивания точки, функция $n(\mathbf{x})$ описывает шум при регистрации изображения.

Задача нахождения $I_0(\mathbf{x}_0)$ из уравнения (1) является некорректной [2]. Один из путей ее регуляризации состоит в наделении искомого решения априорными свойствами, сужающими множество решений. Кроме свойства неотрицательности решение наделяют свойствами гладкости и вводят на него ограничения, которые могут быть и статистическими. Ограничения такого типа можно учесть выбором пространства решений. Очень часто таковым является гильбертово пространство, значение нормы которого служит регуляризирующим фактором.

Поскольку шум $n(\mathbf{x})$ так же неизвестен, как и $I_0(\mathbf{x}_0)$, то естественно под решением уравнения (1) понимать пару функций $(I_0(\mathbf{x}_0), n(\mathbf{x}))$ с заданными ограничениями

$$I_0(\mathbf{x}_0) \in U \subset H, \quad n(\mathbf{x}) \in V \subset H_1, \quad (2)$$

где гильбертовы пространства H и H_1 , а также множества U и V (обычно выпуклые) определяют тип регуляризации уравнения (1).

Анализ известных методов регуляризации [2, 3]: регуляризация по Тихонову с помощью регуляризирующего функционала, метод максимального правдоподобия, метод максимальной энтропии, показывает, что решение уравнения (1) упрощается, если это уравнение описывать в терминах скалярного произведения гильбертова пространства.

При фиксированном $\mathbf{x} \in E$ функция $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ переменной $\mathbf{x}_0 \in E_0$ задает функционал на H , и его вид определяется интегральным членом в (1). Мы имеем семейство функционалов $h_{\mathbf{x}}(I_0)$ на H , зависящих от параметра \mathbf{x} . В соответствии с леммой Рисса [4] любой непрерывный функционал $h(I)$ на H с нормой $\|h\|$ имеет единственное представление в виде скалярного произведения (φ_h, I) этого пространства, причем $\|h\|^2 = (\varphi_h, \varphi_h)$. Доказательство леммы – конструктивное, оно дает явный вид элемента $\varphi_h = h(\varphi_1) (\varphi_1, \varphi_1)^{-2} \varphi_1$, где φ_1 принадлежит ортогональному дополнению к подпространству нулей $h(I) = 0$ функционала h . Элемент φ_h может быть найден как решение задачи

$$(\varphi, \varphi) \rightarrow \min \quad \text{при } h(\varphi) = 1. \quad (3)$$

Лемма Рисса позволяет представить интегральный член в (1) в виде $h_{\mathbf{x}}(I_0) = (\varphi_{\mathbf{x}}, I_0)_H$, где $\varphi_{\mathbf{x}}$ – решение задачи (3) при $h_{\mathbf{x}}(\varphi) = 1$.

Шум $n(\mathbf{x})$ можно также рассматривать как значение некоторого семейства функционалов на H_1 , зависящего от параметра $\mathbf{x} \in E$, и повторить все рассуждения для него. Но можно поступить иначе. Ограничим наше рассмотрение случаем, когда множество E – конечное: $E = \{\mathbf{x}_k, k = 1, \dots, K\}$. Величину шума $n(\mathbf{x}_k)$ можно рассматривать как значение евклидова скалярного произведения вектора $n \in R^K$ и базисного вектора $e_k = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \in R^K$, у которого k -я координата равна 1. На R^K может быть задано другое скалярное произведение, переводящее его в пространство H_1 : $(n_1, n_2)_H = (Bn_1, n_2)$, где B – определенно положительная матрица. По лемме Рисса существует единственный элемент $\phi_k \in H_1$ такой, что $n(\mathbf{x}_k) = (e_k, n) = (B\psi_k, n)$. Очевидно, что $\psi_k = B^{-1} e_k$. Задача (1)–(2) запишется теперь в виде

$$I_k = (\phi_k, I_0) + (B\psi_k, n), \quad I_0 \in U, \quad n \in V, \quad k = 1, \dots, K \quad (4)$$

и может рассматриваться как задача нахождения функционала, который определяется парой $(I_0, n) \in U \times V \subset H \times H_1$ и на заданных элементах $(\phi_k, \psi_k) \in H \times H_1$ принимает значения I_k . Это так называемая конечномерная проблема моментов (КПМ) [5]. Необходимое и достаточное условие разрешимости КПМ сводится к выполнению неравенства

$$\min_{\lambda} \sup_{(I_0, n) \in U \times V} [(\Phi(\lambda), I_0) + (B\Psi(\lambda), n)] = \gamma \geq 1 \quad (5)$$

при любых $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in R^K$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^k \lambda_k I_k = 1$, где $\Phi(\lambda)$ и $\Psi(\lambda)$ – линейные комбинации функций $\{\phi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ с коэффициентами $\{\lambda_k\}$. Если λ^0 – точка минимума задачи (5), то среди решений КПМ можно выделить решение (I^0, n^0) с экстремальным свойством

$$(\Phi(\lambda^0), I^0) + (B\Psi(\lambda^0), n^0) = \sup_{(I_0, n) \in U \times V} [(\Phi(\lambda^0), I_0) + (B\Psi(\lambda^0), n)]. \quad (6)$$

Примеры регуляризирующих пространств H , H_1 и множеств U , V . 1. Будем искать решение КПМ в классе гладких функций. Тогда естественно считать H пространством Соболева $W_2^1(E_0)$ со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \int_{E_0} ((\text{grad } \varphi_1 \cdot \text{grad } \varphi_2) + \mu \varphi_1 \varphi_2) d\mathbf{x}_0, \quad \mu \geq 0.$$

Элементы φ_k задачи (3) удовлетворяют необходимому условию экстремума, которое приводит к уравнению

$$-\Delta \varphi + \mu \varphi = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \quad (7)$$

с граничным условием $d\varphi/dn = 0$ на dE_0 , где Δ – оператор Лапласа.

Если ограничение на решение КПМ взять в виде

$$\{(I_0, n): I_0 = I_{\text{med}} + u, \quad I_{\text{med}} > 0, \quad f(u, n) = (u, u) + \alpha(Bn, n) \leq l^2, \quad \alpha > 0\},$$

то получим решение, регуляризованное по Тихонову с помощью функционала $f(u, n)$, которое обладает экстремальным свойством (6) и имеет структуру $u^0 = \Phi((l/\gamma)\lambda^0)$, $n^0 = \Psi((l/\gamma)\lambda^0)$. Таким образом, пара $(I_0, n) = (I_{\text{med}} + \Phi(\lambda), \Psi(\lambda))$ является решением системы (4), а сама система является определяющей для вектора коэффициентов λ .

Полезность предлагаемого подхода проиллюстрируем на одномерном случае. Полагая $x_0 = t$ и $\mu = \alpha^2$, задача (7) примет вид

$$-\varphi'' + \alpha^2 \varphi = h(t), \quad \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0. \quad (8)$$

Задача (8) имеет единственное решение, которое находится в квадратурах. Остается найти λ из системы линейных алгебраических уравнений, чтобы определить решение (I_0, n) . Для сравнения: если регуляризованное решение по Тихонову искать путем минимизации регуляризирующего функционала, то оно должно определяться из интегродифференциального уравнения.

Из равенства $h(I_0) = (\varphi_h, I_0)$, вытекающего из леммы Рисса, следует, что преобразование $h \rightarrow \varphi_h$ – линейное и непрерывное. В первом примере оно совпало с обратным оператором определенно положительного оператора $A\varphi$ задачи (7). Это означает, что гильбертово пространство H в первом примере совпало с энергетическим пространством [6] оператора A : $(\varphi, \varphi)_H = (A\varphi, \varphi)_L$, где $L = L_2(E_0)$ – пространство функций с суммируемым квадратом на E_0 . Отсюда вытекает, что рассматриваемая здесь регуляризация задачи (1) сведена к нахождению I_0 в классе обобщенных решений некоторого определенно положительного оператора с заданной или минимальной энергетической нормой этого оператора.

2. Часто дополнительная информация об источнике $I_0(\mathbf{x}_0)$ носит статистический характер. Функция $I_0(\mathbf{x}_0)$ рассматривается как реализация некоторого случайного процесса с заданным математическим ожиданием $MI_0(\mathbf{x}_0)$ и корреляционной функцией $R_I(\mathbf{x}_0', \mathbf{x}_0'')$. Тогда в качестве пространства H можно взять энергетическое пространство, соответствующее оператору, обратному к интегральному оператору

$$Ah = \int \int_{E_0} R_I(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')h(\mathbf{x}'')d\mathbf{x}'' + \mu h(\mathbf{x}'), \quad \mu > 0$$

со скалярным произведением $(\varphi, I_0)_H = (A^{-1}\varphi, I_0)_L$.

Если шум также задан математическим ожиданием $M_{n_k} = 0$ и корреляционной матрицей R_K , то скалярное произведение в H_1 можно задать, как и ранее, с помощью матрицы $B = R_K^{-1}$.

В конечном итоге задача (1) сводится к КПМ

$$c_k = (A^{-1}\varphi_k, \overset{\circ}{I}_0) + (R_K^{-1}\psi_k, n), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9)$$

где $c_k = I_k - h_k(MI_0)$; $\varphi_k = Ah_k$; $\overset{\circ}{I}_0$ – отклонение I_0 от MI_0 .

Если источник I_0 и шум являются реализациями независимых нормальных случайных процессов, то квадрат нормы пары (I_0, n) на $H \times H_1$ определяется равенством

$$|(I_0, n)|^2 = (A^{-1}\overset{\circ}{I}_0, \overset{\circ}{I}_0) + (R_K^{-1}n, n) \quad (10)$$

и является аналогом квадратичной формы в экспоненте, определяющей апостериорную плотность конечномерных распределений в формуле Байеса [2]. В соответствии с байесовым подходом наилучшая оценка источника I_0 будет соответствовать решению уравнения (1), у которого величина (10) минимальна. Таким образом, задача (1) свелась к нахождению решения КПМ с минимальной нормой. Рассуждения в примере 1 приводят к выводу, что это решение (I_0, n) является линейной комбинацией пар (φ_k, ψ_k) , коэффициенты которой определяются равенствами (9).

3. Пусть пространство $H = L_2(E_0)$. Тогда интегральный член в (1) задает скалярное произведение в $L_2(E_0)$ сразу без каких-либо преобразований элементов h_k . Множества U и V определим выражениями

$$U(l) = \{I_0: I_0 = 0,5 I_{\max} + 0,5 I_{\max}u, |u| \leq 1, \int \int_{E_0} |u(\mathbf{x}_0)|^p d\mathbf{x}_0 \leq l^p\}, \quad (11)$$

$$V = \{n: (Bn, n) \leq \delta^2\}, \quad (12)$$

где $I_{\max} = I_{\max}(\mathbf{x}_0)$ – оценка максимума интенсивности источника в точке \mathbf{x}_0 ; ограничение $|u| \leq 1$ обеспечивает неотрицательность $I_0(\mathbf{x}_0)$; δ – заданная величина, характеризующая интенсивность шума.

Пусть l_{\min} – наименьшее значение l , при котором КПМ разрешима при $(u, n) \in U(l) \times V$. Решение КПМ на $U(l_{\min}) \times V$ является регуляризованным. Восстановленный источник $I_0(\mathbf{x}_0)$ при ограничениях (11), (12) обладает свойством: среди неотрицательных функций на E_0 он имеет наименьшее отклонение от $I_{\max}/2$ по метрике, определяемой вторым неравенством в (11). Данный тип регуляризации является аналогом регуляризации по методу максимальной энтропии [2].

Запишем условие разрешимости КПМ (5) в эквивалентной форме

$$\max_{(B, \lambda, \lambda) \ll \delta} \left\{ \sum_{k=1}^K c_k \lambda_k - \max_{u \in U(l)} (0, 5 I_{\max} \sum_{k=1}^K h_k \lambda_k, u) \right\} = \delta^0 \ll \delta,$$

где $c_k = I_k - (h_k, 0, 5 I_{\max})$.

Значение l_{\min} находится из условия $\delta^0 = \delta$. В связи с этим полезно следующее замечание. При $l = 0$ значение $\delta^0 = (Bc, c)^{1/2}$ максимально. Поэтому δ должно быть меньше этого значения. Варьируя I_{\max} , можно добиться выполнения условия $\delta^0 < \delta$ при $l = +\infty$, т.е. когда 2-е ограничение в (11) отсутствует. Введение 2-го ограничения в (11) приводит к тому, что с уменьшением l сужается множество $U(l)$ и δ^0 увеличивается, поэтому существует l_{\min} , при котором $\delta^0 = \delta$. Можно показать, что функция $u \in U(l_{\min})$ и имеющая экстремальное свойство (6) является решением КПМ, которое непрерывно зависит от c_k , т.е. от исходных данных по норме в $L_p(E_0)$.

Восстановление комплексной функции по ее автокорреляционной функции. Это одна из часто встречающихся обратных задач оптики: комплексная функция $G(\xi', \eta')$, $(\xi', \eta') \in \Omega$ находится из уравнения

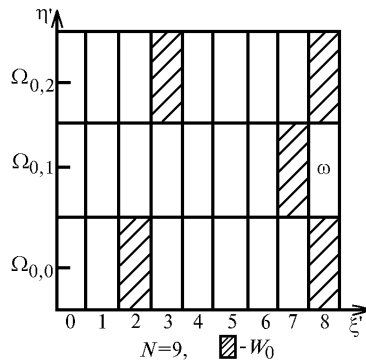
$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} G(\xi + \xi', \eta + \eta') G^*(\xi', \eta') d\xi' d\eta' = H(\xi, \eta), \quad (13)$$

где $H(\xi, \eta)$ известна и имеет комплексно сопряженную симметрию.

Вопрос единственности решения уравнения (13) исследован достаточно полно. Если $G(\xi', \eta')$ – решение уравнения (1), то за исключением «редких» случаев его множество решений $\{G(\xi', \eta') \exp(\varphi), G^*(-\xi', -\eta') \exp(\varphi), \varphi = \text{const}\}$ имеет несущественное многообразие.

Уравнение (1) имеет квадратичную нелинейность и решается итерационными методами. Такие важные вопросы, как выбор начального приближения, регуляризация задачи нахождения решения, в основном решаются путем моделирования. Имеется случай, когда эти вопросы могут быть решены на основе развитой теории. Речь идет о голографическом подходе [7], когда $\Omega = W_1 + \omega$, причем области W_1 и ω достаточно разнесены. Если функция G задана на ω , то уравнение (13) становится линейным относительно G на W_1 при соответствующем выборе вектора смещения (ξ, η) .

Этот пример также показывает, что конфигурация апертуры Ω существенно влияет на метод решения уравнения. Ниже развивается этот подход. Получены такие конфигурации апертур, которые позволяют строить новые методы решения уравнения (13).



Пусть исходная апертура Ω является квадратом со стороной $2a$. Разобьем ее на N вертикальных полос Ω_s шириной $\Delta = 2a/N$ (рисунок). Сужение функции $G(\xi', \eta')$ на Ω_s обозначим через $G_s(\xi', \eta')$ и зададим множество векторов смещения

$$E_0 = \{(\xi_k, \eta): \xi_k = -k\Delta, k = 0, \dots, N-1 \text{ и } |\eta| \leq 2a\}.$$

Уравнение (13) относительно функции $G(\xi', \eta')$ сводится к системе уравнений относительно $G_s(\xi', \eta')$:

$$H(-k\Delta, \eta) = \sum_{p=0}^{N-1-k} \int_0^{\Delta} d\xi' \int_0^{2a} G_p(\Delta p + \xi', \eta + \eta') G_{p+k}^*(\Delta(p+k) + \xi', \eta') d\eta', \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (14)$$

Если внешний интеграл в (14) вычислить приближенно методом средних прямоугольников и ввести обозначения

$$G_p(\eta') = G_p(\Delta(p + 0,5), \eta') \text{ и } H(-k\Delta, \eta) = H_k(\eta),$$

то система (14) преобразуется к виду

$$\int_0^{2a} G_0(\eta + \eta') G_{N-1}^*(\eta') d\eta' = H_{N-1}(\eta)/\Delta, \quad (k=0); \quad (15)$$

$$\int_0^{2a} G_0(\eta + \eta') G_{N-2}^*(\eta') d\eta' + \int_0^{2a} G_1(\eta + \eta') G_{N-1}^*(\eta') d\eta' = H_{N-2}(\eta)/\Delta, \quad (k=1); \quad (16)$$

$$\int_0^{2a} G_0(\eta + \eta') G_{N-1-k}^*(\eta') d\eta' + \int_0^{2a} G_k(\eta + \eta') G_{N-1}^*(\eta') d\eta' = H_{N-1-k}(\eta)/\Delta + \sum_{p=1}^{k-1} \int_0^{2a} G_p(\eta + \eta') G_{N-1-(k-p)}^*(\eta') d\eta', \quad (k \geq 2). \quad (17)$$

Допустим, что функция $G_{N-1}(\eta')$ известна. Тогда уравнение (15) линейно относительно функции $G_0(\eta')$ и может служить для ее определения. Уравнение (16) линейно относительно функций $G_1(\eta')$ и $G_{N-2}(\eta')$. Если конфигурацию апертуры выбрать так, чтобы уравнение (16) в зависимости от промежутка изменения η зависело только от $G_1(\eta')$ или $G_{N-2}(\eta')$, то это уравнение будет определяющим для этих функций. То же самое можно сказать о левых частях уравнения (17) при различных k . Заметим, что правая часть уравнений (17) зависит от функций $G_p(\eta')$, которые найдены из предыдущих уравнений.

Конфигурации апертуры, при которой уравнения (15) – (17) удовлетворяют указанным свойствам, могут быть построены следующим образом. Разделим полосы Ω_s на три части $\Omega_{s,j}$, $j = 0, 1, 2$ (см.рисунок). Часть $\Omega_{N-1,1}$ обозначим ω . Потребуем, чтобы некоторые части не пропускали свет. Остальные части образуют новую конфигурацию апертуры, которую обозначим $W_1 + \omega$. Введение области $W_0 = \Omega \setminus (W_1 + \omega)$, не пропускающей свет, равносильно заданию на ней функции $G(\xi', \eta') = 0$. Задание новой конфигурации апертуры осуществим перечислением тех частей $\Omega_{s,j}$, которые входят в W_0 . Если через $W_0(N)$ обозначить область W_0 при заданном N , то

$$\begin{aligned} W_0(3) &= \{\Omega_{N-1,0}, \Omega_{N-1,2}\}, W_0(6) = \{W_0(3), \Omega_{2,0}, \Omega_{N-2,1}\}, \\ W_0(9) &= \{W_0(6), \Omega_{3,2}\}, W_0(12) = \{W_0(9), \Omega_{5,0}, \Omega_{N-5,1}\}, \\ W_0(15) &= \{W_0(12), \Omega_{6,2}\}, W_0(18) = \{W_0(15), \Omega_{8,0}, \Omega_{N-8,1}\}, \\ W_0(21) &= \{W_0(18), \Omega_{9,2}\}, W_0(24) = \{W_0(21), \Omega_{11,0}, \Omega_{N-11,1}\} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Отношение площадей областей $W_0(N)$ и Ω равно $(2 + 3n)/3N$ при $N = 3(2n + 1)$ и равно $(1 + 3n)/3N$ при $N = 3 \cdot 2n$. При больших N это отношение близко к $1/6$. Рисунок соответствует $N = 9$.

Непосредственно проверяется, что при данных конфигурациях апертуры уравнения (16), (17) являются уравнениями Вольтерры 1-го рода относительно функций $G_{N-1-k}(\eta')$ и уравнениями типа свертки относительно функций $G_k(\eta')$.

При заданной функции $G_{N-1}(\eta')$ на ω , последовательно задавая $k = 0, 1, \dots, K$, $K = (N + 1)/2$ при нечетном N и $K = N/2$ при четном N , можно найти все функции $G_s(\eta')$ на W_1 из линейных уравнений, вытекающих из (16) и (17). Таким образом, множество векторов смещения

$$E = \{(\xi_k, \eta): \xi_k = -k\Delta, \quad k = 0, \dots, K \text{ и } |\eta| \leq 2a\}$$

достаточно для определения $G_s(\eta')$ на W_1 по функции $G_{N-1}(\eta')$ на ω . Оставшееся множество векторов смещения $E_0 \setminus E$ может служить для определения $G_{N-1}(\eta')$ на ω из системы (17) при $k = K + 1, \dots, N - 1$.

При каждом $k = K + 1, \dots, N - 1$ уравнение (17) определяет некоторый оператор, преобразующий функции $G_{N-1}(\eta')$, $H_{N-1-p}(\eta)$ ($p = 0, 1, \dots, K$) и $H_{N-1-k}(\eta)$ в функцию $G_{N-1}(\eta')$:

$$G_{N-1} = \varphi_k(G_{N-1}, H_{N-1}, H_{N-2}, \dots, H_{N-1-K}, H_{N-1-k}). \quad (18)$$

Независимо от того, как заданы $H_{N-1-k}(\eta)$ – точно или с ошибкой, мы имеем их оценку. Поэтому можем допустить их малую вариацию. Избыточность системы (18) и малые вариации функций $H_{N-1-k}(\eta)$ можно использовать для получения приемлемого решения $G_{N-1}(\eta')$. Функцию $G_{N-1}(\eta')$ и соответствующие ей функции $G_s(\eta')$ на W_1 следует рассматривать как решение уравнения (1).

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
2. Реконструкция изображений/Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1992. 635 с.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 542 с.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 357 с.
5. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1969. 151 с.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. 512 с.
7. Бейтс Р., Мак-Доннелли М. Восстановление и реконструкция изображений. М.: Мир, 1989. 333 с.

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию
2 июля 1996 г.

S. M. Chernyavskii. Regularization Methods of the Reconstruction of an Optical Signal. Regularisation on the Basis of Riesz Lemma.

Regularization methods are given for the inverse problems of the optics: the method based on the Riesz lemma for the problem of reconstruction of incoherent source from its noised image and the method of the amplitude modulation for reconstruction of complex signal through its autocorrelation function.