«Оптика атмосферы и океана», **5**, № 11 (1992)

УДК 551.521.3

В.Г. Ошлаков

ОПТИМАЛЬНЫЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрена оптимизация измерителя 16 элементов матрицы рассеяния. Измерения элементов матрицы рассеяния производятся с максимальной точностью при наличии ошибок исходных данных. Измеритель отличается простотой управления поляризационными элементами.

Матрица рассеяния D связывает вектор Стокса излучения источника $S_и = [I_и Q_и U_и V_и]^т$ и вектор Стокса рассеянного излучения $S_п = [I_п Q_п U_п V_п]^т$, падающего на приемник, соотношением

$$S_п = DS_и. \tag{1}$$

В общем случае, когда среда является неизотропной, невозможно заранее указать равные и нулевые элементы, поэтому необходимо определять все 16 элементов D.

На важность задачи измерения D указано в [1], и актуальность ее сохраняется до сих пор ввиду методологических и технических трудностей.

Известная схема прибора для измерения D имеет оптический генератор, излучение которого проходит последовательно поляризатор и фазовый элемент, осуществляющий сдвиг фаз ортогональных компонент на угол $\delta_и$. Свет, рассеянный средой, падает на приемник, в котором проходят последовательно фазовый элемент, осуществляющий сдвиг фаз ортогональных компонент на угол $\delta_п$, поляризатор и интерференционный фильтр. Поляризационный блок источника излучения осуществляет преобразование вектора Стокса излучения оптического генератора $S_0 = [I_0 Q_0 U_0 V_0]^т$. Это преобразование определяется [2] матрицами Мюллера поляризатора $П_и$ и фазового элемента $Ф_и$.

Определим $S_и$, учитывая, что преобразование имеет вид $S_и = Ф_и П_и S_0$:

$$S_и = [I_и\, Q_и\, U_и\, V_и]^т = \frac{1}{2}(I_0 + Q_0 \cos 2\theta + U_0 \sin 2\theta)[1,\ \cos 2\varphi \cos 2(\varphi - \theta) + \cos \delta_и \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \theta),$$

$$\sin 2\varphi \cos 2(\varphi - \theta) - \cos \delta_и \cos 2\varphi \sin 2(\varphi - \theta),\ \sin \delta_и \sin 2(\varphi - \theta)]^т, \tag{2}$$

где θ — угол ориентации плоскости пропускания поляризатора относительно оси X системы координат источника; φ — угол ориентации быстрой оси фазового элемента.

Для определения 16 элементов матрицы рассеяния достаточно 16 независимых уравнений и, если учесть, что каждый тип поляризации источника содержит 4 параметра Стокса, то достаточно, чтобы источник создавал 4 типа поляризации. Учитывая (1), (2), запишем эти уравнения:

$$DS_{иi} = S_{пi},\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{3}$$

Система (3) должна быть хорошо обусловлена, т.е. ее решение должно быть малочувствительно к ошибкам или к неопределенности исходных данных.

Оптимальный измеритель дает такие коэффициенты системе (3), что неточность их задания наименее сказывается на точности ее решения, и одновременно он прост в технической реализации управления поляризационными блоками источника и приемника.

Введем матрицы W, строки которой образуют параметры вектора Стокса источника излучения:

$$W = [S_{и1} S_{и2} S_{и3} S_{и4}]^т. \tag{4}$$

Сгруппируем систему (3) в 4 системы, каждая из которых определяет строку D:

$$WD_1 = I_{п.в};\ WD_2 = Q_{п.в};\ WD_3 = U_{п.в};\ WD_4 = V_{п.в}, \tag{5}$$

где $D_1 = [D_{1n}]^T$; $D_2 = [D_{2n}]^T$; $D_3 = [D_{3n}]^T$;; $D_4 = [D_{4n}]^T$; $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. $I_{п.в} = [I_{пi}]^T$; $Q_{п.в} = [Q_{пi}]^T$; $U_{п.в} = [U_{пi}]^T$; $V_{п.в} = [V_{пi}]^T$; $i = 1, 2, 3, 4$. Пусть ΔW — возмущение матрицы W, обусловленное неточностью определения θ, φ и $\delta_и$, а $\Delta I_п$, $\Delta Q_п$, $\Delta U_п$ и $\Delta V_п$ — ошибки в определении параметров $I_п$, $Q_п$, $U_п$ и $V_п$.

Рассмотрим систему уравнений (5), определяющую D_1. В результате наложения ошибок измерения мы получим решение системы

$$(W+\Delta W)\,[D_{1n}^{*}]^{\mathrm{T}}=[I_{\text{п}i}+\Delta I_{\text{п}i}]^{\mathrm{T}},\; n,\; i=1,\;2,\;3,\;4, \tag{6}$$

где $D_{1n}^{*}=D_{1n}+\Delta D_{1n}$, а ΔD_{1n} — ошибки решения. Относительные возмущения связаны соотношением [3]

$$\delta D_1\leqslant\frac{\operatorname{cond}W}{1-\operatorname{cond}W\delta W}\,(\delta W+\delta I_{\text{п.в}}), \tag{7}$$

где $\operatorname{cond}W=\frac{1}{n}\sqrt{\mathrm{Sp}W^{*}W}\sqrt{\mathrm{Sp}(W^{-1})^{*}W^{-1}}$ — число обусловленности W; n — порядок матрицы; W^{*} и $(W^{-1})^{*}$ — матрицы, транспонированные и комплексно сопряженные с W и W^{-1} соответственно;

$$\delta D_1=\Big(\sum_{n=1}^{4}\Delta D_{1n}^{2}\Big/\sum_{n=1}^{4}D_{1n}^{2}\Big)^{1/2},\quad \delta W=\Big(\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}\Delta W_{mn}^{2}\Big/\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}W_{mn}^{2}\Big)^{1/2},$$

$$\delta I_{\text{п.в}}=\Big(\sum_{i=1}^{4}\Delta I_{\text{п}i}^{2}\Big/\sum_{i=1}^{4}I_{\text{п}i}^{2}\Big)^{1/2}$$

— относительные возмущения соответственно D_1, W, $I_{\text{п.в}}$.

Из (7) следует, что относительные возмущения δW и $\delta I_{\text{п.в}}$ складываются линейно, а следовательно, минимум δD_1 обеспечивается при минимуме δW, $\delta I_{\text{п.в}}$ и $\operatorname{cond}W$. Из этого можно сделать вывод, что оптимальный алгоритм измерения D_1 должен иметь минимальное $\operatorname{cond}W$ и с максимальной точностью измерять $S_{\text{п}i}$.

Соотношениями, аналогичными (7), связаны δD_2, δD_3, δB_4, являющиеся относительными возмущениями векторов, образованных второй, третьей, четвертой строками D с δW, $\operatorname{cond}W$ и относительными возмущениями $\delta Q_{\text{п.в}}$, $\delta U_{\text{п.в}}$, $\delta V_{\text{п.в}}$ соответственно.

Вектор Стокса $S=[IQUV]^{\mathrm{T}}$ излучения на выходе поляризационного блока приемника определяется выражением

$$S=\Pi_{\text{п}}\Phi_{\text{п}}S_{\text{п}}, \tag{8}$$

где $\Pi_{\text{п}}$, $\Phi_{\text{п}}$ — матрицы Мюллера поляризатора и фазового элемента соответственно.

Поскольку чувствительный элемент регистрирует только интенсивность излучения, то для нахождения четырех параметров Стокса излучения достаточно измерить интенсивность его после прохождения поляризационного блока приемника при четырех значениях его матрицы Мюллера и решить полученную систему уравнений. С учетом (8) получим, что излучение с вектором Стокса $S_{\text{п}1}$ для одного из значений матрицы Мюллера поляризационного блока даст на его выходе интенсивность

$$I_{11}=\frac{1}{2}\{I_{\text{п}1}+Q_{\text{п}1}\,[\cos 2\alpha\cos 2(\alpha-\beta)+\cos\delta_{\text{п}}\sin 2\alpha\sin 2(\alpha-\beta)]+$$
$$+U_{\text{п}1}\,[\sin 2\alpha\cos 2(\alpha-\beta)-\cos\delta_{\text{п}}\cos 2\alpha\sin 2(\alpha-\beta)]-V_{\text{п}1}\sin\delta_{\text{п}}\sin 2(\alpha-\beta)\}, \tag{9}$$

где β — ориентации плоскости пропускания поляризатора относительно оси X_1 системы координат приемника, а α — угол ориентации фазового элемента.

Выражения для интенсивностей I_{12}, I_{13}, I_{14}, полученных при остальных трех значениях матрицы Мюллера поляризационного блока приемника, будут отличаться от (9) вариацией параметров α, β, $\delta_{\text{п}}$.

Запишем систему уравнений, определяющую $S_{\text{п}1}$, в матричном виде

$$\frac{1}{2}M\,[I_{\text{п}1}\,Q_{\text{п}1}\,U_{\text{п}1}\,V_{\text{п}1}]^{\mathrm{T}}=[I_{11}I_{12}I_{13}I_{14}]^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

После введения матрицы K, обратной M, запишем (10) в виде

$$[I_{\text{п}1}\,Q_{\text{п}1}\,U_{\text{п}1}\,V_{\text{п}1})^{\mathrm{T}}=2K\,[I_{11}I_{12}I_{13}I_{14}]^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

Учитывая, что I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24} — интенсивности, полученные при измерении $S_{\text{п}2}$; I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34} — при измерении $S_{\text{п}3}$; I_{41}, I_{42}, I_{43}, I_{44} — при измерении $S_{\text{п}4}$, можно записать

$$[S_{\text{п}i}]=2K[I_{ip}]^{\mathrm{T}},\; p=1,\;2,\;3,\;4. \tag{12}$$

Введем матрицу $G=[I_{pi}]$, i, $p=1$, 2, 3, 4 и, учитывая (5), (10), (11), (12), получим строки

$$D_1 = 2W^{-1}G\,[\kappa_{1n}]^{\mathrm{T}};\ D_2 = 2W^{-1}G\,[\kappa_{2n}]^{\mathrm{T}};$$

$$D_3 = 2W^{-1}G\,[\kappa_{3n}]^{\mathrm{T}};\ D_4 = 2W^{-1}G\,[\kappa_{4n}]^{\mathrm{T}},\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{13}$$

Относительные возмущения для системы (10) связаны соотношением

$$\delta S_{\text{п}1} \leqslant \frac{\operatorname{cond} M}{1 - \operatorname{cond} M\delta M}\,(\delta M + \delta I_1), \tag{14}$$

где $\delta M = \left(\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}\Delta M_{mn}^2 \Big/ \sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} M_{mn}^2\right)^{1/2}$ — относительные возмущения матрицы M;

$\delta S_{\text{п}1} = [(\Delta I_{\text{п}1}^2 + \Delta Q_{\text{п}1}^2 + \Delta U_{\text{п}1}^2 + \Delta V_{\text{п}1}^2) / (I_{\text{п}1}^2 + Q_{\text{п}1}^2 + U_{\text{п}1}^2 + V_{\text{п}1}^2)]^{1/2}$ — относительное возмущение $S_{\text{п}1}$;

$\delta I_1 = \left(\sum_{p=1}^{4}\Delta I_{1p}^2 \Big/ \sum_{p=1}^{4} I_{1p}^2\right)^{1/2}$ — относительное возмущение измеренных интенсивностей, обусловленное ошибками измерения ΔI_{1p}.

Из (14) следует, что относительные возмущения δM и δI_1 складываются линейно, а следовательно, минимум $\delta S_{\text{п}1}$ обеспечивается при минимуме δM и δI_1. Из этого можно сделать вывод, что при измерении $S_{\text{п}1}$ необходимо иметь минимальное cond$M$ и с максимальной точностью измерять I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}. Очевидно, что чем точнее измерение векторов $S_{\text{п}i}$, тем меньше $\delta I_{\text{п.в}}$, $\delta Q_{\text{п.в}}$, $\delta U_{\text{п.в}}$, $\delta V_{\text{п.в}}$. M отличается от W противоположным знаком в четвертом столбце. Можно показать, что cond$M$ = cond$W$, поэтому проведем анализ W.

Так, W всегда вырождена, если изменяется только угол ориентации поляризатора, а также, если изменяется θ и φ одновременно, при $\varphi - \theta = \text{const}$. Если изменяется параметр $\delta_{\text{п}}$, то, чтобы W была невырождена, необходимо, как минимум, один раз изменить ориентацию фазового элемента или поляризатора. W всегда невырождена, если изменяется ориентация фазового элемента, поэтому управление ориентацией фазового элемента наиболее удобно. Численный анализ [4] показал, что cond$M$ имеет минимум при определенной ориентации фазового элемента относительно поляризатора при $\delta_{\text{п}} = 130°$. Мой расчет по (7) для $\delta_{\text{п}} = \lambda/4$, $\theta = 90°$, $\varphi_1 = 45$, $\varphi_2 = 75$, $\varphi_3 = 105$, $\varphi_4 = 135°$ дал cond$M$ = 1,53.

Для сравнения приводим числа обусловленности других методов измерения параметров Стокса. Метод [1], требующий 4 измерения интенсивности, но при этом одно измерение проводится без фазового элемента (что усложняет техническую реализацию), имеет число обусловленности 1,3. Метод [5], требующий 6 измерений, при этом одно измерение проводится также без фазового элемента, дает число обусловленности 1,06.

1. Прожекторный луч в атмосфере. //Под ред. Г.В. Розенберга. М.: Изд. АН СССР. I960. С. 146–174.
2. Джеррард А., Берч Дж.М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978. 345 с.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
4. Марьенко В.В., Молебная Т.В. //Оптико-механическая промышленность. 1990. № 7. С. 68–71.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики М.: Наука, 1973. 719 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
26 июня 1992 г.

V.G. Oshlakov. **An Optimal Measurer of the Scattering Phase Matrix**.

An optimization of a device for measuring 15 components of the scattering phase matrix is proposed. The optimized instrument allows the measurements of the scattering phase matrix to be performed with the maximum possible accuracy in the presence of errors in the initial data. The device construction provides a very simple control of the polarization components