«Оптика атмосферы», **4**, № 11 (1991)

УДК 585.2 : 621.373.8

Э.В. Лугин

ТЕОРЕМА ПОЙНТИНГА И ЗАТУХАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД

Формулируется теорема Пойнтинга для слабонелинейных сред с поглощением в условиях самовоздействия монохроматических волн. Рассмотрен аналог закона Бугера в крыльях спектральных линий сред с нелинейностью кубического типа. Показано, что при больших оптических толщах (порядка нескольких единиц) различие с классической формой носит непринципиальный характер.

Ставится вопрос об экспериментальном определении некоторых нелинейных постоянных.

1. Уравнения поля в изотропной немагнитной среде, в которых выделена зависимость от времени в виде множителя $\exp(-i\omega t)$, удовлетворяют уравнениям в форме, не зависящей от времени [1]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}-i\kappa_0\mathbf{H}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}+i\kappa_0\varepsilon_L\mathbf{E}=0, \tag{1}$$

$\kappa=\omega/c$, ε_L — диэлектрическая проницаемость.

Линейные уравнения (1) при достаточно больших полях могут быть переписаны в форме

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}-i\kappa_0\mathbf{H}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}+i\kappa_0(\varepsilon_L+\varepsilon_{NL}(|\boldsymbol{E}|^2))\boldsymbol{E}=0. \tag{2}$$

Уравнения (2) описывают самовоздействие плоских монохроматических волн; если рассматривается первая неисчезающая поправка к ε_L, зависящая от интенсивности поля («кубические» среды), то последнее уравнение имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}+i\kappa_0(\varepsilon_L+\varepsilon_2|\boldsymbol{E}|^2)\boldsymbol{E}=0. \tag{3}$$

Предполагается, что

$$\boldsymbol{E}=\rho(S)\mathbf{E},\quad S=|\mathbf{E}|^2, \tag{4}$$

ρ — комплексная функция; ε_2 — в общем случае также комплексная величина. Предполагается также, что поля локально поперечны; в приближении геометрической оптики $\mathbf{S}=|\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*|=|\mathbf{S}|$, $\mathbf{S}$ — вектор Пойнтинга (необходимые множители в системе единиц *CGSE* опущены); $\operatorname{grad}\mathbf{S}=-2\kappa_0\varkappa\mathbf{S}$ (соотношение следует из теоремы Пойнтинга для вектора $\mathbf{Sn}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления вектора Пойнтинга, $\operatorname{div}\mathbf{n}=0$); $\varepsilon_L=m^2$, $m=n+i\varkappa$ — комплексный показатель преломления.

Наряду с определением (4) нелинейного электрического поля определяется с помощью (2) нелинейный магнитный вектор

$$\boldsymbol{H}=\rho\mathbf{H}+\frac{1}{i\kappa_0}[\nabla\rho\times\mathbf{E}]. \tag{5}$$

Из (1)–(3) следует уравнение для функции ρ; в [2] приведены решения этого уравнения для крыльев спектральных линий. В настоящем сообщении они используются для изучения затухания монохроматического излучения в слабонелинейных средах.

2. Сформулируем теорему Пойнтинга для эффектов самовоздействия в монохроматическом поле. Используя определения электрического (4) и магнитного (5) нелинейных полей, для вектора Пойнтинга можно составить комбинацию

$$\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}=|\rho|^2\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}+\frac{1}{i\kappa_0}\rho^*\mathbf{E}^*\times[\nabla\rho\times\mathbf{E}],$$

и далее, используя формулы векторного анализа,

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}]=\operatorname{div}(|\rho|^2[\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}])+\rho^*\{[\nabla\rho\times\mathbf{H}]\mathbf{E}^*-[\nabla\rho\times\mathbf{E}]\mathbf{H}^*\}-\frac{\kappa_0}{i}\varepsilon_{NL}|\rho|^2|\mathbf{E}|^2$$

Сложение последнего выражения с его комплексным сопряжением приводит к выражению

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}=|\rho|^2\operatorname{div}\mathbf{S}-2\kappa_0(\operatorname{Jm}\varepsilon_{NL})|\rho|^2 S;$$

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*, \ \Pi = |\mathbf{\Pi}|. \tag{6}$$

Используя в (6) соотношение $\mathrm{div}\mathbf{S} = -\sigma S$ из линейной теории (σ – коэффициент поглощения, $\sigma = 2\kappa_0\varkappa$), окончательно имеем

$$\mathrm{div}\,\mathbf{\Pi} = -(\sigma + 2\kappa_0\,\mathrm{Jm}\,\varepsilon_{NL})\,|\rho|^2 S \tag{7}$$

или, для кубических сред,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{\Pi} = -(\sigma \pm 2\kappa_0\,|\,\mathrm{Jm}\,\varepsilon_2\,|\,|\rho|^2 S)\,|\rho|^2 S. \tag{8}$$

В (8) нижний знак относится к уменьшению эффективного коэффициента поглощения и связан, следовательно, с частичным просветлением среды. Согласно [2] этот случай связан с решением уравнения для функции ρ в форме гиперболического секанса.

3. Как и выше, для нелинейного вектора Пойнтинга можно написать

$$\mathbf{\Pi} = \rho^*\mathbf{E}^* \times \left(\rho\mathbf{H} + \frac{1}{i\kappa_0}[\nabla\rho \times \mathbf{E}]\right) + \text{к. с.} = |\rho|^2\mathbf{S} - \frac{S}{i\kappa_0}\{\rho\nabla\rho^* - \rho^*\nabla\rho\}.$$

Раскрыв далее выражение в фигурных скобках, будем иметь

$$\Pi = |\boldsymbol{E}|^2\{1 + P\}; \tag{9}$$

$$P = \frac{2\varkappa S}{i}\left[\left(\frac{\dot\rho}{\rho}\right)^* - \frac{\dot\rho}{\rho}\right]. \tag{10}$$

Здесь точкой обозначена производная функция ρ по аргументу; далее приведен явный вид выражения (10). Таким образом, интенсивность поля должна определяться не величиной $|\mathbf{E}|^2$ (как в [2]), но вектором Пойнтинга (9). Выясним далее влияние поправки P на квадрат амплитуды поля и покажем, что этой поправкой, вообще говоря, пренебрегать нельзя.

Применив при вычислении (10) приемы, описанные в [2], можно написать:

$$\Pi = |\boldsymbol{E}|^2\left\{1 - \frac{2\varkappa}{i}\left(2i\Phi'_\xi + i\,\frac{n}{\varkappa}\right)\right\}.$$

Согласно 12] для $\mathrm{Jm}\varepsilon_2 = \varepsilon < 0$ $\Phi'_\xi = \dfrac{\beta}{2}th\vartheta$, $\vartheta = \dfrac{1}{2}\xi - C$, $\beta = n/\varkappa$, $\xi = -\tau = -\sigma z$ (оптическая толща)

$$E = \frac{A}{x^{1/2}}\,\mathrm{sech}\,(\vartheta)\exp\left(i\Phi(\vartheta)\right)\mathrm{E}(z),\ x = \exp(-\tau),\ A^2 = \frac{3}{4}\beta/|\delta|\,S_0$$

где S_0 – интенсивность поля, входящего в среду; A – амплитудный множитель; C – аддитивная постоянная; z – дистанция.

Отметим, что затухание излучения описывается нисходящей ветвью функции $\mathrm{sech}\,\vartheta$. Для вектора Пойнтинга имеем

$$\Pi = |E|^2\left\{1 - 2n\left[1 - th\left(\frac{\tau}{2} + C\right)\right]\right\}. \tag{11}$$

При $\tau = 0$ (вход в среду)

$$\Pi = \mathrm{A}^2\,\mathrm{sech}^2(C)\{1 - 2n(1 - thC)\}\,|\mathbf{E}_0|^2. \tag{12}$$

При $C = 0$ имеем $th0 = 0$, поэтому величина Π становится отрицательной. Добиться условия $\Pi > 0$ можно лишь при условии $C \neq 0$. Именно, необходимо потребовать

$$A^2\mathrm{sech}^2(C)\{1 - 2\,n(1 - thC)\} = 1. \tag{13}$$

Через соотношение (13) зависимость от входящего в среду поля E_0 переносится на аддитивную постоянную C. Табл. 1 показывает, как выбор этой аддитивной постоянной связан с нормировочной постоянной A при $n = 1$ (и через эту постоянную – с величиной начального поля E_0).

Таблица 1

C	$th\,C$	$2th\,C-1$	$\mathrm{sech}\,C$	$A^2 = \frac{1}{\mathrm{sech}^2 C}\ \frac{1}{2th\,C-1}$
0,55	0,501	0,001	0,866	1335
0,95	0,739	0,480	0,673	4,60
1	0,762	0,523	0,648	4,55
2	0,964	0,928	0,266	15,23
3	0,995	0,990	0,099	103
5	0,9999	0,9998	0,013	5918

Как следует из таблицы, зависимость (13) есть кривая с минимумом. Мы интерпретируем величину $C \sim 1$, связанную с этим минимумом, с максимальным полем E_0, допустимым для применения модели кубической среды в [2].

При $C > 1$ величина E_0 падает и Π при $C \gtrsim 5$ полностью соответствует стандартному закону ослабления излучения по Бугеру.

Например, при $C = 1$ имеем:

$$\Pi = 4{,}55\,\mathrm{sech}\left(-\frac{\tau}{2} - 1\right)\left\{2th\left(\frac{\tau}{2} + 1\right) - 1\right\}|\mathbf{E}_0|^2. \tag{14}$$

При больших оптических толщах (ϑ порядка нескольких единиц)

$$th\vartheta \sim 1,\ \mathrm{sech}\vartheta \sim 2\exp(-\vartheta),$$

поэтому

$$\Pi(C=1) \approx 2{,}46\ \exp(-\tau)\,|E_0|. \tag{15}$$

при больших амплитудах (меньших S_0) численный множитель в (15) уменьшается. При достаточно малых S_0 минимальное значение предэкспоненциального множителя близко к 1. Например,

$$\Pi(C=5) \approx 1{,}07\ \exp(-\tau)\,|E_0|^2. \tag{16}$$

Таким образом, из выражения для Π следует, что поток энергии в среде (n, $\varkappa$, ε_2) зависит не только от амплитуды поля, но и от фазовой характеристики поля. При $\mathrm{Im}\varepsilon_2 < 0$ имеет место, частичное просветление среды.

4. Аналогичное рассмотрение противоположного знака в (8) заставляет обратиться к решению для функции ρ в форме $\mathrm{cosech}\,\vartheta$ ($\mathrm{Im}\varepsilon_2 > 0$). Здесь

$$\Phi'_\xi = \frac{\beta}{2}\,\mathrm{cth}\,\vartheta,\ \ E = \frac{A}{x^{1/2}}\,\mathrm{cosech}\,(\vartheta)\exp(i\Phi)\,E_L$$

и можно написать

$$\Pi = A^2\,\mathrm{cosech}^2(\vartheta)\{1 - 2n\,(1 - \mathrm{cth}\,\vartheta)\}\,|E_0|^2.$$

На выходе в среду ($\tau = 0$)

$$\Pi = A^2\,\mathrm{cosech}^2(C)\,\{1 - 2n\,(1 - \mathrm{cth}\,C)\}\,|E_0|^2.$$

Соответствующие оценки зависимости C от A при $n = 1$ и Π ($\tau = 0$) $= S_0$ даны в табл. 2.

Таблица 2

C	$\mathrm{cth}\,C$	$2\,\mathrm{cth}\,C-1$	$\mathrm{cosech}\,C$	A^2
0,01	100,00	199,	100	50,25
1	1,3130	1,6260	0,8509	0,8493
2	1,0373	1,0746	0,2757	12,2428
5	1,0001	1,0002	0,0135	5486

Здесь также можно указать постоянную $C \sim 1$, с которой связано максимальное значение поля E_0, допустимое для применимости модели кубической среды. При уменьшении поля E_0 (т.е. с возрастанием величины A) закон ослабления излучения следует стандартной форме экспоненциального затухания.

Как и выше, рассмотрим случай $C = 1$. При больших ϑ

$$\mathrm{cth}\vartheta \sim 1+2\exp(-2\vartheta),\ \mathrm{cosech}\,\vartheta \sim 2\exp(-\vartheta);$$

$$\Pi(C=1) \approx 0{,}46\exp(-\tau)|E_0|^2; \tag{17}$$

здесь предэкспоненциальный моножитель < 1, в соответствии со знаком плюс в (8). При $C = 5$

$$\Pi(C=5) \approx 0{,}996\exp(-\tau)S_0. \tag{18}$$

Вообще знак величины $\mathrm{Im}\varepsilon_2$ и ее значение должны определяться из конкретной постановки задачи [3].

Необходимо отметить, что кроме обсуждаемой здесь задачи о затухании излучения интерес представляет другой аспект этой задачи, связанный с наблюдением параметров спектральных линий и возможностью экспериментального определения постоянной ε_2.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 856 с.
2. Лугин Э.В. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 10. С. 1070–1077.
3. Иевлева Л.Д., Ковнер М.А. //Оптика и спектроскопия. 1969. Т. 26. Вып. 4. С. 601–606; 1970. Т. 29. Вып. 5. С. 1002–1004.

Сибирский физико-технический институт им. В.Д. Кузнецова, Томск

Поступила в редакцию 26 июля 1991 г.

E.V. Lugin. **Poynting Theorem and Radiation Extinction in Weakly Nonlinear Media.**

A formulation of the Poynting theorem for the case of weakly nonlinear absorbing media under the conditions when a self-action of monochromatic waves occurs is given. An analog of the Bouger's law for the absorption lines' wings of a medium with the cubic type nonlinearity is discussed. It is shown that at large optical thickness (of the order of units) the deviations from the classical description are of nonprinciple character.

The problem is formulated on experimental determination of some nonlinearity constants.