«Оптика атмосферы и океана», **8**, N 10(1995)

УДК 621.396.96

В.А. Хлусов

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МАТРИЦЫ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВЗАИМНЫХ СРЕД

На основе анализа симметричных комплексных операторов, принадлежащих пространству конгруэнтных унитарных преобразований, определены формальные математические процедуры отыскания собственных векторов и собственных значений однопозиционных матриц рассеяния (ОМР) взаимных сред.

Известно [1,2], что для взаимных рассеивателей их ОМР всегда симметрична и при переходе к описанию в новом поляризационном базисе преобразуется посредством конгруэнтного унитарного преобразования. Пусть в декартовом поляризационном базисе, в системе координат XY, ОМР задана (путем, например, экспериментальных измерений) четырьмя комплексными числами:

$$S_g = \begin{pmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\dot{S}_{21} = \dot{S}_{12}$ (в силу необходимости симметрии). При этом базисными векторами измерительного базиса служат два ортонормальных, линейно поляризованных синфазных вектора Джонса, ориентированных параллельно осям OX, OY опорной системы координат XY соответственно. В системе координат $(XY)'$, в прежнем декартовом базисе, оператор (1) принимает вид

$$S_g^1 = \tilde{R}_\theta\, S_g\, R_\theta, \tag{2}$$

где $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta; & -\sin\theta \\ \sin\theta; & \cos\theta \end{pmatrix}$ – оператор поворота; θ – угол ориентации системы координат (XY) относительно системы XY, в которой представлен оператор S_g в (2); ~ (тильда) – знак транспонирования.

В поляризационном базисе, нормальные орты которого $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ описываются векторами Джонса, большие оси эллипса поляризации которых параллельны осям OX, OY системы координат $(XY)'$ соответственно, а направление обхода их одинаковых эллипсов поляризации противоположно, оператор (2) примет вид

$$S_\varepsilon = (\widetilde{\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2})\, S_g'\, (\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2) = F_\varepsilon\, S_g'\, F_\varepsilon, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ j\sin\varepsilon \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} j\sin\varepsilon \\ \cos\varepsilon \end{pmatrix}; \tag{4}$$

$$F_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon; & j\sin\varepsilon \\ j\sin\varepsilon; & \cos\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Величина ε в (5) задает абсолютную величину угла эллиптичности ортогональных базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ без изменения их ориентации относительно системы координат $(XY)'$ и определяет эллиптичность базиса описания оператора S_ε в выражении (3). Подставляя соотношение (2) в (3), получим

$$S_\varepsilon = \tilde{F}_\varepsilon \tilde{R}_\theta S_g R_\theta F_\varepsilon = \tilde{L} S_g L, \tag{6}$$

где $L = R_\theta F_\varepsilon$.

Таким образом, представления S_ε оператора S_g в (1) во всех возможных базисах с углом эллиптичности ε и углом ориентации θ (относительно системы координат описания оператора S_g) заданы общим выражением (6), где унитарный оператор L определяет группу вращений в трехмерном пространстве стереографической проекции векторов Джонса на сферу Пуанкаре, а ε, θ наглядно и однозначно параметризуют эту группу. Отметим, что данная параметризация выгодно отличается от параметров Кэли–Клейна [3], которые также однозначно параметризуют указанную группу двумя зависимыми величинами $\dot{A}$, $\dot{B}$ в виде

$$L = \begin{pmatrix} \dot{A}; & -\dot{B}^* \\ \dot{B}; & \dot{A}^* \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где комплексные числа $\dot{A}$, $\dot{B}$ удовлетворяют условию

$$\dot{A}\dot{A}^* + \dot{B}\dot{B}^* = 1 \tag{8}$$

и не имеют наглядной физической трактовки.

В силу симметрии оператора S_g и конгруэнтности преобразования в выражении (6) всегда отыщутся такие параметры $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\theta = \theta_0$, для которых матрица S_ε в (6) примет каноническую (диагональную) форму:

$$S_\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} = \tilde{F}_{\varepsilon_0} \tilde{R}_{\theta_0} S_g R_{\theta_0} F_{\varepsilon_0} = \tilde{L}_0 S_g L_0, \tag{9}$$

где $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$ определяют собственные числа ОМР; ε_0, θ_0 – параметры ее собственного базиса. Решая уравнение (9) относительно оператора S_g, получим

$$S_g = R_{\theta_0} F_{\varepsilon_0}^* \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} \overset{+}{F}_{\varepsilon_0} \tilde{R}_{\theta_0} = L_0^* S_\varepsilon^0 \overset{+}{L}_0, \tag{10}$$

где «+» – знак эрмитового сопряжения; «*» – комплексного сопряжения. Наблюдаемый векторный сигнал, на выходе анализатора-формирователя поля связан с сигналом излучения соотношением

$$\mathbf{U}_p = \tilde{P} S_g P \mathbf{U}_0, \tag{11}$$

где P – унитарный оператор анализатора-формирователя, определяющий его поляризационные свойства (эллиптичность и ориентацию измерительного базиса) [1].

С учетом выражения (10) для оператора S_g выражение (11) принимает вид

$$\mathbf{U}_p = \tilde{P} L_0^* \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} \overset{+}{L}_0 P \mathbf{U}_0 \tag{12}$$

и для

$$P = L_0, \tag{13}$$

что всегда можно выполнить, перестраивая эллиптичность и ориентацию измерительного базиса (т.е. изменяя поляризационные свойства анализатора), выражение (12) принимает предельно простой вид

$$\mathbf{U}_p = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} \mathbf{U}_0 = S_\varepsilon^0\, \mathbf{U}_0. \qquad (14)$$

Соотношение (14) означает, что в собственном базисе представления собственные векторы ОМР, отвечающие ее собственным числам $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$, имеют вид

$$\mathbf{U}_{c1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \dot{\lambda}_1, \quad \mathbf{U}_{c2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \dot{\lambda}_2. \qquad (15)$$

Очевидно, что в декартовом базисе описания (в базисе оператора S_g), в системе координат XY, собственные векторы преобразуются к виду

$$\mathbf{U}_{c1}^g = L_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{c2}^g = L_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

поскольку для оператора S_g (см. выражение (10)) и векторов (16) справедливо

$$S_g\, \mathbf{U}_{c1}^g = \dot{\lambda}_1 \left(\mathbf{U}_{c1}^g\right)^*, \quad S_g\, \mathbf{U}_{c2}^g = \dot{\lambda}_2 \left(\mathbf{U}_{c2}^g\right)^*. \qquad (17)$$

Векторы $\mathbf{U}_{c1}^g$, $\mathbf{U}_{c2}^g$ есть единственные векторы, отвечающие собственным числам $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$ оператора S_g, в силу единственности оператора L_0, обратного оператору L_0^+ в выражении (10) для S_g.

Нетрудно убедиться, что собственные векторы $\mathbf{U}_{c1}^g$, $\mathbf{U}_{c2}^g$ ОМР всегда ортогональны

$$\left(\mathbf{U}_{c1}^g\right)^+ \mathbf{U}_{c2}^g = \left(\mathbf{U}_{c2}^g\right)^+ \mathbf{U}_{c1}^g = 0, \qquad (18)$$

поскольку имеет место соотношение

$$L_0^+ L_0 = L_0 L_0^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \qquad (19)$$

В выражении (17) присутствует знак комплексного сопряжения, и это означает, что собственные векторы ОМР контрвариантны к отражению системы координат XY, в которой они представлены. Этот факт обусловливает отличие ОМР от матриц пропускания (рассеяние строго вперед), которые принадлежат пространству преобразований подобия и для которых соотношение, определяющее собственные векторы, имеет вид

$$S\, \mathbf{e}_c = \lambda\, \mathbf{e}_c, \qquad (20)$$

что позволяет определить характеристическое уравнение в виде

$$\mathrm{Det}\, \{S - \lambda I\} = 0. \qquad (21)$$

Для ОМР, исходя из полученных формул (17), выражение для собственных векторов имеет вид

$$\mathrm{S}\, \mathbf{e}_c = \lambda\, \mathbf{e}_c^*, \qquad (22)$$

причем собственный вектор $\mathbf{e}_c$ в общем случае, как это следует из выражения (16), можно записать в виде

$$\mathbf{e}_c = L_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

где параметры ε_0, θ_0 оператора L_0 (см. выражение (6) для L) определяют параметры собственного базиса ОМР относительно базиса, в котором представлен оператор S в (22). Используя выражение (23) в (22), получим

$$S\, L_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\, L_0^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

откуда можем записать характеристическое уравнение ОМР

$$\mathrm{Det}\ \{S - \lambda\, L_0^{*}\, L_0^{+}\} = 0. \tag{25}$$

Из выражения (6) для L и выражений (5), (2) для F_ε и R_θ следует:

$$L_0 = R_{\theta_0}\, R_{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} \dot{A}; & -\dot{B}^{*} \\ \dot{B}; & \dot{A}^{*} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \cos\varepsilon_0 \cos\varepsilon_0 - j \sin\varepsilon_0 \sin\theta_0; \\ \dot{B} &= \cos\varepsilon_0 \sin\theta_0 + j \sin\varepsilon_0 \cos\theta_0. \end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя выражение (26) в (25) и перемножив, получим

$$\lambda^2 - \lambda\, [\mathrm{Sp}\, S \cos 2\varepsilon_0 - j \sin 2\varepsilon_0\ \{(\dot{S}_{11} - \dot{S}_{22}) \sin 2\theta_0 - 2\, \dot{S}_{12} \cos 2\,\theta_0\}] + \mathrm{Det}\, S = 0, \tag{28}$$

где Sp и Det есть след и определитель оператора S; $\dot{S}_{ij}$ – элементы оператора. Таким образом, соотношение (28) устанавливает для ОМР соответствие между ее собственными числами $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$, параметрами ее собственного базиса ε_0, θ_0 и ее элементами $\dot{S}_{ij}$ в виде системы из двух трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{l}_1 &= 0{,}5\ [\dot{N} + (\dot{N}^2 - 4\mathrm{Det}\, S)^{1/2}], \\ \dot{l}_2 &= 0{,}5\ [\dot{N} - (\dot{N}^2 - 4\mathrm{Det}\, S)^{1/2}], \end{aligned} \tag{29}$$

где $\dot{N} = \mathrm{Sp}\, S \cos 2\varepsilon_0 - j \sin 2\varepsilon_0\ \{(\dot{S}_{11} - \dot{S}_{22}) \sin 2\theta_0 - 2\dot{S}_{12} \cos 2\,\theta_0\}$, а $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$ (собственные числа ОМР) есть решения квадратичной формы (28) относительно λ.

Система уравнений (29) содержит шесть неизвестных действительных величин: $|\dot{\lambda}_1|$, $|\dot{\lambda}_2|$, $\varphi_1 = \arg \dot{\lambda}_1$, $\varphi_2 = \arg \dot{\lambda}_2$, ε_0, θ_0 и эквивалентна системе из четырех действительных уравнений, на первый взгляд, не имеющей однозначного решения относительно шести неизвестных, но в силу того, что для ОМР ее евклидова норма и определитель инвариантны к параметрам базиса описания, система уравнений (29) может быть доопределена двумя соотношениями:

$$\begin{aligned} |\mathrm{Det}\, S| &= |\dot{l}_1|\ |\dot{l}_2|, \\ \|\mathrm{S}\|^2 &= |\dot{l}_1|^2 + |\dot{l}_2|^2, \end{aligned} \tag{30}$$

откуда следует:

$$|\dot{l}_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} (\ \|S\|^2 + (\ \|S\|^4 - 4|\ \mathrm{Det}\, S|^2)^{1/2})^{1/2}, \tag{31}$$

$$|\dot{l}_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} (\ \|S\|^2 - (\ \|S\|^4 - 4|\ \mathrm{Det}\, S|^2)^{1/2})^{1/2}, \tag{32}$$

где $\|S\| = \left(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{2} |\dot{S}_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ – евклидова норма ОМР.

Система уравнений (29), (30) однозначно разрешима относительно шести неизвестных $|\dot{\lambda}_1|$, $|\dot{\lambda}_2|$, φ_1, φ_2, ε_0, θ_0. Вообще говоря, соотношения (30) следуют непосредственно из системы уравнений (29), что показывает их детальный анализ (выходящий за рамки данного сообщения в силу его громоздкости), и характеристическое уравнение (28) содержит всю информацию о параметрах $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$, ε_0, θ_0, неизбыточным и достаточным образом параметризующих ОМР рассеивающего объекта.

Подводя итог проделанному анализу, можно сделать следующие выводы:

– полученное характеристическое уравнение (28) для ОМР однозначно определяет ее собственные числа и параметры собственного базиса (а значит, и собственные векторы) и устанавливает формальные математические правила их отыскания в виде его решений;

– указанный формализм позволяет устранить ряд нестыковок и явных ошибок, имеющих место в некоторых работах, посвященных анализу ОМР (например, [4]).

1. Богородский В.В., Канарейкин Д.Б., Козлов А.И. Поляризация рассеянного и собственного радиоизлучения земных покровов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 320 с.
2. David S. Saxon // Tensor Scattering Matrix for the Electromagnetie Field, Physical Review. 1955. V 100. P 6.
3. Федоров Ф.И. Группа Лоренца. М.: Наука, 1979. 384 с.
4. Бадулин Н.Н. и др. // Обобщенные собственные поляризации радиолокационной цели. Радиоэлектроника. Известия вузов. 1991. Т. 34. N 9. С. 33–38.

Томская академия систем управления и радиоэлектроники

Поступила в редакцию
21 февраля 1995 г.

V. A. Khlusov. **Characteristic Equation of Mutual Media Backscattering Matrix**.

Based on analysis of symmetric complex operators from the congruent unitary transformations space, the formal mathematic procedures are determined for searching for eigenvectors and eigenvalues of one-position backscattering matrices of mutual media.